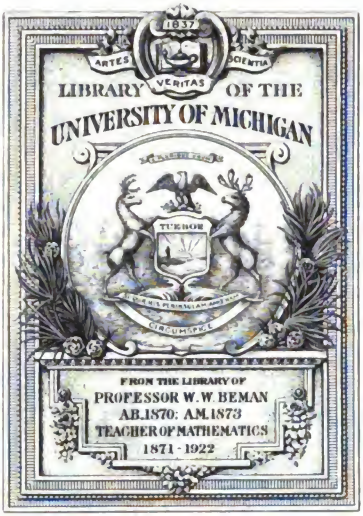



Digitized by Google

Digitized by Google

mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Professor zu Greifswald.

Erster Theil.

---

Mit vier lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

---

**Greifswald.**

Verlag von C. A. Koch.

**1841.**

Digitized by Google

Beaman
7513
Library Com.
37 Bound vols. (other vols. mtd.)
10-23-1922
gen.

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichniss des ersten Theils.

## Arithmetik.


| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| III. | Neue Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln. Vom Herausgeber. . . . . | I. | 12 |
| IV. | Ampères Auflösung der Gleichungen des vierten Grades. Nach Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. T. IX. p. 147 frei bearbeitet von dem Herausgeber. . . . . | I. | 16 |
| V. | Ueber die Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Nach einer Abhandlung des Herrn Abbé Moigno in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par Joseph Liouville. Février 1840. p. 73. frei bearbeitet von dem Herausgeber. . . | I. | 19 |
| VI. | Neue Beweise einiger Sätze und allgemeine Bekungen über eine in der Analysis in gewissen Fällen gebräuchliche Art der Beweisführung. Von dem Herrn Doctor Stern zu Göttingen. . . . . | I. | 57 |
| VII. | Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen. Mitgetheilt und bewiesen von dem Herausgeber. . | I. | 59 |
| X. | Das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten, als specieller Fall eines allgemeinern Satzes betrachtet. Von dem Herausgeber. . . . . | I. | 67 |
| XIII. | Mourey's Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen. Nach zwei Abhandlungen des Herrn Liouville in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par Joseph Liouville. T. IV. p. 501. T. V. p. 31 frei bearbeitet von dem Herausgeber. . . . . | I. | 81 |


409420

Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XVI. | Ueber die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch. Von dem Herrn Doctor J. A. Arndt zu Torgau. . . . . | I. | 101 |
| XIX. | Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von dem Herrn Professor Dr. Oettinger zu Freiburg i. B. . . . . | II. | 113 |
| XX. | Ableitung der Sätze von Rolle, Fourier und Descartes über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung aus der Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen Als Fortsetzung zu der Abhandlung Nr. V. in diesem Theile. Von dem Herausgeber. . . . . | II. | 126 |
| XXV. | Bemerkungen zu dem Aufsatze III. im Archive der Mathematik und Physik I. Theil I. Heft. Von dem Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt. . | II. | 189 |
| XXVIII. | Ueber die Differentialquotienten von $\log x$ und $a^x$ in Bezug auf eine Bemerkung des Herrn Liouville in dessen Journal de Mathématiques. Août 1840. p. 280. Von dem Herausgeber. . . . . | II. | 204 |
| XXIX. | Mathematische Bemerkungen von dem Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover. | II. | 211 |
| XXX. | Solutio casus irreducibilis optica oder Trisectio et multisectio anguli optica von dem Herrn Professor C. J. D. Hill zu Lund. Nach dem Schwedischen des Herrn Verfassers von dem Herrn Doctor Creplin zu Greifswald. . . . . | II. | 215 |
| XXXIV. | Analyse des équations déterminées par M. Fourier de l'institut royal de France, secrétaire perpétuel de l'académie de sciences. Première partie. Paris. 1831. 4. Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften. Ein Supplement zu den Lehrbüchern der Algebra und der Differentialrechnung von M. W. Drobisch, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Von dem Herrn Professor Dr. Gartz zu Halle. . . . . | III. | 225 |
| XXXVII. | Neue Auflösung der cubischen Gleichungen von Herrn J. Cockle. Aus Cambridge Mathematical Journal Nr. XII. (Mai, 1841). Vol. II. p. 248 frei übersetzt von dem Herausgeber. . . . . | III. | 254 |
| XXXVIII. | Beiträge zur Entwickelung der Integrale in Reihen. Von Herrn N. W. Schulze, Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt. . . . . | III. | 257 |
| XXXIX. | Entwickelung einiger Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar. . . . . | III. | 262 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XL. | Ueber die Bedingungen der Ungleichheit, von den Mittelgrössen und von den imaginären Grössen. Von dem Herausgeber. | III. | 268 |
| XLI. | Noch etwas über Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen (Archiv. B. I. Heft I. VII.). Von dem Herrn Doctor Hellerung zu Wismar. | III. | 318 |
| XLVII. | Ueber Bernoullische Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar. | IV. | 360 |
| XLVIII. | Ueber Cauchy's neueste Untersuchungen über die Entwickelung der gesonderten Functionen mit einer veränderlichen Grösse in nach den positiven ganzen Potenzen dieser veränderlichen Grösse fortschreitende convergirende Reihen. Nach den Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence von Cauchy in dessen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. 9e Livraison. Paris. 1840. frei bearbeitet von dem Herausgeber. | IV. | 364 |
| LI. | Eigenschaften der ungeraden Zahlen in Bezug auf beliebige Potenzen der einzelnen Glieder der natürlichen Zahlenreihe. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. | IV. | 415 |
| LII. | Zur Theorie der bestimmten Integrale. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar. | IV. | 417 |
| LIV. | Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar. | IV. | 431 |
| LVI. | Beweis des Satzes, dass jede harmonische unendliche Reihe, in welcher alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben, divergent ist. Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin. | IV. | 445 |


## Geometrie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. | I. | 1 |
| II. | Weitere Berechnung verschiedener auf das Kreisverhältniss $\pi$ begründeter Zahlen. Von dem Herrn Professor Dr. G. Paucker zu Mitau. | I. | 9 |
| XIV. | Ueber eine merkwürdige Relation zwischen den rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten in einer Ebene und den drei Winkeln, welche die vier von diesen Punkten nach einem fünften Punkte in derselben Ebene gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen, und über zwei geodätische Aufgaben. Von dem Herausgeber. | I. | 89 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XVIII. | Beantwortung der Frage, durch wie viele Polygonlinien $n$ beliebige Punkte im Raume mit einander verbunden werden können, wenn man unter einer Polygonlinie jede Linie versteht, welche aus den geraden Linien zusammengesetzt ist, die, indem man die $n$ gegebenen Punkte in beliebiger Ordnung nimmt, den 1sten Punkt mit dem 2ten, den 2ten mit dem 3ten, den 3ten mit dem 4ten, u. s. w. den $(n-1)$sten mit dem $n$ten, den $n$ten mit dem 1sten verbinden. Von dem Herausgeber..... | I. | 108 |
| XXI. | Ueber die Aufgabe: die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet. Von dem Herausgeber..... | II. | 136 |
| XXIII. | Ueber das vollständige Vierseit und vollständige Viereck. Von dem Hrn. Doctor Rädell zu Berlin. | II. | 179 |
| XXIV. | Von der Projection der Figuren in einer und derselben Ebene. Von dem Hrn. Doctor Rädell z. Berlin. | II. | 181 |
| XXVII. | Ueber die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt, mit Bezug auf einige Abhandlungen der Herren Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan und Duhamel in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. IV. Von dem Herausgeber.. | II. | 193 |
| XXXIII. | Bemerkungen und eine geometrische Aufgabe von dem Herrn Director Nizze zu Stralsund. ... | II. | 224 |
| XXXVI. | Untersuchungen über Projectionen und neuere Geometrie. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar. | III. | 248 |
| XLII. | Einiges von den Kegelschnitten. Von dem Herausgeber..... | III. | 322 |
| XLVI. | Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten Grades. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau..... | IV. | 337 |
| XLIX. | Anwendung der Lehre vom Zuge auf die Nachweisung der geometrischen Bedeutung der Form $a+b\sqrt{-1}$. Von dem Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover..... | IV. | 397 |
| LVI. | Eine Eigenschaft des Kreises von dem Herausgeber..... | IV. | 440 |


## Trigonometrie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| XI. | Bemerkung zur Trigonometrie. Von dem Herausgeber..... | I | 73 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XV. | Tafel der pythagoräischen Dreiecke. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. | I. | 96 |
| XVIII. | Vergleichung eines sphärischen Dreiecks mit dem ebenen Dreiecke, welches entsteht, wenn man durch die Spitzen des erstern an jede seiner Seiten zwei Tangenten zieht und deren Durchschnittspunkte durch gerade Linien mit einander verbindet. Von dem Herausgeber. | I. | 110 |
| XXVI. | Note sur les Tables Trigonométriques. Par Mr. C. J. D. Hill, Prof. des math. à l'université de Lund. | II. | 191 |
| LVI. | Ueber Gauss's neuen Beweis des nach Legendre benannten Theorems in der sphärischen Trigonometrie. Von dem Herausgeber. | IV. | 436 |
| LVI. | Einfacher Beweis der Grundformel der ebenen Trigonometrie. Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin. | IV. | 444 |


## Geodäsie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| XII. | Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Auf dienstliche Veranlassung ausgeführt von J. J. Baeyer, Major im Generalstabe. Mit einer Uebersichtskarte. Von dem Herausgeber. | I. | 73 |
| XXXII. | Analytische Auflösung der von Herrn Director und Professor Ritter Hansen in Schumachers astronomischen Nachrichten Nr. 419. mitgetheilten geodätischen Aufgabe: Wenn zwei Punkte der Lage nach gegeben sind, so soll man die Lage zweier andern Punkte durch blosse Winkelmessungen an den letztern, ohne diese von den gegebenen Punkten aus zu beobachten, bestimmen. Von dem Herausgeber. | II. | 219 |
| XXXV. | Das Pothenot'sche Problem in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie. Von dem Herausgeber. | III. | 238 |
| XLV. | Bemerkungen über das Pothenot'sche Problem. Von dem Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover. | III. | 335 |
| LIII. | Ueber eine geodätische Aufgabe. Von dem Herausgeber. | IV. | 423 |
| LVI. | Ueber Clausen's für die Messtischpraxis geeignete Auflösung der Hansen'schen Aufgabe. Von dem Herausgeber. | IV. | 441 |
| LVI. | Analytische Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe. Von dem Herausgeber. | IV. | 446 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | **Physik.** | | |
| VIII. | Einige Resultate aus verglichenen Barometer-Beobachtungen in Berlin und Neustadt-Eberswalde. Von dem Herrn Professor F. W. Schneider zu Neustadt-Eberswalde. | I. | 61 |
| IX. | Ueber Reisebarometer. Von dem Herrn Professor F. W. Schneider zu Neustadt-Eberswalde. | I. | 65 |
| XXII. | Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppen-Problems aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt. Von dem Herausgeber. | II. | 144 |
| XLIV. | Ueber Herrn Doctor Mohr's zu Coblenz Methode Barometer ohne Auskochen luftleer zu machen. Von dem Herausgeber. | III. | 332 |
| L. | Anwendung der Fresnel'schen Formeln zur Bestimmung der von einer beliebigen Anzahl paralleler durchsichtiger Platten reflectirten und gebrochenen polarisirten Lichtintensitäten. Von Herrn J. Flesch, Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Realschule zu Düsseldorf. | IV. | 400 |
| | **Geschichte der Mathematik und Physik.** | | |
| XVIII. | Ein Zug von Poisson. | I. | 107 |
| XVIII. | Züge aus Faraday's Leben. | I. | 107 |
| XVIII. | Ein Zug von Lambert. | I. | 108 |
| XLIV. | Ein Zug von Maupertuis. | III. | 334 |
| XLIV. | Züge aus Gambart's Leben. | III. | 334 |
| | **Uebungsaufgaben für Schüler.** | | |
| XVII. | | I. | 104 |
| XXXI. | | II. | 217 |
| XLIII. | | III. | 330 |
| LV. | | IV. | 435 |
| | **Literarische Berichte *).** | | |
| I. | | I. | 1 |
| II. | | II. | 23 |
| III. | | III. | 47 |
| IV. | | IV. | 63 |


*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

# I.

## Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

zu Gotha.

Die trigonometrischen Relationen zwischen den 44 Stücken des gewöhnlichen Tetraeders haben noch sehr wenige Bearbeiter gefunden. Die Franzosen sind es fast ausschliesslich, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben; aber auch sie haben vorzüglich nur das rechtkantige Tetraeder betrachtet. Von Deutschen ist mir nur eine Abhandlung bekannt, nämlich ein Progamm des Herrn Direktors J. H. T. Müller zu Gotha, welches den Anfang einer ausführlicheren Untersuchung des fraglichen Gegenstandes enthält und aus dem ein freilich nur unbedeutender Theil in die Anhänge der deutschen Bearbeitung des van Swinden'schen Lehrbuches aufgenommen worden ist. Unter diesen Umständen glaube ich, dass die nachfolgenden Sätze, die aus einer ausführlicheren trigonometrischen Untersuchung des Tetraeders entlehnt sind, nicht ganz ohne Interesse sein werden. Ueberdiess zeichnen sie sich zum Theil durch eine bemerkenswerthe Reciprocität aus, welche, so viel mir bekannt, noch nirgends erwähnt worden ist.

Es seien $A$, $B$, $C$, $D$ die vier Ecken eines Tetraeders, $T_1$ $T_2$ $T_3$ $T_4$ die ihnen der Reihe nach gegenüber liegenden Seitenflächen; $abc$ die drei Kanten des Dreieckes $T_1$, $a_1$ $b_1$ $c_1$ die ihnen der Reihe nach gegenüberliegenden Kanten, so dass das Dreieck $T_2$ die Kanten $ab_1c_1$, das Dreieck $T_3$ die Kanten $ba_1c_1$ und das Dreieck $T_4$ die Kanten $ca_1b_1$ enthält. Die Keile irgend zweier Seitenflächen z. B. $T_1$ und $T_2$ bezeichne man durch $(12)$, die Winkel irgend zweier Kanten z. B. $a$ und $a_1$ mit $(aa_1)$. Ferner mögen die Geraden, welche die vier Ecken mit den Schwerpunkten der Gegenseitenflächen verbinden, der Reihe nach $t_1$ $t_2$ $t_3$ $t_4$ genannt, und die von denselben unter einander gebildeten Winkel,



Digitized by Google

welche den ganzen Kanten gegenüberliegen, auf ähnliche Weise wie die Winkel der letzteren durch $(t_{12})$, $(t_{13})$ u. s. w. angedeutet werden. Alsdann erhält man durch Projektion sofort:

$$1.\begin{cases} T_1 = T_2\cos(1,2) + T_3\cos(1,3) + T_4\cos(1,4) \\ T_2 = T_1\cos(1,2) + T_3\cos(2,3) + T_4\cos(2,4) \\ T_3 = T_1\cos(1,3) + T_2\cos(2,3) + T_4\cos(3,4) \\ T_4 = T_1\cos(1,4) + T_2\cos(2,4) + T_3\cos(3,4) \end{cases}$$

und

$$1'.\begin{cases} -t_1 = t_2\cos(t_{12}) + t_3\cos(t_{13}) + t_4\cos(t_{14}) \\ -t_2 = t_1\cos(t_{12}) + t_3\cos(t_{23}) + t_4\cos(t_{24}) \\ -t_3 = t_1\cos(t_{13}) + t_2\cos(t_{23}) + t_4\cos(t_{34}) \\ -t_4 = t_1\cos(t_{14}) + t_2\cos(t_{24}) + t_3\cos(t_{34}) \end{cases}$$

Ausdrücke, welche gewissermaassen als Fundamentalformeln zu betrachten sind. Uebrigens sollen im Folgenden die vollständigen Systeme solcher Gleichungen nicht mehr aufgeführt werden, da man aus einer einzelnen unter ihnen durch gehörige Vertauschung der Zeiger die übrigen ohne Mühe entwickeln kann. Zunächst findet man nun:

$$2.\begin{cases} T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2 = 2T_1T_2\cos(1,2) + 2T_1T_3\cos(1,3) \\ \qquad\qquad + 2T_1T_4\cos(1,4) \\ -(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_4^2) = 2t_1t_2\cos(t_{12}) + 2t_1t_3\cos(t_{13}) \\ \qquad\qquad + 2t_1t_4\cos(t_{24}) \end{cases}$$

und

$$3.\begin{cases} \frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2) = T_1T_2\cos(1,2) + T_1T_3\cos(1,3) \\ \qquad\qquad + T_1T_4\cos(1,4) \\ \qquad\qquad + T_2T_3\cos(2,3) + T_2T_4\cos(2,4) \\ \qquad\qquad + T_3T_4\cos(3,4) \\ -\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) = t_1t_2\cos(t_{12}) + t_1t_3\cos(t_{13}) \\ \qquad\qquad + t_1t_4\cos(t_{14}) \\ \qquad\qquad + t_2t_3\cos(t_{23}) + t_2t_4\cos(t_{24}) \\ \qquad\qquad + t_3t_4\cos(t_{34}) \end{cases}$$

Man bezeichne ferner den Flächeninhalt des durch die Kante $a$ und den Mittelpunkt der Gegenkante $a_1$ gelegten Dreieckes durch $T_a$, das durch die Kante $b$ und den Mittelpunkt von $b_1$ gelegte Dreieck durch $T_b$ u. s. f. so erhält man 6 solche Dreiecksflächen, von denen immer je zwei, wie $T_a$ und $T_{a_1}$, als Gegenflächen zu betrachten sind. Je drei derselben schneiden sich immer in einer der Schwerlinien $t$, wie z. B. $T_{a_1}$, $T_{b_1}$, $T_{c_1}$ in $t_1$, und sie sind daher ganz den Kanten des Tetraeders analog, von denen immer je drei in einer Seitenfläche liegen. Den Keil zweier solchen Dreiecksflächen z. B. $T_a$ $T_b$ wollen wir mit $(T_{ab})$ bezeichnen und darunter immer denjenigen von den 4 an der Durchschnittslinie liegenden Keilen verstehen, welcher der einzigen von den 4 Seitenflächen gegenüberliegt, die durch diese Dreiecke nicht getheilt wird.

Endlich sollen die Flächen der Dreiecke, die aus zwei Gegenkanten als Seiten, und ihrem Durchschnittswinkel als eingeschlossenem Winkel gebildet werden, durch $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ bezeichnet werden, je nachdem sie zu den Kantenpaaren $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ gehören; die Neigungswinkel dieser Flächen gegen einander aber sollen $(\Delta_{12})$, $(\Delta_{13})$, $(\Delta_{23})$ heifsen. Auf ganz ähnliche Weise sollen die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte zweier Gegenkanten, wie

Digitized by Google

$aa_1$, $bb_1$ und $cc_1$ respective durch $\delta_1$ $\delta_2$ $\delta_3$ angedeutet und die Winkel der letzteren unter einander mit $(\delta_{1,2})$, $(\delta_{1,3})$, $(\delta_{2,3})$ bezeichnet werden. Es ist bekannt, dass die 7 Geraden $t_1$ $t_2$ $t_3$ $t_4$ $\delta_1$ $\delta_2$ $\delta_3$ sich im Schwerpunkte des Tetraeders schneiden, und dafs die Parallelogramme, welche die Hälften zweier beliebigen $\delta$ zu Diagonalen haben, selbst die Hälften der entsprechenden Dreiecke $\Delta$ sind. Zunächst finden nun folgende Relationen statt:

$$4.\quad \begin{cases} \Delta_1^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos(1,2) = T_3^2 + T_4^2 - 2T_3T_4\cos(34) \\ \quad = T_b^2 + T_{b_1}^2 - 2T_bT_{b_1}\cos(T_{bb_1}) \\ \qquad = T_c^2 + T_{c_1}^2 + 2T_cT_{c_1}\cos(T_{cc_1}) \\ \quad = T_1T_3\cos(1,3) + T_1T_4\cos(1,4) + T_2T_3\cos(2,3) \\ \qquad + T_2T_4\cos(2,4) \\ \delta_1^2 = \frac{3}{4}(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2\cos(t_{1,2})) = \frac{3}{4}(t_3^2 + t_4^2 + 2t_3t_4\cos(t_{3,4})) \\ \quad = b^2 + b_1^2 - 2bb_1\cos(bb_1) = c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos(cc_1) \\ \quad = -\frac{3}{4}\{t_1t_3\cos(t_{1,3}) + t_1t_4\cos(t_{1,4}) + t_2t_3\cos(t_{2,3}) + t_2t_4\cos(t_{2,4})\} \end{cases}$$

Hieraus folgen sogleich die Formeln:

$$5.\quad \begin{cases} 4T_a^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(1,2) = \Delta_1^2 + 4T_1T_2\cos(1,2) \\ 4T_{a_1}^2 = T_3^2 + T_4^2 + 2T_3T_4\cos(3,4) = \Delta_1^2 + 4T_3T_4\cos(3,4) \\ 4a_1^2 = \frac{9}{4}(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos(t_{1,2})) = \delta_1^2 - 9t_1t_2\cos(t_{1,2}) \\ 4a^2 = \frac{9}{4}(t_3^2 + t_4^2 - 2t_3t_4\cos(t_{3,4})) = \delta_1^2 - 9t_3t_4\cos(t_{3,4}) \end{cases}$$

$$6.\quad \begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 \\ \qquad = T_a^2 + T_{a_1}^2 + T_b^2 + T_{b_1}^2 + T_c^2 + T_{c_1}^2 \\ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_3^2 = \Delta_3^2 + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 \\ \qquad = 2(T_a^2 + T_{a_1}^2 + T_b^2 + T_{b_1}^2) \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = \frac{3}{4}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \\ \qquad = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_3^2 = \delta_3^2 + \frac{3}{4}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \\ \qquad = 2(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2) \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - \Delta_3^2 = (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2) - 2\Delta_3^2 \\ \qquad = 2T_1T_4\cos(1,4) + 2T_2T_3\cos(2,3) \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 = \frac{3}{4}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) - 2\delta_3^2 \\ \qquad = -2t_1t_4\cos(t_{1,4}) - 2t_2t_3\cos(t_{2,3}) \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} \Delta_1^2 = -T_a^2 - T_{a_1}^2 + T_b^2 + T_{b_1}^2 + T_c^2 + T_{c_1}^2, \\ \qquad \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 2(T_a^2 + T_{a_1}^2) \\ \delta_1^2 = -a^2 - a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2, \quad \delta_2^2 + \delta_3^2 = 2(a^2 + a_1^2) \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} 0 = T_aT_{a_1}\cos(T_{aa_1}) + T_bT_{b_1}\cos(T_{bb_1}) + T_cT_{c_1}\cos(T_{cc_1}) \\ 0 = aa_1\cos(aa_1) + bb_1\cos(bb_1) + cc_1\cos(cc_1) \end{cases}$$

$$10.\quad \begin{cases} 2T_aT_{a_1}\cos(T_{aa_1}) = T_c^2 + T_{c_1}^2 - T_b^2 - T_{b_1}^2 = \frac{1}{2}(\Delta_2^2 - \Delta_3^2) \\ 2aa_1\cos(aa_1) = c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2 = \frac{1}{2}(\delta_2^2 - \delta_3^2) \end{cases}$$

Ist ferner $P$ der dreifache Körperinhalt des Tetraeders, so wird:

$$11.\quad \begin{cases} P\alpha = 2T_1T_2\sin(1,2) & T\alpha_1 = \frac{9}{16}t_1t_2\sin(t_{1,2}) \\ P\alpha_1 = 2T_3T_4\sin(3,4) & T\alpha = \frac{9}{16}t_3t_4\sin(t_{3,4}) \\ P\delta_1 = 2T_aT_{a_1}\sin(T_{aa_1}) & \Delta_1 = \frac{1}{2}aa_1\sin(aa_1) \end{cases}$$



Digitized by Google

zugleich aber auch:

$$12.\quad \begin{cases} 4a^2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}), & 4T_a^2 = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cos(\Delta_{23}) \\ 4a_1^2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}), & 4T_{a_1}^2 = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + 2\Delta_2\Delta_3 \cos(\Delta_{23}) \\ P\delta_1 = 2\Delta_2\Delta_3 \sin(\Delta_{23}) & \Delta_1 = \tfrac{1}{4}\delta_2\delta_3 \sin(\delta_{23}) \end{cases}$$

ferner wird:

$$13.\quad \begin{cases} T_{a_1}^2 = T_b^2 + T_c^2 + 2T_bT_c \cos(T_{bc}) = T_{b_1}^2 + T_{c_1}^2 + 2T_{b_1}T_{c_1} \cos(T_{b_1c_1}) \\ T_a^2 = T_{b_1}^2 + T_c^2 + 2T_{b_1}T_c \cos(T_{b_1c}) = T_b^2 + T_{c_1}^2 + 2T_bT_{c_1} \cos(T_{bc_1}) \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(bc) = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) \\ a_1^2 = b_1^2 + c^2 - 2b_1c \cos(b_1c) = b^2 + c_1^2 - 2bc_1 \cos(bc_1) \end{cases}$$

$$14.\quad \begin{cases} \tfrac{3}{2}Pt_1 = 4T_{a_1}T_{b_1} \sin(T_{a_1b_1}) = 4T_{a_1}T_{c_1} \sin(T_{a_1c_1}) = 4T_{b_1}T_{c_1} \sin(T_{b_1c_1}) \\ 2T_1 = ab \sin(ab) = ac \sin(ac) = bc \sin(bc) \end{cases}$$

Man führe zur Abkürzung folgende Zeichen ein:

$$15.\quad \begin{cases} \Psi^2 = (T_1+T_2+T_3-T_4)\ (T_1+T_2-T_3+T_4)\ (T_1-T_2+T_3+T_4)\ (-T_1+T_2+T_3+T_4) - 8T_1T_2T_3T_4 \\ \Phi_a^2 = (T_b+T_{b_1}+T_c-T_{c_1})\ (T_b+T_{b_1}-T_c+T_{c_1})\ (T_b-T_{b_1}+T_c+T_{c_1})\ (-T_b+T_{b_1}+T_c+T_{c_1}) - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \\ \Pi^2 = (\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)\ (\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)\ (\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3)\ (-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) \\ \psi^2 = (t_1+t_2+t_3-t_4)\ (t_1+t_2-t_3+t_4)\ (t_1-t_2+t_3+t_4)\ (-t_1+t_2+t_3+t_4) - 8t_1t_2t_3t_4 \\ \varphi_a^2 = (b+b_1+c-c_1)\ (b+b_1-c+c_1)\ (b-b_1+c+c_1)\ (-b+b_1+c+c_1) - 8bb_1cc_1 \\ \pi^2 = (\delta_1+\delta_2+\delta_3)\ (\delta_1+\delta_2-\delta_3)\ (\delta_1-\delta_2+\delta_3)\ (-\delta_1+\delta_2+\delta_3) \end{cases}$$

so wird

$$16.\quad \begin{cases} \Psi^2 = P^2(a \pm a_1)^2 + 8T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) = P^2\{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cot(12) \cot(34)\} \\ \Phi_a^2 = \tfrac{1}{4}P^2(\delta_2 \mp \delta_3)^2 - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \cos(T_{bb_1} \pm T_{cc_1}) = \tfrac{1}{4}P^2\{\delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cot(T_{bb_1}) \cot(T_{cc_1})\} \\ \Pi^2 = P^2(\delta_1^2 \mp 4aa_1) - 16T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) = P^2\{\delta_1^2 - 4aa_1 \cot(12) \cot(34)\} \\ \frac{9^2}{16^2}\psi^2 = 4(T_{a_1} \pm T_a)^2 + \frac{9^2}{16^2} \cdot 8t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{12} \pm t_{34}) = 4\{T_a^2 + T_{a_1}^2 + 2T_aT_{a_1} \cot(t_{12}) \cot(t_{34})\} \\ \varphi_a^2 = 4^2(\Delta_2 \mp \Delta_3)^2 - 8bb_1cc_1 \cos(bb_1 \pm cc_1) = 4^2\{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cot(bb_1) \cot(cc_1)\} \\ \frac{1}{8^2}\pi^2 = (\Delta_1^2 \mp 4T_aT_{a_1}) - \frac{9^2}{16^2}4t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{12} \pm t_{34}) = \Delta_1^2 - 4T_aT_{a_1} \cot(t_{12}) \cot(t_{34}) \end{cases}$$

und:

Digitized by Google

$$17.\begin{cases} 2\,\Psi^2 + \Pi^2 = P^2\,(\delta_1^{\,2}+\delta_2^{\,2}+\delta_3^{\,2}) \\ 2\,\dfrac{9^2\,\psi^2}{16^2} + \dfrac{\pi^2}{8^2} = \Delta_1^{\,2}+\Delta_2^{\,2}+\Delta_3^{\,2}. \end{cases}$$

Beschreibt man aus der Spitze $A$ des Tetraeders als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 eine Kugel, so bildet die Ecke $A$ auf der Oberfläche der letzteren ein sphärisches Dreieck. Nennt man dann den dreifachen Körperinhalt der Pyramide, welche das Sehnendreieck jenes sphärischen Dreieckes zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, $k$ und dieselbe Grösse für das zugehörige Polardreieck $K$, so dass der Fläche $T_1$ die Grössen $k_1$ und $K_1$, der Fläche $T_2$ die Grössen $k_2$ und $K_2$ u. s. w. gegenüberliegen; so ist

$$18.\quad T_1 : T_2 : T_3 : T_4 = K_1 : K_2 : K_3 : K_4.$$

Demnach verhalten sich die Seitenflächen jedes Tetraeders wie die Funktionen $K$ der ihnen gegenüberliegenden Ecken. Diese Funktionen sind daher für das Tetraeder dasselbe, was die Sinusse der Gegenwinkel für das Dreieck sind. Bezeichnet man das constante Verhältniss $T : K$ durch $M$, so erhält man:

$$19.\begin{cases} M = \dfrac{4\,T_1\,T_2\,T_3\,T_4}{P^2} = \dfrac{T_1}{K_1} = \dfrac{T_2}{K_2} = \dfrac{T_3}{K_3} = \dfrac{T_4}{K_4} \\ = \dfrac{aa_1}{\sin(12)\,\sin(34)} = \dfrac{bb_1}{\sin(13)\,\sin(24)} = \dfrac{cc_1}{\sin(14)\,\sin(23)} \\ = \dfrac{\delta_1^{\,2}-\delta_2^{\,2}}{4\,[\cos(12)\cos(34) - \cos(13)\cos(24)]} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{(a+a_1+b-b_1)\,(a+a_1-b+b_1)}{4\sin\frac{1}{2}(12+34+13-24)\,\sin\frac{1}{2}(12+34-13+24)} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{(a-a_1+b+b_1)\,(-a+a_1+b+b_1)}{4\sin\frac{1}{2}(12-34+13+24)\sin\frac{1}{2}(-12+34+13+24)} = \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ebenso ist auch:

$$20.\quad \frac{aa_1\,bb_1\,cc_1}{P} = \frac{abc}{k_1} = \frac{ab_1c_1}{k_2} = \frac{a_1bc_1}{k_3} = \frac{a_1b_1c}{k_4}.$$

Es ist nicht uninteressant zu untersuchen, was wohl die der Grösse $M$ entsprechende Quantität $m$ in Bezug auf die Grössen $t_1\,t_2\,t_3\,t_4$ sein mag; denn auch hier bleibt sich die Analogie gleich. Man erhält nämlich:

$$21.\begin{cases} m = \dfrac{9^2}{16^2}\,t_1t_2t_3t_4 = \dfrac{T_a\,T_{a_1}}{\sin(t_{12})\sin(t_{34})} = \dfrac{T_b\,T_{b_1}}{\sin(t_{13})\sin(t_{24})} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{\Delta_1^{\,2}-\Delta_2^{\,2}}{4\,[\cos(t_{13})\cos(t_{24}) - \cos(t_{13})\cos(t_{24})]} = \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Lösung der Aufgabe ab, die Grösse zu finden, welche dem $P$ entspricht. Letztere lässt sich auf die mannigfachste Weise ausdrücken z. B.

$$22.\begin{cases} P = a_1b_1c_1k_1 = a_1bck_2 = ab_1ck_3 = abc_1k_4 \\ = 2\sqrt{K_1\,T_2\,T_3\,T_4} = 2\sqrt{K_2\,T_1\,T_3\,T_4} = 2\sqrt{K_3\,T_1\,T_2\,T_4} \\ = 2\sqrt{K_4\,T_1\,T_2\,T_3} \end{cases}$$

Ferner wird:

Digitized by Google

$$
23.\left\{\begin{aligned}
16\,P^2 &= a^2a_1^2\delta_1^2 + b^2b_1^2\delta_2^2 + c^2c_1^2\delta_3^2 - a^2b^2c^2 - a_1^2b_1^2c^2 \\
&\qquad - a_1^2b^2c_1^2 - a^2b_1^2c_1^2 \\
&= 2a^2b^2c^2 + \tfrac{1}{8}a^2(\delta_3^2-\delta_1^2)(\delta_1^2-\delta_2^2) \\
&\qquad + \tfrac{1}{8}b^2(\delta_1^2-\delta_2^2)(\delta_2^2-\delta_3^2) + \tfrac{1}{8}c^2(\delta_2^2-\delta_3^2)(\delta_3^2-\delta_1^2) \\
&= 2a^2b^2c^2 - 2a^4a_1^2 - 2b^4b_1^2 - 2c^4c_1^2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\varphi_a^2(-a^2+b^2+c^2) + \tfrac{1}{4}\varphi_b^2(a^2-b^2+c^2) \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\varphi_c^2(a^2+b^2-c^2) \\
&= \frac{(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1)(aa_1-bb_1+cc_1)(-aa_1+bb_1+cc_1)}{4R^2}
\end{aligned}\right.
$$

wo $R$ den Halbmesser der dem Tetraeder umschriebenen Kugel bedeutet. Endlich erhält man für $P$ auch noch folgende Ausdrücke:

$$
24.\left\{\begin{aligned}
P &= \frac{2\,T_1^2}{a\cot(12) + b\cot(13) + c\cot(14)} \\
&= \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 4\,T_1^2}{\delta_1\cot(\Delta_{23}) + \delta_2\cot(\Delta_{13}) + \delta_3\cot(\Delta_{12})} \\
&= \frac{T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 - T_1^2}{a_1\cot(34) + b_1\cot(24) + c_1\cot(23)} \\
&= \frac{-T_1^2 - \frac{1}{12}(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2)}{t_2\cot(T_{bc}) + t_3\cot(T_{ac}) + t_4\cot(T_{ab})} \\
&= \frac{-(T_{a_1}^2 + T_{b_1}^2 + T_{c_1}^2)}{3\,t_1(\cot(T_{a_1b_1}) + \cot(T_{a_1c_1})\cot(T_{b_1c_1}))}
\end{aligned}\right.
$$

Zu den letzten Formeln lassen sich die analogen leicht finden; denn es ist:

$$
25.\left\{\begin{aligned}
-1 &= \frac{\frac{9}{16}t^2}{T_{a_1}\cot(t_{12}) + T_{b_1}\cot(t_{13}) + T_{c_1}\cot(t_{14})} \\
&= \frac{\frac{1}{8}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - 9\,t_1^2)}{\Delta_1\cot(\delta_{23}) + \Delta_2\cot(\delta_{13}) + \Delta_3\cot(\delta_{12})} \\
&= \frac{-\frac{9}{32}(t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 - t_1^2)}{T_a\cot(t_{34}) + T_b\cot(t_{24}) + T_c\cot(t_{23})} \\
&= \frac{\frac{9}{32}c\,t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) - \frac{27}{16}t_1^2}{T_2\cot(b_1c_1) + T_3\cot(a_1c_1) + T_4\cot(a_1b_1)} \\
&= \frac{-(a^2+b^2+c^2)}{4\,T_1(\cot(ab) + \cot(ac) + \cot(bc))}.
\end{aligned}\right.
$$

Bei Entwickelung dieser Formeln erhält man auch noch die Ausdrücke:

$$
26.\left\{\begin{aligned}
0 &= \delta_1\cot(T_{aa_1}) + \delta_2\cot(T_{bb_1}) + \delta_3\cot(T_{cc_1}) \\
0 &= \Delta_1\cot(aa_1) + \Delta_2\cot(bb_1) + \Delta_3\cot(cc_1)
\end{aligned}\right.
$$

Man führe ferner folgende Hülfswinkel ein:

$$
27.\left\{\begin{aligned}
2\,bb_1\,cc_1\cos\alpha &= -a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 \\
2\,T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A &= -T_a^2T_{a_1}^2 + T_b^2T_{b_1}^2 + T_c^2T_{c_1}^2 \\
2\,aa_1\,cc_1\cos\beta &= a^2a_1^2 - b^2b_1^2 + c^2c_1^2 \\
2\,T_aT_{a_1}T_cT_{c_1}\cos B &= T_a^2T_{a_1}^2 - T_b^2T_{b_1}^2 + T_c^2T_{c_1}^2 \\
2\,aa_1\,bb_1\cos\gamma &= a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - c^2c_1^2 \\
2\,T_aT_{a_1}T_bT_{b_1}\cos\Gamma &= T_a^2T_{a_1}^2 + T_b^2T_{b_1}^2 - T_c^2T_{c_1}^2
\end{aligned}\right.
$$

Digitized by Google

$$28.\quad \begin{cases} 2bb_1 cc_1 \cos\alpha' = -a^2\delta_1^2 + b^2c_1^2 + b_1^2c^2 \\ \quad 2T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A' = -T_a^2\Delta_1^2 + T_b^2T_c^2 + T_{b_1}^2T_{c_1}^2 \\ 2aa_1 cc_1 \cos\beta' = -b^2\delta_2^2 + a^2c_1^2 + a_1^2c^2 \\ \quad 2T_aT_{a_1}T_cT_{c_1}\cos B' = -T_b^2\Delta_2^2 + T_a^2T_c^2 + T_{a_1}^2T_{c_1}^2 \\ 2aa_1 bb_1 \cos\gamma' = -c^2\delta_3^2 + a^2b_1^2 + a_1^2b^2 \\ \quad 2T_aT_{a_1}T_bT_{b_1}\cos\Gamma = -T_c^2\Delta_3^2 + T_a^2T_b^2 + T_{a_1}^2T_{b_1}^2 \end{cases}$$

$$29.\quad \begin{cases} 2bb_1 cc_1 \cos\alpha'' = -a_1^2\delta_1^2 + b^2c^2 + b_1^2c_1^2 \\ \quad 2T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A'' = -T_{a_1}^2\Delta_1^2 + T_b^2T_{c_1}^2 + T_{b_1}^2T_c^2 \\ 2aa_1 cc_1 \cos\beta'' = -b_1^2\delta_2^2 + a^2c^2 + a_1^2c_1^2 \\ \quad 2T_aT_{a_1}T_cT_{c_1}\cos B'' = -T_{b_1}^2\Delta_2^2 + T_a^2T_{c_1}^2 + T_{a_1}^2T_c^2 \\ 2aa_1 bb_1 \cos\gamma'' = -c_1^2\delta_3^2 + a^2b^2 + a_1^2b_1^2 \\ \quad 2T_aT_{a_1}T_bT_{b_1}\cos\Gamma'' = -T_{c_1}^2\Delta_3^2 + T_a^2T_{b_1}^2 + T_{a_1}^2T_b^2, \end{cases}$$

so ist auch:

$$30.\quad \begin{cases} \cos(12) = \dfrac{\cos\alpha - \cos(bc)\cos(b_1c_1)}{\sin(bc)\sin(b_1c_1)} = \dfrac{\cos\alpha' - \cos(bc)\cos(b_1c_1)}{-\sin(bc)\sin(b_1c_1)} \\ \cos(34) = \dfrac{\cos\alpha - \cos(bc_1)\cos(b_1c)}{\sin(bc_1)\sin(b_1c)} = \dfrac{\cos\alpha'' - \cos(bc_1)\cos(b_1c)}{-\sin(bc_1)\sin(b_1c)} \end{cases}$$

$$31.\quad \begin{cases} \cos(13) = \dfrac{\cos(bc)\cos(bc_1) - \cos(cc_1)}{\sin(bc)\sin(bc_1)} \\ \cos(24) = \dfrac{\cos(b_1c)\cos(b_1c_1) - \cos(cc_1)}{\sin(b_1c)\sin(b_1c_1)} \\ \cos(14) = \dfrac{\cos(bb_1) + \cos(bc)\cos(b_1c)}{\sin(bc)\sin(b_1c)} \\ \cos(23) = \dfrac{\cos(bb_1) + \cos(b_1c_1)\cos(bc_1)}{\sin(b_1c_1)\sin(bc_1)} \end{cases}$$

Da nun zugleich

$$32.\quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos(bc)\cos(b_1c_1) + \cos(bc_1)\cos(b_1c) + \cos(bb_1)\cos(cc_1) \\ \cos\alpha' = \cos(bc)\cos(b_1c_1) - \cos(bc_1)\cos(b_1c) - \cos(bb_1)\cos(cc_1) \\ \cos\alpha'' = -\cos(bc)\cos(b_1c_1) + \cos(bc_1)\cos(b_1c) - \cos(bb_1)\cos(cc_1) \end{cases}$$

ist, so lassen sich die 6 Keile je zweier Seitenflächen aus den 6 ebenen Winkeln je zweier Paare von Gegenkanten unmittelbar bestimmen. Uebrigens ist auch analog:

$$33.\quad \begin{cases} \cos(t_{12}) = \dfrac{\cos A - \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1})}{-\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c_1})} = \dfrac{\cos A' - \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c_1})} \\ \cos(t_{34}) = \dfrac{\cos A - \cos(T_{bc_1})\cos T_{b_1c})}{-\sin(T_{bc_1})\sin(T_{b_1c})} = \dfrac{\cos A' - \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c})}{\sin(T_{bc_1})\sin(T_{b_1c})} \\ \cos(t_{13}) = \dfrac{\cos(T_{b_1c})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{b_1c})\sin(T_{b_1c_1})} \\ \cos(t_{24}) = \dfrac{\cos(T_{bc})\cos(T_{bc_1}) + \cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{bc_1})} \\ \cos(t_{14}) = \dfrac{\cos(T_{b_1c_1})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{b_1c_1})\sin(T_{b_1c})} \\ \cos(t_{23}) = \dfrac{\cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c})} \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$34.\begin{cases}\cos A = \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})\\ \cos A' = -\cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})\\ \cos A'' = \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) - \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})\end{cases}$$

Zugleich erhält man:

$$35.\begin{cases}\cos(\Delta_{12}) = \dfrac{\cos\gamma' + \cos(aa_1)\cos(bb_1)}{\sin(aa_1)\sin(bb_1)} = -\dfrac{\cos\gamma'' + \cos(aa_1)\cos(bb_1)}{\sin(aa_1)\sin(bb_1)}\\ \cos(\Delta_{13}) = \dfrac{\cos\beta' + \cos(aa_1)\cos(cc_1)}{\sin(aa_1)\sin(cc_1)} = -\dfrac{\cos\beta'' + \cos(aa_1)\cos(cc_1)}{\sin(aa_1)\sin(cc_1)}\\ \cos(\Delta_{23}) = \dfrac{\cos\alpha' + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)} = -\dfrac{\cos\alpha'' + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)}\\ \cos(\vartheta_{12}) = \dfrac{\cos\Gamma' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})} = -\dfrac{\cos\Gamma'' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})}\\ \cos(\vartheta_{13}) = \dfrac{\cos B' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{cc_1})} = -\dfrac{\cos B'' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})}\\ \cos(\vartheta_{23}) = \dfrac{\cos A' + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})} = -\dfrac{\cos A'' + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})}\end{cases}$$

Ferner aber wird auch:

$$36.\begin{cases}\cos(aa_1) = \dfrac{\cos(13)\cos(24) - \cos(14)\cos(23)}{\sin(12)\sin(34)}\\ \cos(bb_1) = \dfrac{\cos(14)\cos(23) - \cos(12)\cos(34)}{\sin(13)\sin(24)}\\ \cos(cc_1) = \dfrac{\cos(12)\cos(34) - \cos(13)\cos(24)}{\sin(14)\sin(23)}\\ \cos(T_{aa_1}) = \dfrac{\cos(t_{13})\cos(t_{24}) - \cos(t_{14})\cos(t_{23})}{\sin(t_{12})\sin(t_{34})}\\ \cos(T_{bb_1}) = \dfrac{\cos(t_{14})\cos(t_{23}) - \cos(t_{12})\cos(t_{34})}{\sin(t_{13})\sin(t_{24})}\\ \cos(T_{cc_1}) = \dfrac{\cos(t_{12})\cos(t_{34}) - \cos(t_{13})\cos(t_{24})}{\sin(t_{14})\sin(t_{23})}\end{cases}$$

Für die Grössen $\Phi$ und $\varphi$ erhält man nunmehr:

$$37.\begin{cases}\Phi_a{}^2 = \frac{1}{4}P^2\delta_1{}^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A = P^2a^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A' \\ \qquad\qquad = P^2a_1{}^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A''\\ \varphi_a{}^2 = 16\Delta_1{}^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha = 8^2T_a{}^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha' \\ \qquad\qquad = 8^2T_{a_1}{}^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha''\end{cases}$$

$$38.\begin{cases}\Phi_a{}^2 + \Phi_b{}^2 + \Phi_c{}^2 = \frac{1}{4}P^2(\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2) \\ \qquad\qquad + 4(T_a{}^2T_{a_1}{}^2 + T_b{}^2T_{b_1}{}^2 + T_c{}^2T_{c_1})\\ \varphi_a{}^2 + \varphi_b{}^2 + \varphi_c{}^2 = 16(\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2) \\ \qquad\qquad + 4(a^2a_1{}^2 + b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2)\end{cases}$$

Führt man endlich noch die Hülfswinkel $\Theta$ und $\vartheta$ ein, so dass

$$39.\begin{cases}\cos\Theta_1 = \dfrac{-\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2}{2\Delta_2\Delta_3} \text{ und } \cos\vartheta_1 = \dfrac{-\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2}{2\delta_2\delta_3}\end{cases}$$

ist, so findet man auch noch:

Digitized by Google

40. $\left\{\cos\Theta_1 = \frac{\cos\alpha + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)}, \cos\vartheta_1 = \frac{\cos A + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})}\right.$.

Die geometrische Bedeutung der Grössen $\Theta$ und $\vartheta$ leuchtet von selbst ein. Eben so lässt sich aber auch den Grössen $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ $A\ A'\ A''$ u. s. w. eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Sind z. B. $a\ b\ c$ die drei Grundkanten eines dreiseitigen Prisma und $a_1, b_1, c_1$ die zu denselben gehörigen Höhen der Seitenparallelogramme des Prisma, so sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die diesen letzteren der Reihe nach gegenüberliegenden Keile der Seitenflächen u. s. w.

Das Vorstehende wird genügen, auf die trigonometrischen Relationen, welche das Tetraeder darbietet, aufmerksam zu machen. Die hier mitgetheilten Ausdrücke reichen bereits zur Lösung einer grossen Menge von Aufgaben hin, und sind dabei im Ganzen sehr elegant. Ihre Ableitung ist übrigens nicht gerade schwierig, auf dem gewöhnlichen Wege jedoch zum grössten Theil höchst umständlich und langweilig. Ich habe dieselben auf eine sehr schnelle Weise mittelst ein Paar allgemeiner Theoreme der Trigonometrie gefunden, die, so viel ich weiss, noch gänzlich unbekannt sind und von mir an einem anderen Orte werden mitgetheilt werden.

---

# II.

## Weitere Berechnung verschiedener auf das Kreisverhältniss $\pi$ begründeter Zahlen.

Von dem

**Herrn Professor Dr. G. Paucker**

zu Mitau.

---

Das umgekehrte Kreisverhältniss $\frac{1}{\pi}$ ist von Euler Introd. in Anal. Infin. I. §. 198 auf 36 Stellen angegeben. Nur ist daselbst die 25ste Stelle durch einen Druckfehler unrichtig, und statt 9 muss man 5 lesen. Hier folgt diese Zahl auf 140 Stellen, nach dem Vegaschen Werthe von $\pi$ berechnet.

Der Durchmesser des Kreises ist gleich dem Umfange multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$, auch ist die Oberfläche der Kugel gleich dem Quadrate des Umfangs multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$.

Digitized by Google

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ 8618379\ 0671537\ 7675267$
$4502872\ 4068919\ 2914809\ 1289749$
$5334688\ 1177935\ 9526845\ 3070180$
$2276055\ 3230617\ 1912145\ 6854535$
$1591607\ 3785823\ 6922291\ 5730277$

Die Kreisfläche ist gleich dem Quadrat des Durchmessers multiplicirt mit $\frac{1}{4}\pi$.

$\frac{1}{4}\pi = 0{,}7853981\ 6339744\ 8309615\ 6608458$
$1987572\ 1049292\ 3498437\ 76$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus des Durchmessers multiplicirt mit $\frac{1}{6}\pi$.

$\frac{1}{6}\pi = 0{,}5235987\ 7559829\ 8873077\ 1072305$
$4658381\ 4032861\ 5665625\ 17$

Die Kreisfläche ist gleich dem Quadrat des Umfangs multiplicirt mit $\frac{1}{4\pi}$.

$\frac{1}{4\pi} = 0{,}0795774\ 7154594\ 7667884\ 4418816$
$8625718\ 1017229\ 8228702\ 28$

Das Quadrat des Verhältnisses des Durchmessers zum Umfange ist

$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013211\ 8364233\ 7771443\ 8794632$
$0972763\ 8904358\ 7746722\ 46$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus des Umfangs multiplcirt mit $\frac{1}{6\pi^2}$.

$\frac{1}{6\pi^2} = 0{,}0168868\ 6394038\ 9628573\ 9799105$
$3495460\ 6484059\ 7957787\ 07$

Der Umfang der Kugel ist gleich der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\sqrt{\pi}$.

$\sqrt{\pi} = 1{,}7724538\ 5090551\ 6027298\ 1674833$
$4114518\ 2797549\ 4561223\ 8712821$
$3807789\ 8529112\ 8459103\ 2181374$
$9506567\ 3854466\ 5416226\ 8236242$
$8257066\ 6236152\ 8657244\ 2261088$

Der Durchmesser der Kugel ist gleich der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5641895\ 8354775\ 6286948\ 0794515$
$6077258\ 5844050\ 6293289\ 9885684$
$4085721\ 709$

Der Umfang des Kreises ist gleich der Quadratwurzel der Kreisfläche multiplicirt mit $2\sqrt{\pi}$.

$2\sqrt{\pi} = 3{,}5449077\ 0181103\ 2054596\ 3349666$
$8229036\ 5595098\ 9122447\ 74$

Digitized by Google

Der Durchmesser des Kreises ist gleich der Quadratwurzel der Kreisfläche multiplicirt mit $2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

$$2\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1{,}1283791\ 6709551\ 2573896\ 1589031\ 2154517\ 1688101\ 2586579\ 9771368\ 8171443\ 418$$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{\pi}} = 0{,}0940315\ 9725795\ 9381158\ 0132419\ 2679543\ 0974008\ 4382214\ 9980947\ 4014286\ 951$$

$$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171205\ 9283213\ 9658891\ 2117563\ 2726050\ 2428210\ 4631412\ 1967148$$

$$\sqrt[3]{36} = 3{,}3019272\ 4889462\ 6683874\ 6099524\ 0908495\ 6846884\ 6443184\ 9333697$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4645918\ 8756152\ 3263020\ 1425272\ 6379039\ 1738596\ 8556279\ 37$$

$$\sqrt[3]{\pi^2} = 2{,}1450293\ 9711102\ 5600077\ 4441009\ 4123559\ 7486667\ 3654715\ 56$$

Der Durchmesser der Kugel ist gleich der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}2407009\ 8179880\ 0033336\ 0136240\ 9555633\ 4701572\ 4003720\ 0$$

Der Umfang der Kugel ist gleich der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{6\pi^2}$.

$$\sqrt[3]{6\pi^2} = 3{,}8977770\ 8972075\ 3958963\ 4709177\ 9985674\ 4015612\ 2958390\ 56$$

Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Quadrat der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{36\pi}$.

$$\sqrt[3]{36\pi} = 4{,}8359758\ 6204940\ 8922150\ 9005399\ 1785481\ 6833842\ 2169715\ 85$$

Digitized by Google

# III.

## Neue Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln.

Vom

Herausgeber.

---

Die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln, welche ich in diesem kleinen Aufsatze mittheilen werde, scheint noch nicht bekannt zu sein, empfiehlt sich aber durch die Kürze und Leichtigkeit der Rechnung, welche dieselbe in Anspruch nimmt, und durch andere Vorzüge vor den sonst gewöhnlichen Methoden gar sehr.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung sei

$$x^2 - mx + n = 0.$$

Unter der vorläufigen Voraussetzung nun, dass beide Wurzeln reell sind, können wir dieselben unter der Form tang $\varphi$ und tang $\varphi_1$ darstellen. Dann ist bekanntlich

$$\text{tang } \varphi + \text{tang } \varphi_1 = m, \quad \text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi_1 = n.$$

Weil, wie die Goniometrie lehrt,

$$\text{tang } (\varphi + \varphi_1) = \frac{\text{tang } \varphi + \text{tang } \varphi_1}{1 - \text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi_1}$$

ist; so ist

$$\text{tang } (\varphi + \varphi_1) = \frac{m}{1-n}, \quad \text{cot } (\varphi + \varphi_1) = \frac{1-n}{m}.$$

Ferner ist

$$1 + \text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi_1 = \frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{\cos \varphi \cos \varphi_1} = 1 + n,$$

$$\text{tang } \varphi + \text{tang } \varphi_1 = \frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\cos \varphi \cos \varphi_1} = m;$$

woraus sich durch Division

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi + \varphi_1)} = \frac{1+n}{m}, \quad \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{1+n}{m} \sin(\varphi + \varphi_1)$$

ergiebt. Also hat man zur Berechnung von $\varphi$ und $\varphi_1$ die beiden Gleichungen

$$\text{tang } (\varphi + \varphi_1) = \frac{m}{1-n}, \quad \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{1+n}{m} \sin(\varphi + \varphi_1)$$

oder

Digitized by Google

$$\cot(\varphi+\varphi_1)=\frac{1-n}{m},\ \cos(\varphi-\varphi_1)=\frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi_1).$$

Hat man nämlich mittelst dieser Formeln $\varphi+\varphi_1$ und $\varphi-\varphi_1$ gefunden, so erhält man $\varphi$ und $\varphi_1$ auf bekannte Weise mittelst der Ausdrücke

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1),\ \ \varphi_1=\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1).$$

Wir haben oben gesagt, dass wir von der vorläufigen Voraussetzung, dass beide Wurzeln der aufzulösenden Gleichung reell seien, ausgehen wollten, bemerken aber, dass man bei der wirklichen Rechnung diese Voraussetzung gar nicht zum Grunde zu legen braucht, indem die Auflösung selbst jederzeit ein Kriterium enthält, mittelst dessen man mit grösster Leichtigkeit entscheiden kann, ob die beiden gesuchten Wurzeln reell sind oder nicht.

Wenn nämlich der absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$, welchen man durch die obige Auflösung findet, nicht grösser als die Einheit ist, so sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung offenbar beide reell, wie die Auflösung selbst zeigt.

Wenn aber der in Rede stehende absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ die Einheit übersteigt, so sind die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung imaginär, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Wendet man auf die gegebene quadratische Gleichung die gewöhnliche algebraische Auflösung an, so erhält man

$$x=\tfrac{1}{2}m\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2-n}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\cos(\varphi-\varphi_1)^2=\frac{(1+n)^2}{m^2}\sin(\varphi+\varphi_1)^2,$$

$$\sin(\varphi+\varphi_1)^2=\frac{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)^2}{1+\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)^2}=\frac{m^2}{m^2+(1-n)^2},$$

und folglich

$$\cos(\varphi-\varphi_1)^2=\frac{(1+n)^2}{m^2+(1-n)^2}.$$

Ist nun der absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ grösser als die Einheit, so ist

$$\frac{(1+n)^2}{m^2+(1-n)^2}>1,$$

also

$$(1+n)^2>m^2+(1-n)^2 \text{ oder } m^2+(1-n)^2-(1+n)^2<0,$$

woraus sich, wenn man die Quadrate von $1-n$ und $1+n$ entwickelt, sogleich

$$m^2-4n<0 \text{ oder } \tfrac{1}{4}m^2-n<0$$

ergiebt, und folglich mittelst des Obigen erhellet, dass die beiden Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung imaginär sind, wie behauptet wurde.

Sind aber die beiden Wurzeln imaginär, so stellt man dieselben am besten unter der Form

$$\varrho\,(\cos\Theta\pm\sin\Theta\sqrt{-1})$$

dar, welches bekanntlich immer möglich ist. Dann ist

$$x^2-mx+n=(x-\varrho\cos\Theta-\varrho\sin\Theta\sqrt{-1})\,(x-\varrho\cos\Theta+\varrho\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

d. i.

Digitized by Google

$x^2 - mx + n = (x - \varrho\cos\Theta)^2 + \varrho^2\sin\Theta^2 = x^2 - 2\varrho x\cos\Theta + \varrho^2$,
und folglich

$$\varrho^2 = n,\ 2\varrho\cos\Theta = m,$$

also

$$\varrho = \sqrt{n},\ \cos\Theta = \frac{m}{2\varrho} = \frac{m}{2\sqrt{n}};$$

mittelst welcher Formeln man $\varrho$ und $\Theta$ leicht berechnen kann. Da man indess vorzüglich die Grössen $\varrho\cos\Theta$ und $\varrho\sin\Theta$ zu kennen wünscht, so kann man die Formeln auch zweckmässig unter der Form

$$\cos\Theta = \frac{m}{2\sqrt{n}},\ \varrho\cos\Theta = \tfrac{1}{2}m,\ \varrho\sin\Theta = \sin\Theta\,.\sqrt{n}$$

darstellen, unter welcher sie eine sehr bequeme Rechnung gestatten, wie sogleich in die Augen fallen wird.

Hat man die allgemeine Gleichung

$$\varkappa x^2 - \lambda x + \mu = 0$$

aufzulösen, so ist im Vorhergehenden

$$m = \frac{\lambda}{\varkappa},\ n = \frac{\mu}{\varkappa}$$

zu setzen, wodurch man leicht

$$\text{tang}\,(\varphi + \varphi_1) = \frac{\lambda}{\varkappa - \mu},\ \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda}\sin(\varphi + \varphi_1)$$

oder

$$\cot(\varphi + \varphi_1) = \frac{\varkappa - \mu}{\lambda},\ \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda}\sin(\varphi + \varphi_1)$$

erhält. Das Kriterium, mittelst dessen sich entscheiden lässt, ob die Wurzeln beide reell oder imaginär sind, ist dasselbe wie oben.

Sind die beiden Wurzeln imaginär, so hat man zu ihrer Berechnung die Formeln

$$\cos\Theta = \frac{\lambda}{2\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}},\ \varrho\cos\Theta = \frac{\lambda}{2\varkappa},\ \varrho\sin\Theta = \sin\Theta\,.\sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}}.$$

Um die im Vorhergehenden entwickelte Methode auf ein Beispiel anzuwenden, sei die Gleichung

$$7{,}285\,x^2 + 19{,}749\,x - 115{,}638 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

| | |
|---|---|
| $\varkappa =$ | 7,285 |
| $\lambda =$ | − 19,749 |
| $\mu =$ | − 115,638 |
| $\varkappa - \mu =$ | 122,923 |
| $\varkappa + \mu =$ | − 108,352 |
| $\log(\varkappa - \mu) =$ | 2,0896332 |
| $\log(\varkappa + \mu) =$ | 2,0348409 $n$ |
| $cd\log\lambda =$ | 8,7044549 $n$ |
| $\log\cot(\varphi + \varphi_1) =$ | 10,7940881 $n$ |
| $\log\sin(\varphi + \varphi_1) =$ | 9,2003780 $n$ |
| $\log\cos(\varphi - \varphi_1) =$ | 9,9396738 $n$ |
| $\varphi + \varphi_1 =$ | − 9°. 7′. 38″,03 |
| $\varphi - \varphi_1 =$ | 150. 29. 40.75 |
| $2\varphi =$ | 141. 22. 2,72 |
| $2\varphi_1 =$ | − 159. 37. 18,78 |

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \varphi &= 70°.\ 41'.\ 1'',36 \\ \varphi_1 &= -\ 79.\ 48.\ 39,39 \\ \log \operatorname{tang} \varphi &= 0,4552944 \\ \log \operatorname{tang} \varphi_1 &= 0,7453764\ n \\ \operatorname{tang} \varphi &= 2,852952 \\ \operatorname{tang} \varphi_1 &= -\ 5,563863 \end{aligned}$$

Diese beiden Werthe von tang $\varphi$ und tang $\varphi_1$ sind die gesuchten Wurzeln. Zur Probe hat man

$$\operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \varphi_1 = 2,710911 \text{ und } \frac{\lambda}{\varkappa} = 2,710913.$$

Die Leichtigkeit und Kürze der obigen Rechnung wird einem Jeden sogleich von selbst in die Augen fallen. Wenn $\varphi - \varphi_1$ der Null sehr nahe kommt, so kann $\varphi - \varphi_1$ mittelst der Formel

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin(\varphi + \varphi_1)$$

bekanntlich nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden. In einem solchen Falle kann man sich aber auf folgende Art helfen Man berechne den Hülfswinkel $\psi$ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin(\varphi + \varphi_1).$$

Dann ist

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \operatorname{tang} \psi,$$

und folglich

$$1 - \cos(\varphi - \varphi_1) = 1 - \operatorname{tang} \psi,\ 1 + \cos(\varphi - \varphi_1) = 1 + \operatorname{tang} \psi;$$

also

$$\frac{1 - \cos(\varphi - \varphi_1)}{1 + \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi},$$

d. i. nach bekannten Formeln

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)^2 = \operatorname{tang}(45° - \psi),$$

$$\text{also } \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\operatorname{tang}(45° - \psi)}.$$

In diesem Falle sind folglich die Formeln, durch welche die Aufgabe aufgelöst wird,

$$\operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1) = \frac{\lambda}{\varkappa - \mu},\ \operatorname{tang} \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin(\varphi + \varphi_1),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\operatorname{tang}(45° - \psi)}$$

oder

$$\cot(\varphi + \varphi_1) = \frac{\varkappa - \mu}{\lambda},\ \operatorname{tang} \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin(\varphi + \varphi_1),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\operatorname{tang}(45° - \psi)},$$

und die Rechnung wird nun allerdings etwas, aber doch nicht bedeutend weitläufiger.

Auf Gleichungen von der Form

$$\frac{a + bx}{a_1 + b_1 x} = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha_1 + \beta_1 x}$$

wird man bekanntlich häufig bei der Auflösung von Aufgaben geführt, und diese Gleichungen führen, gehörig entwickelt, jederzeit zu einer quadratischen Gleichung, nämlich im vorliegenden Falle zu der Gleichung

$$(b\beta_1 - b_1\beta)\, x^2 + \{(a\beta_1 - a_1\beta) - (b\alpha_1 - b_1\alpha)\}\, x + a\alpha_1 - a_1\alpha = 0.$$

Digitized by Google

Wendet man nun auf diese Gleichung die obige Auflösungsmethode an, so erhält man zur Bestimmung der Winkel $\varphi$ und $\varphi_1$ die Formeln

$$\cot(\varphi+\varphi_1) = -\frac{(b\beta_1 - b_1\beta) - (a\alpha_1 - a_1\alpha)}{(a\beta_1 - a_1\beta) + (b\alpha_1 - b_1\alpha)},$$

$$\cos(\varphi-\varphi_1) = -\frac{(b\beta_1 - b_1\beta) + (a\alpha_1 - a_1\alpha)}{(a\beta_1 - a_1\beta) + (b\alpha_1 - b_1\alpha)} \sin(\varphi+\varphi_1),$$

mittelst welcher sich also die Winkel $\varphi$ und $\varphi_1$, und folglich auch die beiden Wurzeln tang $\varphi$ und tang $\varphi_1$ unmittelbar aus den acht gegebenen Coefficienten $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ und $a_1$, $b_1$, $\alpha_1$, $\beta_1$ berechnen lassen. Die Berechnung der Grössen

$$a\alpha_1 - a_1\alpha,\ b\beta_1 - b_1\beta,\ a\beta_1 - a_1\beta,\ b\alpha_1 - b_1\alpha$$

könnte man sich noch durch die Einführung von Hülfswinkeln erleichtern, wobei wir aber hier nicht länger verweilen, da sich die zweckmässigste Methode einem Jeden leicht von selbst darbieten wird.

---

# IV.

## Ampère's Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Nach Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. T. IX. p. 147 frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

---

Die gegebene von ihrem zweiten Gliede schon befreite Gleichung des vierten Grades sei

$$1.\quad x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

und $p$, $q$, $r$, $s$ seien die vier Wurzeln dieser Gleichung, so hat man bekanntlich die vier folgenden Gleichungen:

$$2.\quad p+q+r+s=0,$$

$$3.\quad pq+pr+ps+qr+qs+rs=a,$$

$$4.\quad pqr+pqs+prs+qrs=-b,$$

$$5.\quad pqrs=c.$$

Aus den Gleichungen 2. und 3. erhält man leicht:

$$6.\quad r+s=-(p+q),$$

$$7.\quad pq+rs=a-(p+q)(r+s);$$

Digitized by Google

und folglich, wenn man den Werth von $r+s$ aus der Gleichung 6. in die Gleichung 7. einführt:

$$8.\quad pq+rs=a+(p+q)^2.$$

Ferner ist nach 4.

$$pq(r+s)+rs(p+q)=-b,$$

und folglich wegen der Gleichung 6.

$$(p+q)(pq-rs)=b,$$

oder

$$9.\quad pq-rs=\frac{b}{(p+q)}.$$

Nach 8. und 9. ist nun

$$(pq+rs)^2=\{a+(p+q)^2\}^2,\quad (pq-rs)^2=\frac{b^2}{(p+q)^2},$$

und folglich, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt,

$$4pqrs=\{a+(p+q)^2\}^2-\frac{b^2}{(p+q)^2};$$

also nach der Gleichung 5.

$$4c=\{a+(p+q)^2\}^2-\frac{b^2}{(p+q)^2},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$10.\quad (p+q)^6+2a(p+q)^4+(a^2-4c)(p+q)^2-b^2=0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $(p+q)^2$ als unbekannte Grösse vom dritten Grade, und $(p+q)^2$ lässt sich also mittelst derselben durch Auflösung einer Gleichung des dritten Grades bestimmen. Bezeichnen wir nun eine Wurzel dieser Gleichung des dritten Grades durch $\mu$, so können wir $(p+q)^2=\mu$, und folglich

$$11.\quad p+q=\pm\sqrt{\mu},$$

also nach 6. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$12.\quad r+s=\mp\sqrt{\mu}$$

setzen.

Nach 8., 9. und 11. ist nun

$$pq+rs=a+\mu,\quad pq-rs=\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

also

$$2pq=a+\mu\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},\quad 2rs=a+\mu\mp\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

und wir haben jetzt folglich zur Bestimmung von $p$ und $q$ die beiden Gleichungen

$$13.\quad p+q=\pm\sqrt{\mu},\ 2pq=a+\mu\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

und zur Bestimmung von $r$ und $s$ die beiden Gleichungen

$$14.\quad r+s=\mp\sqrt{\mu},\ 2rs=a+\mu\mp\frac{b}{\sqrt{\mu}}.$$

Aus den beiden Gleichungen 13. ergiebt sich leicht

$$p+q=\pm\sqrt{\mu},\ (p-q)^2=-\mu-2(a\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}}),$$

und folglich entweder



Digitized by Google

$$p+q=\sqrt{\mu},\ p-q=\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$p+q=-\sqrt{\mu},\ p-q=\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)};$$

also entweder

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},\ 2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$2p=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},\ 2q=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Aus den Gleichungen 14. ergiebt sich ganz ebenso respective

$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},\ 2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$2r=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},\ 2s=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Also sind die doppelten Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades entweder

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)};$$

oder

$$2p=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2q=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2r=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2s=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Da nun aber das zweite System von dem ersten offenbar nicht verschieden ist, so sind die doppelten Wurzeln

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Aber auch die obern und untern Vorzeichen in diesen Formeln liefern nicht zwei verschiedene Systeme von Wurzeln, und die doppelten Wurzeln unserer Gleichung sind also

Digitized by Google

$$2p = \sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2q = \sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2r = -\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2s = -\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Folglich sind die vier Wurzeln unserer gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$p = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\},$$
$$q = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\},$$
$$r = -\tfrac{1}{2}\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\},$$
$$s = -\tfrac{1}{2}\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\}.$$

Weil jede cubische Gleichung bekanntlich mindestens eine reelle Wurzel hat, so kann man immer annehmen, dass $\mu$ eine reelle Grösse ist.

# V.

## Ueber die Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

Nach einer Abhandlung des Herrn Abbé Moigno in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. Fevrier 1840. p. 73. frei bearbeitet von dem

Herausgeber.

### A.

### Einige vorbereitende Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen und von den Gleichungen.

§. 1.

*Erklärung.* Wenn man jedes Glied einer ganzen rationalen algebraischen Function der veränderlichen Grösse $x$ mit dem



Digitized by Google

Exponenten der in demselben enthaltenen Potenz von $x$ multiplicirt, und diesen Exponenten der Potenz von $x$ selbst um eine Einheit vermindert; so heisst die auf diese Weise aus der gegebenen Function erhaltene oder abgeleitete Function die erste derivirte Function der gegebenen Function, und soll, wenn $f(x)$ das Symbol der gegebenen Function ist, durch $f'(x)$ bezeichnet werden. Für

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

ist also, wenn man sich, wie dies in allen Fällen erforderlich ist, das erste constante Glied $a_0$ unter der Form $a_0 x^0$ dargestellt denkt, die erste derivirte Function

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1},$$

und diese erste derivirte Function ist also immer eine ganze rationale algebraische Function von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als die gegebene ganze rationale algebraische Function.

Die erste derivirte Function von $f'(x)$, ganz auf dieselbe Weise genommen wie vorher, heisst die zweite derivirte Function der gegebenen Function $f(x)$ und wird durch $f''(x)$ bezeichnet. Die erste derivirte Function von $f''(x)$ heisst die dritte derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f'''(x)$ bezeichnet. Die erste derivirte Function von $f'''(x)$ heisst die vierte derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f''''(x)$ bezeichnet. Ueberhaupt heisst die erste derivirte Function der $(k-1)$sten derivirten Function von $f(x)$ die $k$te derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f^{(k)}(x)$ bezeichnet.

§. 2.

*Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, und, indem $C$ eine beliebige constante Grösse bezeichnet, $F(x) = Cf(x)$ ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = Cf'(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$F(x) = a_0 C + a_1 Cx + a_2 Cx^2 + a_3 Cx^3 + \ldots + a_n Cx^n;$$

so ist nach §. 1.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1},$$
$$F'(x) = a_1 C + 2a_2 Cx + 3a_3 Cx^2 + \ldots + na_n Cx^{n-1},$$

also

$$F'(x) = C(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}),$$

und folglich offenbar

$$F'(x) = Cf'(x),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

*Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$

Digitized by Google

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_\varkappa x^\varkappa,$$

wobei wir annehmen wollen, dass $n \geqq \varkappa$ sei; so ist nach §. 1.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1},$$
$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + \varkappa a_\varkappa x^{\varkappa-1},$$

und folglich

$$f'(x) + \varphi'(x)$$
$$= a_1 + a_1 + 2(a_2 + a_2)x + 3(a_3 + a_3)x^2 + \ldots + \varkappa(a_\varkappa + a_\varkappa)x^{\varkappa-1}$$
$$+ (\varkappa+1)a_{\varkappa+1}x^\varkappa + (\varkappa+2)a_{\varkappa+2}x^{\varkappa+1} + \ldots + na_n x^{n-1}.$$

Weil nun

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$
$$= a_0 + a_0 + (a_1 + a_1)x + (a_2 + a_2)x^2 + \ldots + (a_\varkappa + a_\varkappa)x^\varkappa$$
$$+ a_{\varkappa+1}x^{\varkappa+1} + a_{\varkappa+2}x^{\varkappa+2} + \ldots + a_n x^n$$

ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes unmittelbar mittelst §. 1.

## §. 4.

*Erster Zusatz.* Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, u. s. w. ganze rationale algebraische Functionen sind und

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \chi(x) + \ldots.$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x) + \psi'(x) + \chi'(x) + \ldots.$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich sehr leicht durch eine successive Anwendung des vorigen Lehrsatzes.

## §. 5.

*Zweiter Zusatz.* Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind und

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x).$$

Nach der Voraussetzung und nach §. 3. ist

$$f(x) = F(x) + \varphi(x), \quad f'(x) = F'(x) + \varphi'(x),$$

also

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x),$$

wie behauptet wurde.

## §. 6.

*Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, und, indem $\mu$ eine positive ganze Zahl bezeichnet, $F(x) = x^\mu f(x)$ ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = x^\mu f'(x) + \mu x^{\mu-1} f(x).$$

Beweis. Es sei

Digitized by Google

$$f(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots + a_n\ x^n,$$

so ist nach der Voraussetzung

$$F(x) = a_0\ x^\mu + a_1\ x^{\mu+1} + a_2\ x^{\mu+2} + \ldots + a_n\ x^{\mu+n},$$

und folglich nach §. 1.

$$F'(x) = \mu a_0\ x^{\mu-1} + (\mu+1)a_1\ x^\mu + (\mu+2)a_2\ x^{\mu+1} + \ldots + (\mu+n)a_n\ x^{\mu+n-1}$$

$$= x^\mu(a_1 + 2a_2\ x + 3a_3\ x^2 + \ldots + na_n\ x^{n-1}) + \mu x^{\mu-1}(a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots + a_n x^n),$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

## §. 7.

*Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und

$$F(x) = f(x)\ \varphi(x)$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f(x)\ \varphi'(x) + \varphi(x)\ f'(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$F(x) = a_0\ \varphi(x) + a_1 x\varphi(x) + a_2\ x^2\varphi(x) + \ldots + a_n\ x^n\varphi(x);$$

so ist nach §. 4., §. 2. und §. 6.

$$F'(x) = a_0\ \varphi'(x) + a_1\ \{x\varphi'(x) + 1\varphi(x)\} + a_2\ \{x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\} + a_3\ \{x^3\varphi'(x) + 3x^2\varphi(x)\}$$

u. s. w.

$$+ a_n\ \{x^n\varphi'(x) + nx^{n-1}\varphi(x)\}$$

$$= (a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots + a_n\ x^n)\ \varphi'(x) + (a_1 + 2a_2\ x + 3a_3\ x^2 + \ldots + na_n\ x^{n-1})\ \varphi(x),$$

woraus mittelst §. 1. der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

## §. 8.

*Erster Zusatz.* Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und

$$F(x) = f(x)\ \varphi(x)$$

ist; so ist jederzeit

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus §. 7., wenn man auf beiden Seiten der dort bewiesenen Gleichung durch $F(x) = f(x)\ \varphi(x)$ dividirt.

## §. 9.

*Zweiter Zusatz.* Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, ... ganze rationale algebraische Functionen sind, und

$$F(x) = f(x)\ \varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x) \ldots\ldots$$

Digitized by Google

ist; so ist jederzeit

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht durch eine successive Anwendung des unmittelbar vorhergehenden Satzes.

## §. 10.

*Lehrsatz.* Unter der Voraussetzung, dass $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet, sei $\varphi_n(x) = (x+a)^n$; so ist jederzeit

$$\varphi'_n(x) = n(x+a)^{n-1}.$$

Beweis. Weil

$$(x+a)^n = (x+a)\ (x+a)^{n-1},$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$\varphi_n(x) = (x+a)\ \varphi_{n-1}\ (x),$$

und nach §. 1. die erste derivirte Function von $x+a$ der Einheit gleich ist; so ist nach §. 7.

$$\varphi'_n(x) = (x+a)\ \varphi'_{n-1}(x) + \varphi_{n-1}(x)$$

oder

$$\varphi'_n(x) = (x+a)\ \{\varphi'_{n-1}(x) + \varphi_{n-2}(x)\}.$$

Durch successive Anwendung dieser Relation erhält man

$$\varphi'_1(x) = 1 \qquad\qquad = 1(x+a)^0,$$
$$\varphi'_2(x) = (x+a)\ \{\varphi'_1(x) + \varphi_0(x)\} = 2(x+a)^1,$$
$$\varphi'_3(x) = (x+a)\ \{\varphi'_2(x) + \varphi_1(x)\} = 3(x+a)^2,$$
$$\varphi'_4(x) = (x+a)\ \{\varphi'_3(x) + \varphi_2(x)\} = 4(x+a)^3,$$
$$\varphi'_5(x) = (x+a)\ \{\varphi'_4(x) + \varphi_3(x)\} = 5(x+a)^4,$$

u. s. w.

Also ist offenbar für jedes positive ganze $n$

$$\varphi'_n(x) = n(x+a)^{n-1},$$

wie bewiesen werden sollte.

## §. 11.

*Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von $x$ ist, und also $f(x+a)$ die ganze rationale algebraische Function von $x$ bezeichnet, welche man aus $f(x)$ erhält, wenn man $x+a$ für $x$ setzt; so wird die erste derivirte Function von $f(x+a)$ in Bezug auf $x$ als veränderliche Grösse erhalten, wenn man in der ersten derivirten Function $f'(x)$ von $f(x)$ für $x$ die Grösse $x+a$ setzt.

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots + a_n\ x^n,$$

und folglich

$$f'(x) = a_1 + 2a_2\ x + 3a_3\ x^2 + \ldots + na_n\ x^{n-1}.$$

Setzen wir nun $f(x+a) = \varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\ (x+a) + a_2\ (x+a)^2 + a_3\ (x+a)^3 + \ldots + a_n\ (x+a)^n,$$

Digitized by Google

und folglich nach §. 4., §. 2. und §. 10.

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2(x+a) + 3a_3(x+a)^2 + \ldots + na_n(x+a)^{n-1}.$$

Weil nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar aus dem obigen $f'(x)$ erhalten wird, wenn man $x+a$ für $x$ setzt, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Anmerkung. Vermöge dieses Satzes ist man berechtigt, die erste derivirte Function von $f(x+a)$ in Bezug auf $x$ als veränderliche Grösse durch $f'(x+a)$ zu bezeichnen.

## §. 12.

Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

ist, so ist nach §. 1.

$$f'(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2},$$
$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3},$$
$$f''''(x) = 1.2.3.4a_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)na_n x^{n-4},$$

u. s. w.

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1} + 2.3.4\ldots na_n x,$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2.3.4\ldots na_n,$$

woraus sich zugleich der Satz ergiebt, dass die $n$te derivirte Function einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades eine constante Grösse ist, und alle folgenden derivirten Function daher verschwinden, weil die derivirten Functionen einer jeden constanten Grösse $C$, die man immer unter der Form $Cx^0$ darstellen kann, natürlich sämmtlich verschwinden.

Setzt man nun aber in den sämmtlichen obigen Gleichungen $x=0$; so erhält man

$$f(0) = a_0,$$
$$f'(0) = 1a_1,$$
$$f''(0) = 1.2a_2,$$
$$f'''(0) = 1.2.3a_3,$$

u. s. w.

$$f^{(n-1)}(0) = 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1},$$
$$f^{(n)}(0) = 1.2.3.4\ldots na_n,$$

und folglich

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1},\ a_2 = \frac{f''(0)}{1.2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3},\ \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}.$$

Also ist

$$1.\ f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}x^n,$$

welches ein sehr merkwürdiger Ausdruck einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades ist.

Digitized by Google

Setzt man $f(x+i)=\varphi(i)$, so ist nach dem so eben bewiesenen Satze, weil $\varphi(i)$ offenbar eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $i$ ist,

$$f(x+i)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}i+\frac{\varphi''(0)}{1.2}i^2+\frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{1\ldots n}i^n.$$

Durch successive Anwendung des in §. 11. bewiesenen Satzes erhält man

$$\begin{aligned}\varphi(i) &= f(x+i),\\ \varphi'(i) &= f'(x+i),\\ \varphi''(i) &= f''(x+i),\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\varphi^{(n)}(i)=f^{(n)}(x+i);$$

und folglich

$$\varphi(0)=f(x),\ \varphi'(0)=f'(x),\ \varphi''(0)=f''(x),\ \ldots\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(x).$$

Also ist nach dem Obigen

II. $$f(x+i)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n,$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige, und an Folgerungen sehr fruchtbare Formel ist.

## §. 13.

Um eine Anwendung der Formel II. in dem vorigen Paragraphen zu zeigen, sei $f(x)=x^n$, wo $n$ eine positive ganze Zahl sein soll, und folglich

$$f(x+i)=(x+i)^n.$$

Weil nun nach der Voraussetzung und nach §. 1.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^n,\\ f'(x) &= nx^{n-1},\\ f''(x) &= n(n-1)\,x^{n-2},\\ f'''(x) &= n(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3},\end{aligned}$$

u. s. w.

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots2.1$$

ist; so ist nach §. 12. II.

$$(x+i)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}i+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}i^3+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{n(n-1)\ldots2}{1\ldots(n-1)}xi^{n-1}+\frac{n(n-1)\ldots1}{1\ldots n}i^n,$$

welche Gleichung der analytische Ausdruck des Binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten ist.

## §. 14.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, wollen wir nun noch das allgemeine Gesetz der höhern derivirten Functionen der ganzen rationalen algebraischen Function

Digitized by Google

$$F(x) = f(x)\,\varphi(x)$$

entwickeln.

Wendet man auf diese Function die aus dem Obigen bekannten Regeln zur Entwickelung der derivirten Functionen an, so erhält man nach und nach:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f(x)\,\varphi'(x) + f'(x)\,\varphi(x),\\
F''(x) &= f(x)\,\varphi''(x) + f'(x)\,\varphi'(x)\\
&\qquad + f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x)\\
&= f(x)\,\varphi''(x) + 2f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x),\\
F'''(x) &= f(x)\varphi'''(x) + 2f'(x)\,\varphi''(x) + f''(x)\,\varphi'(x)\\
&\qquad + f'(x)\,\varphi''(x) + 2f''(x)\,\varphi'(x) + f'''(x)\varphi(x)\\
&= f(x)\varphi'''(x) + 3f'(x)\varphi''(x) + 3f''(x)\varphi'(x) + f'''(x)\varphi(x),
\end{aligned}$$

u. s. w.

Ueberlegt man nun, dass

$$\begin{aligned}
x + i &= x + i,\\
(x+i)^2 &= x^2 + xi\\
&\qquad + xi + i^2\\
&= x^2 + 2xi + i^2,\\
(x+i)^3 &= x^3 + 2x^2 i + xi^2\\
&\qquad + x^2 i + 2xi^2 + i^3\\
&= x^3 + 3x^2 i + 3xi^2 + i^3,
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist; so wird man sich sogleich überzeugen, dass die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelungen der derivirten Functionen der Function $F(x)$ nach und nach ganz eben so entstehen, wie die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelungen der Potenzen von $x+i$. Daher sind die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelung von $F^{(x)}(x)$ einerlei mit den numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelung von $(x+i)^x$, und es ist also nach dem Obigen und nach §. 13. offenbar

$$\begin{aligned}
F^{(x)}(x) &= f(x)\,\varphi^{(x)}(x) + \frac{x}{1} f'(x)\,\varphi^{(x-1)}(x)\\
&\qquad + \frac{x(x-1)}{1.2} f''(x)\,\varphi^{(x-2)}(x)\\
&\qquad + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} f'''(x)\,\varphi^{(x-3)}(x)\\
&\qquad \text{u. s. w.}\\
&\qquad + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots 2.1}{1\ldots x} f^{(x)}(x)\,\varphi(x).
\end{aligned}$$

## §. 15.

Wenn man in der aus §. 12 bekannten Gleichung

$$f(x+i) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} i + \frac{f''(x)}{1.2} i^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n} i^n$$

Digitized by Google

für $x$ und $i$ respective $a$ und $x-a$ setzt; so wird dieselbe

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Ist nun unter der Voraussetzung, dass $m\leqq n$*) ist,

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots f^{(m-1)}(a)=0;$$

so ist

$$f(x)=\frac{(x-a)^m}{1\ldots m}f^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^{m+1}}{1..(m+1)}f^{(m+1)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

und folglich die Function $f(x)$ offenbar durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar.

Wenn umgekehrt die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades $f(x)$ durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar ist; so ist

$$f(x)=(x-a)^m\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von $x$ bezeichnet; und nach §. 14., §. 2. und §. 10 ist folglich, wenn nur $x$ nicht grösser als $m$ ist,

$$\begin{aligned}f^{(x)}(x)&=(x-a)^m\,\varphi^{(x)}(x)\\&+\frac{x}{1}\cdot m(x-a)^{m-1}\varphi^{(x-1)}(x)\\&+\frac{x(x-1)}{1.2}\cdot m(m-1)(x-a)^{m-2}\varphi^{(x-2)}(x)\\&+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\cdot m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}\varphi^{(x-3)}(x)\\&\qquad\text{u. s. w.}\\&+\frac{x(x-1)(x-2)..2.1}{1....x}\cdot m(m-1)..(m-x+1)(x-a)^{m-x}\varphi(x).\end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass die Entwickelungen der derivirten Functionen

$$f'(x),f''(x),f'''(x),\ldots.f^{(m-1)}(x)$$

in allen ihren Gliedern die Grösse $x-a$ als Factor enthalten, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass diese derivirten Functionen, so wie die Function $f(x)$ selbst, für $x=a$ sämmtlich verschwinden, oder dass

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots f^{(m-1)}(a)=0$$

ist.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich also der folgende Satz:

Wenn, unter der Voraussetzung, dass $m\leqq n$ ist,

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots\ f^{(m-1)}(a)=0$$

ist; so ist die Function $f(x)$ jederzeit durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar, und umgekehrt.

Aus diesem Satze ergiebt sich ferner unmittelbar, dass, wenn $f(x)$ durch keine höhere Potenz von $x-a$ als $(x-a)^m$ theilbar ist, nur

---

*) Weil, wenn $a_n$ der Coefficient des höchsten Gliedes der ganzen rationalen algebraischen Function $f(x)$ des $n$ten Grades ist, welcher also nicht verschwindet, bekanntlich $f^{(n)}(x)=1.2.3\ldots na_n$, und folglich auch $f^{(n)}(a)=1.2.3\ldots na_n$ ist; so ist nie $f^{(n)}(a)=0$.

Digitized by Google

$f(a)=0, f'(a)=0, f''(a)=0, \ldots f^{(m-1)}(a)=0,$

nicht auch $f^{(m)}(a)=0$ ist.

## §. 16.

*Lehrsatz.* Wenn die veränderliche Grösse $x$, von welcher die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades $f(x)$ mit lauter reellen Coefficienten abhängt, sich von $a$ bis $b$ stetig verändert; so verändert sich die Function $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig.

Beweis. Dass jede ganze rationale algebraische Function für jeden endlichen völlig bestimmten reellen Werth ihrer veränderlichen Grösse einen endlichen völlig bestimmten reellen Werth erhält, ist für sich klar.

Nach der Formel §. 12. II. ist allgemein

$$f(x+i)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n,$$

und

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

ist folglich die Veränderung, welche $f(x)$ erleidet, wenn $x$ sich um $i$ ändert. Bezeichnen wir nun den absoluten Werth derjenigen unter den Grössen

$$\frac{f'(x)}{1}, \frac{f''(x)}{1.2}, \frac{f'''(x)}{1.2.3}, \cdots \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n},$$

welche den grössten absoluten Werth haben*), durch $V$, und den absoluten Werth von $i$ durch $i_1$; so ist der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

nicht grösser als

$$V(i_1+i_1{}^2+i_1{}^3+\ldots+i_1{}^n),$$

d. i. nicht grösser als

$$Vi_1(1+i_1+i_1{}^2+i_1{}^3+\ldots+i_1{}^{n-1})=V\frac{i_1(1-i_1{}^n)}{1-i_1}.$$

Nehmen wir nun, was offenbar verstattet ist, $i_1$ kleiner als die Einheit; so ist

$$V\frac{i_1(1-i_1{}^n)}{1-i_1}<\frac{Vi_1}{1-i_1},$$

und folglich der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

kleiner als $\frac{Vi_1}{1-i_1}$.

Bezeichnet jetzt $\mu$ eine beliebige positive Grösse, so ist die Bedingung

$$\frac{Vi_1}{1-i_1}<\mu$$

*) Mehrere dieser Grössen können gleiche Werthe, also auch mehrere den grössten absoluten Werth haben.

Digitized by Google

jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$Vi_1 < \mu(1-i_1)$$

erfüllt ist, und diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$(\mu+V)i_1 < \mu \text{ oder } i_1 < \frac{\mu}{\mu+V}$$

erfüllt ist. Nimmt man also

$$i_1 < \frac{\mu}{\mu+V},$$

und folglich, wie es nach dem Obigen erforderlich ist, auch $i_1<1$; so ist

$$\frac{Vi_1}{1-i_1} < \mu,$$

und nach dem Obigen folglich der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i + \frac{f''(x)}{1.2}i^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

kleiner als $\mu$. Da man nun die Grösse $\mu$ beliebig klein annehmen kann, so sieht man, dass die Grösse

$$\frac{f'(x)}{1}i + \frac{f'(x)}{1.2}i^2 + \frac{f''(x)}{1.2.3}i^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur $i$ nahe genug bei Null annimmt, und der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der veränderlichen Grösse $x$ führen also offenbar der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der Function $f(x)$ herbei.

Weil nun jedem endlichen völlig bestimmten reellen Werthe der veränderlichen Grösse $x$ ein endlicher völlig bestimmter Werth der Function $f(x)$ entspricht; weil ferner der Null unendlich nahe kommenden Veränderungen der veränderlichen Grösse $x$ der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der Function $f(x)$ entsprechen; weil endlich $f(a)$ und $f(b)$ die Werthe sind, welche die Function $f(x)$ für $x=a$ und $x=b$ erhält; so ist klar, dass die Function $f(x)$ sich von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig verändert, wenn die veränderliche Grösse $x$ sich von $a$ bis $b$ stetig verändert, wie bewiesen werden sollte.

## §. 17.

*Erster Zusatz.* Die ganze rationale algebraische Function

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

mit lauter reellen Coefficienten nähert sich der Grösse $a_0$ als ihrer Gränze, wenn $x$ sich der Null nähert, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $x$ nahe genug bei Null annimmt.

Da die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ für $x=0$ den Werth $a_0$ erhält, und sich nach dem vorigen Lehrsatze von $a_0$ an stetig verändert, wenn man sich $x$ von Null an stetig verändern lässt; so erhellet die Richtigkeit des Satzes mit völliger Deutlichkeit.

Digitized by Google

Weil weder $\varphi(a) = 0$, noch $F_2(a) = 0$ ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass auch $\varphi_2(a)$ nicht verschwindet.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen, so ist klar, dass $a$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, dass aber diese Gleichung die in Rede stehende Wurzel nur ein Mal enthält, und auf ganz ähnliche Art überzeugt man sich, dass auch jede der Grössen $b$, $c$, $d$, .... eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, dass aber diese Gleichung jede der in Rede stehenden Wurzeln nur ein Mal enthält.

Zeigen lässt sich nun auch noch ohne Schwierigkeit, dass die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ausser $a$, $b$, $c$, $d$, .... gar keine Wurzel weiter hat. Wäre nämlich $g$ eine nicht unter $a$, $b$, $c$, $d$, .... vorkommende Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$, und folglich $\varphi_1(g) = 0$; so müsste, weil nach dem Obigen

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) \cdot F_1(x)}{F(x)}$$

ist, offenbar auch

$$\varphi(g) \cdot F_1(g) = 0,$$

und folglich entweder $\varphi(g) = 0$ oder $F_1(g) = 0$ sein. Beides ist aber nicht möglich, weil die Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von $x$ zugleich verschwinden, und

$$F_1(g) = (g - a)\ (g - b)\ (g - c)\ (g - d) \ldots .$$

offenbar nicht verschwindet, weil die Grösse $g$ unter den Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, .... nicht vorkommt.

Man sieht also, dass jede der Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, .... eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi_1(x) = 0$$

ist, dass aber diese Gleichung jede der in Rede stehenden Wurzeln nur ein Mal enthält, und ausser denselben gar keine Wurzel hat.

Die Function $\varphi_1(x)$ ist der Quotient, welchen man erhält, wenn man $f(x)$ durch den grössten gemeinschaftlichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ dividirt, und man kann also nach dem Obigen aus jeder gegebenen Gleichung

$$f(x) = 0$$

immer leicht eine Gleichung ableiten, welche alle ungleichen Wurzeln dieser Gleichung nur ein Mal, und ausser denselben gar keine andere Wurzel weiter enthält.

Durch Auflösung der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ erhält man alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch in allen Fällen durch mehrmalige successive Division mit $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, .... in die Function $f(x)$ bestimmen können, wie oft die Gleichung $f(x) = 0$ jede dieser Wurzeln enthält.

Hiernach kann man bei der Auflösung der Gleichungen immer von der Voraussetzung ausgehen, dass alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich sind.

---

Digitized by Google

## B.

### Von dem Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen.

### §. 21.

*Erklärung.* Wenn die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, indem die veränderliche Grösse $x$ sich von $a$ bis $b$ stetig verändert, $n$ Mal unendlich wird und dabei von dem Negativen zum Positiven übergeht, und ausserdem $n'$ Mal unendlich wird und dabei von dem Positiven zum Negativen übergeht; so heisst die Differenz $n - n'$, welche wir durch $E$ bezeichnen, also $n - n' = E$ setzen wollen, der Excess *) der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ für die Gränzen $a$ und $b$.

Wenn $n' = 0$ ist, d. h. wenn zwischen den Gränzen $a$, $b$ die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird und ihr Zeichen ändert, immer vom Negativen zum Positiven übergeht, so ist $E = n$. Wenn $n = 0$ ist, d. h. wenn zwischen den Gränzen $a$, $b$ die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird und ihr Zeichen ändert, immer vom Positiven zum Negativen übergeht, so ist $E = -n'$.

Für gebrochene rationale algebraische Functionen, welche zwischen zwei bestimmten Gränzen niemals unendlich werden, ist der diesen Gränzen entsprechende Excess Null. Für eine gebrochene rationale algebraische Function, welche niemals unendlich wird, also z. B. für jede gebrochene rationale algebraische Function, deren Zähler durch ihren Nenner ohne Rest theilbar, und die also eigentlich eine ganze rationale algebraische Function ist, verschwindet der Excess für jede zwei ganz beliebige Gränzen.

### §. 22.

*Lehrsatz.* Für zwei absolut gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte gebrochene rationale algebraische Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ sind die, gleichen Gränzen entsprechenden Excesse jederzeit absolut gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt, oder die Summe dieser beiden Excesse ist gleich Null.

Beweis. Wir wollen annehmen, dass zwischen zwei gewissen Gränzen die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird,

*) Den Ausdruck exces gebraucht Herr Moigno nach Sturm und Liouville. Cauchy nennt dieselbe Grösse indice intégral.



Digitized by Google

$n$ Mal vom Negativen zum Positiven und $n'$ Mal vom Positiven zum Negativen übergehe; so geht zwischen denselben Gränzen die Function $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie unendlich wird, offenbar $n$ Mal vom Positiven zum Negativen und $n'$ Mal vom Negativen zum Positiven über, und nach §. 21. ist folglich $n-n'$ der Excess der ersten, $n'-n$ der Excess der zweiten Function. Weil nun $n'-n=-(n-n')$, oder $(n-n')+(n'-n)=0$ ist, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

## §. 23.

*Lehrsatz.* Wenn $E$ und $E'$ die Excesse der beiden gebrochenen rationalen algebraischen Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, deren zweite das Reciproke der ersten ist, für die Gränzen $a$, $b$ sind; so ist immer

$$E+E'=0, \text{ oder } E+E'=+1, \text{ oder } E+E'=-1,$$

jenachdem die beiden Gränzwerthe $\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)}$, $\frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$ der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ gleiche Vorzeichen haben, oder der erste dieser beiden Gränzwerthe negativ und der zweite positiv, oder der erste dieser Gränzwerthe positiv und der zweite negativ ist.

Beweis. Wir wollen annehmen, dass zwischen den Gränzen $a$, $b$ die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie unendlich wird, $n$ Mal vom Negativen zum Positiven und $n'$ Mal vom Positiven zum Negativen, dagegen die Function $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, indem sie unendlich wird, $n_1$ Mal vom Negativen zum Positiven und $n_1'$ Mal vom Positiven zum Negativen übergehe; so ist, wenn wir die den Gränzen $a$, $b$ entsprechenden Excesse unserer beiden Functionen durch $E$ und $E'$ bezeichnen,

$$E=n-n',\ E'=n_1-n_1'.$$

Beide Funtionen, welche für gleiche Werthe von $x$ offenbar immer gleiche Vorzeichen haben, können ihre Zeichen nur dann ändern, wenn sie entweder unendlich werden oder verschwinden. Da nun die erste Function offenbar immer dann verschwindet, wenn die zweite unendlich wird, so ist klar, dass zwischen den Gränzen $a$, $b$ die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie verschwindet, $n_1$ Mal vom Negativen zum Positiven und $n_1'$ Mal vom Positiven zum Negativen übergeht. Geht aber die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ zwischen den Gränzen $a$, $b$ vom Negativen zum Positiven überhaupt $\mu$ Mal, vom Positiven zum Negativen überhaupt $\mu'$ Mal über, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\mu=n+n_1,\ \mu'=n'+n_1',$$

und folglich

$$\mu-\mu'=(n-n')+(n_1-n_1'),$$

Digitized by Google

d. i. nach dem Obigen

$$E+E'=\mu-\mu'.$$

Haben nun die beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ gleiche Vorzeichen, so geht dieselbe zwischen den Gränzen $a$, $b$ offenbar eben so oft vom Negativen zum Positiven wie vom Positiven zum Negativen über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$\pm\mp\pm\mp\pm\mp\pm\mp\pm$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'$, also nach dem Obigen $E+E'=0$.

Wenn der erste der beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ negativ, der zweite positiv ist, so geht diese Function zwischen den Gränzen $a$, $b$ offenbar ein Mal öfter vom Negativen zum Positiven als vom Positiven zum Negativen über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$-+-+-+-+-+$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'+1$, also nach dem Obigen $E+E'=+1$.

Wenn endlich der erste der beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ positiv, der zweite negativ ist, so geht diese Function zwischen den Gränzen $a$, $b$ offenbar ein Mal öfter vom Positiven zum Negativen als vom Negativen zum Positiven über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$+-+-+-+-+-$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'-1$, also nach dem Obigen $E+E'=-1$.

Hierdurch ist nun unser Satz vollständig bewiesen.

## §. 24.

Wenn zwei Grössen $A$, $B$ gleiche Vorzeichen haben, so sagt man, dass ihre Vorzeichen eine Folge bilden; wenn dagegen zwei Grössen $A$, $B$ ungleiche Vorzeichen haben, so sagt man, dass ihre Vorzeichen einen Wechsel bilden. Dies vorausgesetzt, kann man nun den vorhergehenden wichtigen Lehrsatz auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn $E$ und $E'$ die Excesse der beiden gebrochenen rationalen algebraischen Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, de-



Digitized by Google

ren zweite das Reciproke der ersten ist, für die Gränzen $a$, $b$ sind; so ist immer

$$E+E'=0, \text{ oder } E+E'=+1, \text{ oder } E+E'=-1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ und $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ zugleich eine Folge oder zugleich einen Wechsel bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ einen Wechsel bilden.

## §. 25.

Wenn der Nenner $\varphi(x)$ der ganzen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ von einem niedrigern oder eben so hohen Grade als der Zähler ist; so kann man mit dem Nenner in den Zähler dividiren, und wird, wenn man den Quotienten durch $Q$, den Rest durch $\psi(x)$ bezeichnet, eine Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}=Q+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo nun der Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist, erhalten.

Die Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ werden zugleich unendlich, und für den Werthen von $x$, für welche die beiden in Rede stehenden Functionen unendlich werden, benachbarte Werthe von $x$ ist offenbar der absolute Werth der Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ grösser als der absolute Werth der ganzen rationalen algebraischen Function $Q$, welche immer einen endlichen Werth hat, so dass also für die in Rede stehenden Werthe von $x$ die Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ offenbar gleiche Vorzeichen haben, weil das Zeichen der Grösse $Q+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ bloss durch $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ bestimmt wird. Nimmt man alles dieses zusammen, so erhellet mit völliger Deutlichkeit, dass für dieselben Gränzen die Excesse der Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ einander gleich sind, und der Excess der erstern Function also immer durch die Berechnung des Excesses der letztern gefunden werden kann.

Hierdurch sind wir berechtigt, im Folgenden die Regeln für die Berechnung des Excesses der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen zwischen gegebenen Gränzen auf echte gebrochene rationale algebraische Functionen, deren Zähler von einem niedrigern Grade als ihre Nenner sind, einzuschränken.

## §. 26.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ eine echte, folglich $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ eine unechte gebrochene rationale algebraische Function sei,

Digitized by Google

und wollen wie oben die den Gränzen $a$, $b$ entsprechenden Excesse dieser beiden Functionen durch $E$ und $E'$ bezeichnen; so ist

$$E + E' = \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine nach den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Regeln immer mit völliger Sicherheit bestimmbare Grösse ist. Dividiren wir nun mit $\varphi_1(x)$ in $\varphi(x)$ hinein, bezeichnen den Quotienten durch $Q$ und den mit entgegengesetzem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_2(x)$, so ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Der Excess von $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ für die Gränzen $a$, $b$ sei $E_1$; so ist $-E_1$ nach §. 22. der Excess von $-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ für dieselben Gränzen.

Weil nun

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q + \frac{-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

ist; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen $E' = -E_1$, und folglich nach dem Obigen

$$E - E_1 = \varepsilon$$

oder $E = E_1 + \varepsilon$, wo $E$, $E_1$ die Excesse von $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ sind, und $\varepsilon$ eine nach den aus dem Obigen bekannten Regeln jederzeit mit völliger Sicherheit bestimmbare Grösse ist.

## §. 27.

Nach Vorausschickung dieser Principien lassen sich nun die Regeln zur Bestimmung des zwei gegebenen Gränzen $a$, $b$ entsprechenden Excesses der echten gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ ohne Schwierigkeit entwickeln.

Man dividire mit $\varphi_1(x)$ in $\varphi(x)$, und bezeichne den Quotienten durch $Q$, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_2(x)$, so ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Ferner dividire man mit $\varphi_2(x)$ in $\varphi_1(x)$, und bezeichne den Quotienten durch $Q_1$, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_3(x)$, so ist

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Auf ähnliche Art dividire man mit $\varphi_3(x)$ in $\varphi_2(x)$, und bezeichne den Quotienten durch $Q_2$, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_4(x)$, so ist

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 - \frac{\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)}.$$

Geht man auf diese Art weiter, so wird man immer endlich auf einen verschwindenden Rest kommen, und jederzeit eine Reihe Gleichungen von der Form

Digitized by Google

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 - \frac{\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)},$$

u. s. w.

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)},$$
$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1};$$

wo $Q_{n-1}$ eine ganze rationale algebraische Function von $x$ ist, erhalten.

Bezeichnen wir jetzt die den Gränzen $a$, $b$ entsprechenden Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \cdots \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

respective durch

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots\ E_{n-1},\ E_n;$$

so ist nach §. 26. und §. 23.

$$E = E_1 + \varepsilon, E_1 = E_2 + \varepsilon_1, E_2 = E_3 + \varepsilon_2, \ldots E_{n-2} = E_{n-1} + \varepsilon_{n-2},$$
$$E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1};$$

wo $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ... $\varepsilon_{n-1}$ gewisse mittelst der aus dem Vorhergehenden bekannten Regeln mit völliger Sicherheit bestimmbare Grössen sind. Durch Addition der vorhergehenden Gleichungen erhält man aber, wenn man aufhebt was sich aufheben lässt, und überlegt, dass nach §. 21., weil

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1}$$

eine ganze rationale algebraische Function ist, $E_n = 0$ sein muss, sogleich die Gleichung

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1},$$

und sieht also, dass zur Berechnung des Excesses $E$ nur eine völlig sichere und möglichst einfache Regel zur Bestimmung der Grössen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ... $\varepsilon_{n-1}$ erforderlich ist, die wir nun zu geben versuchen wollen.

Zu dem Ende schreiben wir die Werthe, welche die Functionen

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_n(x)$$

für $x = a$ und für $x = b$ erhalten, in zwei Zeilen, wie folgt unter einander:

(1) .... $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_3(a)$, .... $\varphi_n(a)$;
(2) .... $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(b)$, $\varphi_3(b)$, .... $\varphi_n(b)$.

Betrachten wir nun zuvörderst irgend eine der Grössen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-2}$, die wir im Allgemeinen durch $\varepsilon_m$ bezeichnen wollen, so ist nach dem Obigen

$$E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m,$$

Digitized by Google

wo $E_m$ und $E_{m+1}$ die Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \text{ und } \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)},$$

für die Gränzen $a$, $b$ sind. Weil aber

$$\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$$

ist, so ist nach §. 25. der Excess von $-\frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$, d. i. $-E_{m+1}$ nach §. 22., dem Excesse von $\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$ gleich. Bezeichnen wir also den Excess der letztern Function durch $E'_m$, so ist $-E_{m+1}=E'_m$ oder $E_{m+1}=-E'_m$, und folglich nach dem Obigen

$$E_m = -E'_m + \varepsilon_m \text{ oder } E_m + E'_m = \varepsilon_m.$$

Also ist nach §. 24.

$$\varepsilon_m = 0, \text{ oder } \varepsilon_m = +1, \text{ oder } \varepsilon_m = -1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ und $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ zugleich einen Wechsel oder zugleich eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ einen Wechsel bilden.

Ganz dasselbe lässt sich auf folgende Art auch von der Grösse $\varepsilon_{n-1}$ beweisen. Nach dem Obigen ist

$$E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1} \text{ oder } E_{n-1} + E_n = \varepsilon_{n-1},$$

wo $E_{n-1}$ und $E_n$ die Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} \text{ und } \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

sind. Also ist nach §. 24.

$$\varepsilon_{n-1} = 0, \text{ oder } \varepsilon_{n-1} = +1, \text{ oder } \varepsilon_{n-1} = -1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ und $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ zugleich einen Wechsel oder zugleich eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ einen Wechsel bilden; welches Alles ganz mit dem Obigen übereinstimmt.

Seien nun $w$ und $f$ die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (1), $w'$ und $f'$ die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (2). Die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $x$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $x'$; die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $x''$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $x'''$; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = x - x',$$

Digitized by Google

also $E = x - x'$. Ferner ist aber, wie sogleich erhellet,

$$w = x + x'', \quad f = x' + x'''$$

und

$$w' = x' + x'', \quad f' = x + x''';$$

also

$$w - w' = x - x', \quad f' - f = x - x'.$$

Daher ist

$$E = w - w' = f' - f,$$

und zur Berechnung des Excesses einer echten gebrochenen rationalen algebraischen Function ergiebt sich also die folgende Regel:

Man bilde, wenn $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ die gegebene echte gebrochene rationale algebraische Function ist, nach der oben gegebenen Anweisung die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \varphi_3(a),\ \ldots.\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \varphi_3(b),\ \ldots.\ \varphi_n(b);$$

und zähle in jeder dieser beiden Reihen die vorkommenden Wechsel $w, w'$ und Folgen $f, f'$; dann ist, wenn der gesuchte, den Gränzen $a, b$ entsprechende Excess der gegebenen Function wie gewöhnlich durch $E$ bezeichnet wird,

$$E = w - w' = f' - f.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q + \frac{-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 + \frac{-\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 + \frac{-\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)},$$
$$\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = Q_3 + \frac{-\varphi_5(x)}{\varphi_4(x)},$$

u. s. w.

ist; so sieht man, dass die Grössen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x),\ \ldots.\ \varphi_n(x),$$

welche im Folgenden überhaupt Divisoren*) genannt werden sollen, erhalten werden, wenn man auf die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ die bekannte Methode zur Auffindung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier ganzen rationalen algebraischen Functionen anwendet, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr mit dem Entgegengesetzten dieses Restes dividirt, und hierauf alle bei dieser Operation gebrauchten Divisoren vom ersten bis zum letzten in natürlicher Folge in einer Reihe neben einander schreibt, wodurch man unmittelbar die gesuchten Grössen erhält.

---

*) Herr Moigno nennt diese Grössen, mit Ausnahme der ersten, Reste; uns scheint die obige Benennung sachgemässer.

Digitized by Google

Bei der Ausführung dieser Rechnung kann man, um numerische Brüche in den Quotienten zu vermeiden und sich dadurch die Rechnung zu erleichtern, die Dividenden mit zweckmässig gewählten positiven Zahlen multipliciren, weil dadurch die Vorzeichen der Reste, und also auch die Vorzeichen der auf einander folgenden Divisoren, auf die es hier allein ankommt, keine Aenderung erleiden.

## §. 28.

Bis jetzt haben wir stillschweigend angenommen, dass kein Glied der beiden Reihen (1) und (2) verschwinde, und müssen daher jetzt noch zeigen, wie man sich zu verhalten hat, wenn dies nicht der Fall ist, wobei wir jedoch voraussetzen wollen, dass keine der beiden Gränzen $a$, $b$ selbst eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x)=0$, und also weder $\varphi(a)=0$, noch $\varphi(b)=0$ ist.

Unter dieser Voraussetzung können nie zwei benachbarte Glieder der Reihen (1) und (2) zugleich verschwinden, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Wäre nämlich z. B. $\varphi_m(a)=0$ und auch $\varphi_{m+1}(a)=0$, so würden wegen der Gleichungen

$$\varphi(x) = Q\varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$
$$\varphi_1(x) = Q_1\varphi_2(x) - \varphi_3(x),$$
u. s. w.
$$\varphi_{m-1}(x) = Q_{m-1}\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x),$$
$$\varphi_m(x) = Q_m\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{m+2}(x),$$
$$\varphi_{m+1}(x) = Q_{m+1}\varphi_{m+2}(x) - \varphi_{m+3}(x),$$
u. s. w.
$$\varphi_{n-3}(x) = Q_{n-3}\varphi_{n-2}(x) - \varphi_{n-1}(x),$$
$$\varphi_{n-2}(x) = Q_{n-2}\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)$$

offenbar die Grössen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a)\ \varphi_3(a),\ \ldots\ \varphi_n(a)$$

sämmtlich verschwinden, welches ungereimt ist, weil nach der Voraussetzung $\varphi(a)$ nicht verschwindet.

Wenn also ein Glied, z. B. $\varphi_m(a)$, verschwindet, so verschwindet keins der beiden Glieder $\varphi_{m-1}(a)$ und $\varphi_{m+1}(a)$, und diese beiden Glieder haben, weil wegen der Gleichung

$$\varphi_{m-1}(x) = Q_{m-1}\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)$$

offenbar $\varphi_{m-1}(a) = -\varphi_{m+1}(a)$ ist, jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen, welches Alles für jede der beiden Reihen (1) und (2) gilt, wenn nur, wie immer angenommen wird, keine der beiden Grössen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ verschwindet.

Wir wollen nun der Einfachheit wegen den Fall besonders betrachten, wenn in der Reihe (1) das eine Glied $\varphi_m(a)$, in der Reihe (2) kein Glied verschwindet. Bezeichnen wir durch $a_1$ eine Grösse, welche von der Grösse $a$ nur um eine der Null unendlich nahe kommende Grösse verschieden ist, so wird in der Reihe

$$(1^a)\ \ldots.\ \varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \varphi_2(a_1),\ \varphi_3(a_1),\ \ldots.\ \varphi_n(a_1)$$

kein Glied verschwinden, und, mit Ausnahme des Gliedes $\varphi_m(a_1)$,

Digitized by Google

werden alle Glieder mit den entsprechenden Gliedern der Reihe (1) gleiche Vorzeichen haben, den gesuchten Excess der gegebenen Function für die Gränzen $a$, $b$ wird man aber offenbar erhalten, wenn man den Excess derselben für die Gränzen $a_1$, $b$ sucht, so dass also, wenn $E$ der gesuchte Excess ist, und durch $w_1$ und $w'$ respective die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1*) und (2) bezeichnet wird,

$$E = w_1 - w'$$

ist.

Vergleicht man nun aber die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_m(a),\ \varphi_{m+1}(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a_1),\ \varphi_m(a_1),\ \varphi_{m+1}(a_1),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a_1),\ \varphi_n(a_1)$$

mit einander; so ist aus dem Obigen klar, dass in den Theilen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a);$$
$$\varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \varphi_2(a_1)\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a_1)$$

und

$$\varphi_{m+1}(a),\ \varphi_{m+2}(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi_{m+1}(a_1),\ \varphi_{m+2}(a_1),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a_1),\ \varphi_n(a_1)$$

derselben gleich viele Wechsel vorkommen. Lässt man in der ersten Reihe das verschwindende Glied $\varphi_m(a)$ ganz weg, so geben die Glieder $\varphi_{m-1}(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$, welche nach dem Obigen nicht verschwinden und entgegengesetzte Vorzeichen haben, einen Wechsel. Die Zeichen der drei Glieder $\varphi_{m-1}(a_1)$, $\varphi_m(a_1)$, $\varphi_{m+1}(a_1)$ der zweiten Reihe sind aber entweder

$$+\,+\,-,\ \text{oder}\ +\,-\,-,\ \text{oder}\ -\,+\,+,\ \text{oder}\ -\,-\,+,$$

und bieten daher immer nur einen Wechsel dar, woraus sich, in Verbindung mit allem Vorhergehenden ergiebt, dass die Anzahl der Wechsel in (1*) jederzeit der Anzahl der Wechsel in (1), wenn man bei der Zählung der Wechsel das verschwindende Glied $\varphi_m(a)$ dieser letztern Reihe ganz ausser Acht lässt, völlig gleich, oder dass, wenn $w$ die Anzahl der Wechsel der Reihe (1) mit völliger Beseitigung des verschwindenden Gliedes $\varphi_m(a)$ bezeichnet, $w_1 = w$, und nach dem Obigen folglich $E = w - w'$ ist.

Wenn also ein Glied der Reihe (1) verschwindet, so kann man für die Gränzen $a$, $b$ den Excess $E$ der gegebenen Function so bestimmen, dass man die Anzahl der Wechsel in den beiden Reihen (1) und (2) durch unmittelbare Zählung derselben bestimmt, wobei man das verschwindende Glied der Reihe (1) ganz aus der Acht lässt, und dann, wenn unter dieser Voraussetzung $w$ die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1), $w'$ aber die Anzahl der Wechsel in der Reihe (2) ist, $E = w - w'$ setzt.

Dass übrigens ein ähnliches Verfahren bei der Zählung der Folgen in den beiden Reihen (1) und (2) nicht angewandt werden darf, geht aus dem Obigen unmittelbar hervor.

Zugleich aber ergiebt sich aus der obigen Darstellung ganz unzweideutig, dass ein ganz ähnliches Verfahren wie vorher immer in Anwendung gebracht werden kann, wenn beliebig viele Glieder der Reihen (1) und (2) mit Ausnahme der beiden ersten verschwinden, und die allgemeine Regel zur Bestimmung des Excesses einer echten gebrochenen rationalen algebraischen Function zwischen ge-

Digitized by Google

gebenen Gränzen wird sich nun auf den folgenden Ausdruck bringen lassen:

Wenn $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ die gegebene echte gebrochene rationale algebraische Function ist, und die Grössen $a$, $b$, welche nicht selbst Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ sein sollen, die gegebenen Gränzen sind; so wende man, um den diesen Gränzen entsprechenden Excess $E$ der gegebenen Function zu finden, auf die beiden ganzen rationalen algebraischen Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr immer mit dem Entgegengesetzten dieses Rests dividirt, und schreibe alle bei dieser Operation gebrauchte Divisoren in Verbindung mit der Function $\varphi(x)$ in einer Reihe neben einander, wodurch man die Reihe

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_n(x)$$

erhält, aus welcher sich, wenn man für $x$ die beiden gegebenen Gränzen $a$ und $b$ setzt, ferner die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \varphi_3(a),\ \ldots\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \varphi_3(b),\ \ldots\ \varphi_n(b)$$

ergeben. Zählt man nun mit völliger Beseitigung aller verschwindenden Glieder die in diesen beiden Reihen vorkommenden Wechsel, und bezeichnet deren Anzahl respective durch $w$ und $w'$, so ist jederzeit $E=w-w'$.

---

## C.

### Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

### §. 29.

Es sei jetzt $f(x)=0$ eine Gleichung eines beliebigen Grades, und $a$ sei eine reelle Wurzel dieser Gleichung, welche dieselbe $\mu$ Mal, aber nicht öfter, enthalten mag, so dass also die Function $f(x)$ durch $(x-a)^\mu$, aber durch keine höhere Potenz von $x-a$, ohne Rest theilbar ist. Unter diesen Voraussetzungen ist nach §. 15.

$$f(a)=0\quad f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots\ f^{(\mu-1)}(a)=0,$$

aber nicht $f^{(\mu)}(a)=0$. Also ist nach §. 12. II.

$$f(a+i)=\frac{f^{(\mu)}(a)}{1\ldots\mu}i^\mu+\frac{f^{(\mu+1)}(a)}{1\ldots(\mu+1)}i^{\mu+1}+\frac{f^{(\mu+2)}(a)}{1\ldots(\mu+2)}i^{\mu+2}+\ldots.,$$

Digitized by Google

$$f'(\alpha+i)=\frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{1\ldots(\mu-1)}i^{\mu-1}+\frac{f^{(\mu+1)}(\alpha)}{1\ldots\mu}i^{\mu}+\frac{f^{(\mu+2)}(\alpha)}{1\ldots(\mu+1)}i^{\mu+1}\ldots,$$

und folglich

$$\frac{f'(\alpha+i)}{f(\alpha+i)}=\frac{\mu+\frac{f^{(\mu+1)}(\alpha)}{f^{(\mu)}(\alpha)}i+\frac{f^{(\mu+2)}(\alpha)}{(\mu+1)f^{(\mu)}(\alpha)}i^2+\ldots.}{i+\frac{f^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)f^{(\mu)}(\alpha)}i^2+\frac{f^{(\mu+2)}(\alpha)}{(\mu+1)(\mu+2)f^{(\mu)}(\alpha)}i^3+\ldots.}$$

Hieraus sieht man, dass der Bruch $\frac{f'(\alpha+i)}{f(\alpha+i)}$ für $i=0$ unendlich wird, so dass also der Bruch $\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ jederzeit unendlich ist. Zugleich aber ergiebt sich aus §. 18., dass für der Null unendlich nahe kommende $i$ der Bruch $\frac{f'(\alpha+i)}{f(\alpha+i)}$ mit dem Bruche $\frac{\mu}{i}$, also mit der Grösse $i$, gleiches Vorzeichen hat, und daher von dem Negativen zum Positiven übergeht, wenn $i$ vom Negativen zum Positiven übergeht.

Wenn also, indem jetzt $i$ eine unendlich kleine positive Grösse sein soll, $x$ sich von $\alpha-i$ bis $\alpha+i$ stetig ändert, so wird unter den gemachten Voraussetzungen der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ für $x=\alpha$ jederzeit unendlich, und geht, indem er unendlich wird, vom Negativen zum Positiven über.

## §. 30.

Wenn nun zwischen den Gränzen $a$ und $b$, wo jetzt $a<b$ sein soll, die sämmtlich von einander verschiedenen $m$ reellen Wurzeln $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, .... $\alpha_m$ der Gleichung $f(x)=0$ liegen, so wird nach dem vorigen Paragraphen der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ für

$$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2,\ x=\alpha_3,\ \ldots.\ x=\alpha_m$$

unendlich, und geht, wenn $x$ sich von $a$ bis $b$ stetig ändert, indem er unendlich wird, jederzeit vom Negativen zum Positiven über. Nimmt man hierzu, dass der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ offenbar nur für

$$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2,\ x=\alpha_3,\ \ldots.\ x=\alpha_m$$

unendlich werden kann, so ist klar, dass, wenn $E$ den Excess der in Rede stehenden gebrochenen Function für die Gränzen $a$, $b$ bezeichnet, jederzeit $m=E$ ist, wodurch wir unmittelbar zu dem folgenden überaus wichtigen und merkwürdigen Satze geführt werden:

**Die Anzahl der zwischen den Gränzen $a$, $b$, wo $a<b$ sein soll, liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist jederzeit dem diesen Gränzen entsprechenden Excesse der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gleich.**

Setzen wir aber mit diesem Satze die in §. 28. bewiesene Regel für den Excess in Verbindung, so erhalten wir das folgende Theorem:

Digitized by Google

Um, unter der Voraussetzung, dass $a<b$ ist, die Anzahl der zwischen den Gränzen $a$, $b$, welche nicht selbst Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind, liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln dieser Gleichung zu finden, wende man auf die beiden ganzen rationalen algebraischen Functionen $f(x)$ und $f'(x)$, deren zweite jederzeit von einem niedrigern Grade als die erste ist, die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr immer mit dem Entgegengesetzten dieses Restes dividirt, und schreibe alle bei dieser Operation gebrauchte Divisoren in Verbindung mit der Function $f(x)$ wie folgt in eine Reihe:

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots\ldots$$

Setzt man dann in dieser Reihe $x=a$ und $x=b$, so erhält man die beiden Reihen

$$f(a),\ f'(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ f_4(a),\ \ldots;$$
$$f(b),\ f'(b),\ f_2(b),\ f_3(b),\ f_4(b),\ \ldots;$$

und die gesuchte Anzahl der zwischen den gegebenen Gränzen $a$, $b$ liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist nun jederzeit der Differenz gleich, welche man erhält, wenn man die Anzahl der in der zweiten der beiden obigen Reihen vorkommenden Wechsel von der Anzahl der in der ersten der beiden obigen Reihen vorkommenden Wechsel abzieht, wobei man nicht zu übersehen hat, dass bei der Zählung der in Rede stehenden vorkommenden Wechsel verschwindende Glieder dieser beiden Reihen ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Mittelst dieses in jeder Beziehung höchst merkwürdigen Satzes, dessen Erfinder Sturm ist, lässt sich also die Anzahl der zwischen jeden zwei gegebenen Gränzen liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung in allen Fällen mit völliger Sicherheit bestimmen *).

Bezeichnet man die Anzahl der Wechsel in den Reihen der Vorzeichen, welche die, die höchsten Potenzen von $x$ enthaltenden Glieder der Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots.$$

*) Herr Moigno leitet in seiner Abhandlung aus der Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen auch noch die Sätze von Rolle, Budan, Fourier, Descartes über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichungen mit grosser Leichtigkeit ab. Da aber diese Sätze nur Grössen angeben, welche die Anzahl der zwischen den gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln nicht übersteigen kann, so gehören sie jetzt weniger zu unserm Zwecke, und wir werden dieselben daher, um die vorliegende Abhandlung jetzt nicht zu sehr auszudehnen, zu dem Gegenstande eines spätern eignen Aufsatzes machen, in welchem wir uns in Betreff der Lehre vom Excess auf den vorliegenden beziehen werden.

Digitized by Google

erhalten, wenn man für $x$ eine beliebige negative oder positive Grösse setzt, respective durch $N$ und $P$, und überlegt, dass nach §. 19. die Vorzeichen der Grössen

$$f(-\infty),\ f'(-\infty),\ f_2(-\infty),\ f_3(-\infty),\ f_4(-\infty),\ \ldots;$$
$$f(+\infty),\ f'(+\infty),\ f_2(+\infty),\ f_3(+\infty),\ f_4(+\infty),\ \ldots.$$

mit den Vorzeichen ihrer die höchsten Potenzen von $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenden Glieder einerlei sind, also die Anzahl der Wechsel in der ersten dieser beiden Reihen offenbar $N$, die Anzahl der Wechsel in der zweiten Reihe $P$ ist; so wird man sich mittelst des obigen Satzes auf der Stelle überzeugen, dass $N-P$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist, und also auch diese Anzahl auf diese Weise immer mit völliger Sicherheit bestimmt werden kann.

Bezeichnen wir endlich durch $O$ die Anzahl der in der Reihe

$$f(0),\ f'(0),\ f_2(0),\ f_3(0),\ f_4(0),\ \ldots.$$

vorkommenden Wechsel; so ist nach dem obigen Satze $N-O$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen negativen, $O-P$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen positiven Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$.

---

## D.

### Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden imaginären Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

### §. 31.

Wir wollen zuerst zeigen, dass jede imaginäre Grösse $u+v\sqrt{-1}$, in welcher übrigens auch $v=0$ sein kann, wenn $\varrho$ eine gewisse positive Grösse, $\omega$ einen gewissen Bogen oder Winkel bezeichnet, unter der Form $\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})$, so dass

$$u+v\sqrt{-1}=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})$$

ist, dargestellt werden kann. Die vorstehende Gleichung ist nämlich erfüllt, wenn sich die beiden Grössen $\varrho$ und $\omega$, deren erstere positiv sein soll, so bestimmen lassen, dass sie den beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\omega=u,\ \varrho\sin\omega=v$$

genügen. Quadrirt man diese beiden Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$\varrho^2=u^2+v^2,\ \varrho=\sqrt{u^2+v^2},$$

Digitized by Google

wo die Quadratwurzel positiv genommen werden muss, da $\varrho$ positiv sein soll. Dividirt man mit der ersten der beiden obigen Gleichungen in die zweite, so erhält man

$$\text{tang } \omega = \frac{v}{u},$$

und folglich, wenn wir durch Arctang $\frac{v}{u}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{v}{u}$ entsprechenden Bogen bezeichnen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat,

$$\omega = \text{Arctang } \frac{v}{u} + x\pi,$$

wo $x$ eine ganze Zahl bezeichnet, über die nur noch die folgende Bestimmung gegeben werden muss.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\cos \omega = (-1)^x \cdot \cos \text{Arctang } \frac{v}{u}, \quad \sin \omega = (-1)^x \cdot \sin \text{Arctang } \frac{v}{u}.$$

Da nun Arctang $\frac{v}{u}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{v}{u}$ entsprechenden Bogen bezeichnet, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so ist cos Arctang $\frac{v}{u}$ immer positiv, sin Arctang $\frac{v}{u}$ dagegen ist positiv oder negativ, jenachdem $\frac{v}{u}$ positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos \text{Arctang } \frac{v}{u} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}}, \quad \sin \text{Arctang } \frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{u}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, und folglich

$$\cos \text{Arctang } \frac{v}{u} = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \sin \text{Arctang } \frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{u}\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $u$ positiv oder negativ ist, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass immer

$$\cos \text{Arctang } \frac{v}{u} = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \sin \text{Arctang } \frac{v}{u} = \pm \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

und folglich

$$\varrho \cos \text{Arctang } \frac{v}{u} = \pm u, \quad \varrho \sin \text{Arctang } \frac{v}{u} = \pm v$$

ist, wenn man nur immer die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem $u$ positiv oder negativ ist. Folglich ist nach dem Obigen

$$\varrho \cos \omega = \pm (-1)^x \cdot u, \quad \varrho \sin \omega = \pm (-1)^x \cdot v,$$

wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem $u$ positiv oder negativ ist. Nimmt man nun aber nur die ganze Zahl

Digitized by Google

$x$ gerade oder ungerade, jenachdem $u$ positiv oder negativ ist, so ist jederzeit

$$\varrho \cos \omega = u, \quad \varrho \sin \omega = v,$$

wie es dem Obigen zufolge erforderlich ist.

Also ist

$$\omega = \text{Arctang } \frac{v}{u} + x\pi,$$

wenn man nur die an sich übrigens ganz willkührliche ganze Zahl $x$ gerade oder ungerade nimmt, jenachdem die Grösse $u$ positiv oder negativ ist, wodurch nun sowohl $\varrho$, als auch $\omega$, vollkommen bestimmt ist.

## §. 32.

*Lehrsatz.* Es seien $u$ und $v$ zwei Functionen der veränderlichen Grösse $s$, die zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetig sind, und deren jede für $s = s_0$ $s = s_1$ gleiche Werthe erhält, so dass, wenn wir die den Werthen $s_0$, $s_1$ der veränderlichen Grösse $s$ entsprechenden Werthe dieser beiden Functionen respective durch $u_0$, $v_0$ und $u_1$, $v_1$ bezeichnen, $u_0 = u_1$ und $v_0 = v_1$ ist; so ist, wenn wir

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1})$$

setzen, und annehmen, dass auch der Bogen $\omega$ eine zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetige Function von $s$ sei, die den Gränzwerthen $s_0$ und $s_1$ der veränderlichen Grösse $s$ entsprechenden Werthe von $\omega$ aber durch $\omega_0$ und $\omega_1$ bezeichnen, der den Gränzen $s_0$ und $s_1$ entsprechende Excess der Function $\frac{u}{v}$ der Grösse $\frac{\omega_1 - \omega_0}{\pi}$ gleich, wo $\pi$ die bekannte Bedeutung hat.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\omega = \text{Arctang } \frac{v}{u} + x\pi,$$

wo die an sich willkührliche ganze Zahl $x$ gerade oder ungerade zu nehmen ist, jenachdem $u$ positiv oder negativ ist. So lange $u$ sein Zeichen nicht verändert, ist also $x$ constant, oder kann wenigstens immer als constant angenommen werden; ändert aber $u$ sein Zeichen, so muss jederzeit $x$ um eine Einheit vermehrt oder vermindert werden, oder man muss auf der rechten Seite der obigen Gleichung $\pi$ addiren oder subtrahiren, wobei es übrigens an sich ganz willkührlich ist, ob man das Erste oder das Zweite thun will.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass

$$\omega - \omega_0 = \text{Arctang } \frac{v}{u} - \text{Arctang } \frac{v_0}{u_0} + \lambda\pi$$

ist, wo die ganze Zahl $\lambda$ so lange constant ist oder wenigstens immer als constant angenommen werden kann, so lange $u$ sein Zeichen nicht ändert; ändert aber $u$ sein Zeichen, so muss jederzeit $\lambda$ um eine Einheit vermehrt oder vermindert, oder es muss auf der rechten Seite der obigen Gleichung $\pi$ addirt oder subtrahirt wer-

Digitized by Google

den, wobei es an sich ganz willkührlich ist, ob man das Erste oder das Zweite thut.

Wir wollen nun annehmen, dass $s$ sich von $s_0$ bis $s_1$ stetig verändere, so verändern sich den gemachten Voraussetzungen gemäss auch die Grössen $\omega - \omega_0$ und Arctang $\frac{v}{u}$ – Arctang $\frac{v_0}{u_0}$ stetig. Da nach der Voraussetzung die Function $u$ sich stetig verändert, wenn $s$ sich von $s_0$ bis $s_1$ stetig ändert, so wird zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ mit jeder Aenderung des Zeichens der Function $u$ ein Durchgang derselben durch Null verbunden sein, und die Function $\frac{v}{u}$ wird daher jederzeit, aber auch nur dann, ihr Zeichen ändern und durch Unendlich gehen, wenn $u$ sein Zeichen ändert, wenn nur zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ die Functionen $u$ und $v$ nie zugleich verschwinden, welches aber mit der Voraussetzung, dass $\omega$, und folglich natürlich auch Arctang $\frac{v}{u}$, sich stetig verändern soll, wenn $s$ sich von $s_0$ bis $s_1$ stetig verändert, in Widerspruch stehen würde, indem einem solchen gleichzeitigen Verschwinden der Functionen $u$ und $v$ der völlig unbestimmte Werth Arctang $\frac{0}{0}$ von Actang $\frac{v}{u}$ entsprechen würde. Für $s = s_0$ ist

$$\omega = \omega_0, \text{ Arctang } \frac{v}{u} = \text{Arctang } \frac{v_0}{u_0},$$

also

$$\omega - \omega_0 = \text{Arctang } \frac{v}{u} - \text{Arctang } \frac{v_0}{u_0},$$

oder $\lambda = 0$, und diese Gleichung bleibt so lange richtig, so lange $u$ sein Zeichen nicht ändert, oder, was nach dem Obigen dasselbe ist, $\frac{v}{u}$ sein Zeichen nicht ändert und durch das Unendliche geht. Aendert nun aber das erste Mal $u$ sein Zeichen, oder findet, was nach dem Obigen dasselbe ist, das erste Mal eine Aenderung des Zeichens und ein Durchgang durch das Unendliche der Function $\frac{v}{u}$ Statt, so muss man auf der rechten Seite der obigen Gleichung $\pi$ addiren oder subtrahiren. Geht $\frac{v}{u}$ vom Negativen durch das Unendliche zum Positiven über, so springt Arctang $\frac{v}{u}$ mit einem Male von $-\frac{1}{2}\pi$ zu $+\frac{1}{2}\pi$ über, oder nimmt mit einem Male um $\pi$ zu; geht dagegen $\frac{v}{u}$ vom Positiven durch das Unendliche zum Negativen über, so springt Arctang $\frac{v}{u}$ mit einem Male von $+\frac{1}{2}\pi$ zu $-\frac{1}{2}\pi$ über, oder nimmt mit einem Male um $\pi$ ab; weil nun $\omega$ nach der Voraussetzung zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetig sein soll, so muss man offenbar auf der rechten Seite der obigen Gleichung im ersten Falle $\pi$ subtrahiren, im zweiten Falle dagegen $\pi$ addiren, oder es wird

$$\omega - \omega_0 = \text{Arctang } \frac{v}{u} - \text{Arctang } \frac{v_0}{u_0} + (-1)^{\mu_1} \cdot \pi$$



Digitized by Google

sein, wenn man nur für $\mu_1$ eine ungerade oder eine gerade Zahl setzt, jenachdem $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Negativen zum Positiven oder vom Positiven zum Negativen übergeht. Hieraus ergiebt sich aber sehr leicht, dass, wenn zwischen den in Rede stehenden Gränzen überhaupt $i$ mit einer Aenderung des Zeichens verbundene Durchgänge der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche Statt finden, jederzeit

$$\omega_1 - \omega_0 = \text{Arctang}\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\frac{v_0}{u_0} + (-1)^{\mu_1}.\pi + (-1)^{\mu_2}.\pi + (-1)^{\mu_3}.\pi + \ldots + (-1)^{\mu_i}.\pi$$

oder

$$\omega_1 - \omega_0 = \text{Arctang}\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\frac{v_0}{u_0} + \{(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} + (-1)^{\mu_3} + \ldots + (-1)^{\mu_i}\}\pi$$

sein wird, wo in der Reihe $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_i$ alle ungerade Zahlen Durchgängen der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Negativen zum Positiven, alle gerade Zahlen dagegen Durchgängen der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Positiven zum Negativen entsprechen. Ist nun $\varepsilon$ der den Gränzen $s_0$, $s_1$ entsprechende Excess der Function $\frac{v}{u}$, so ist offenbar

$$(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} + (-1)^{\mu_3} + \ldots + (-1)^{\mu_i} = -\varepsilon,$$

und folglich

$$\omega_1 - \omega_0 = \text{Arctang}\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\frac{v_0}{u_0} - \varepsilon\pi.$$

Nach der Voraussetzung ist aber $u_0 = u_1$, $v_0 = v_1$, also natürlich auch $\text{Arctang}\frac{v_0}{u_0} = \text{Arctang}\frac{v_1}{u_1}$, und folglich

$$\omega_1 - \omega_0 = -\varepsilon\pi.$$

Bezeichnet jetzt $e$ den Excess der Function $\frac{u}{v}$ für die Gränzen $s_0$ und $s_1$, so ist nach §. 23., weil die Grössen $\frac{u_0}{v_0}$ und $\frac{u_1}{v_1}$ einander gleich sind, also natürlich auch gleiche Vorzeichen haben, $e + \varepsilon = 0$, $e = -\varepsilon$, und folglich $\omega_1 - \omega_0 = e\pi$, also

$$e = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\pi},$$

wie bewiesen werden sollte.

## §. 33.

*Lehrsatz.* Wenn, indem $u, v; u', v'; u'', v''; u''', v'''$; u. s. w. Functionen von $s$ sind, welche, so wie die auf analoge Weise wie im vorigen Paragraphen bezeichneten Functionen $\omega, \omega', \omega'', \omega''', \ldots$, sämmtlich den Bedingungen des vorigen Satzes genügen, und

Digitized by Google

$$U+V\sqrt{-1}=(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v'\sqrt{-1})\,\ldots\ldots$$

ist, die den Gränzen $s_0$ und $s_1$ entsprechenden Excesse der Functionen $\frac{u}{v}$, $\frac{u'}{v'}$, $\frac{u''}{v''}$, $\frac{u'''}{v'''}$, u. s. w. und $\frac{U}{V}$ aber respective durch $e$, $e'$, $e''$, $e'''$, u. s. w. und $E$ bezeichnet werden; so ist jederzeit

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.$$

**Beweis.** Man setze

$$\begin{aligned}
u+v\sqrt{-1}&=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),\\
u'+v'\sqrt{-1}&=\varrho\,(\cos\omega'+\sin\omega'\sqrt{-1}),\\
u''+v''\sqrt{-1}&=\varrho''(\cos\omega''+\sin\omega''\sqrt{-1}),\\
u'''+v'''\sqrt{-1}&=\varrho'''(\cos\omega'''+\sin\omega'''\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

u. s. w.

also

$$\begin{aligned}
&(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v''\sqrt{-1})\,\ldots\ldots\\
&=\varrho\varrho'\varrho''\ldots(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\,(\cos\omega'+\sin\omega'\sqrt{-1})\\
&\qquad\qquad(\cos\omega''+\sin\omega''\sqrt{-1})\,\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$\begin{aligned}
&(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v''\sqrt{-1})\,\ldots\ldots\\
&=\varrho\varrho'\varrho''\ldots\{\cos(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)+\sin(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)\sqrt{-1}\},
\end{aligned}$$

und folglich, wenn

$$U+V\sqrt{-1}=R(\cos\Omega+\sin\Omega\sqrt{-1})$$

gesetzt wird,

$$R=\varrho\varrho'\varrho''\varrho'''\ldots \text{ und } \Omega=\omega+\omega'+\omega''+\omega'''+\ldots,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die Functionen $U, V, \Omega$ den Bedingungen des vorigen Satzes vollständig genügen. Bedient man sich nun ähnlicher Bezeichnungen wie beim vorigen Satze, so ist nach diesem Satze

$$e=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi},\quad e'=\frac{\omega_1'-\omega_0'}{\pi},\quad e''=\frac{\omega_1''-\omega_0''}{\pi},\quad e'''=\frac{\omega_1'''-\omega_0'''}{\pi},\ldots.$$

und

$$E=\frac{\Omega_1-\Omega_0}{\pi}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\Omega_1=\omega_1+\omega_1'+\omega_1''+\omega_1'''+\ldots,\quad \Omega_0=\omega_0+\omega_0'+\omega_0''+\omega_0'''+\ldots,$$

und folglich

$$\frac{\Omega_1-\Omega_0}{\pi}=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}+\frac{\omega_1'-\omega_0'}{\pi}+\frac{\omega_1''-\omega_0''}{\pi}+\frac{\omega_1'''-\omega_0'''}{\pi}+\ldots.$$

ist, so ist

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.,$$

wie bewiesen werden sollte.



Digitized by Google

## §. 34.

Wir wollen uns jetzt in einer Ebene eine geschlossene Curve denken, wollen in derselben einen beliebigen Punkt $M$ als Anfangspunkt der Bogen annehmen, und wollen, indem wir ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde legen, die Coordinaten $x$, $y$ eines jeden Punktes dieser Curve als Functionen des von dem Anfangspunkte $M$ an nach einer bestimmten Richtung hin genommenen, und bei dem Punkte $(xy)$ sich endigenden Bogens $s$ derselben betrachten. Der ganze Umfang der Curve soll durch $c$ bezeichnet werden. Ist nun der durch die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ bestimmte Punkt $A$ ein ganz beliebiger Punkt in der Ebene der Curve, so sind nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten $x-\alpha$, $y-\beta$ die Coordinaten des Punktes $(xy)$ der Curve in Bezug auf ein dem primitiven paralleles Coordinatensystem, dessen Anfang der Punkt $A$ ist, und, wenn wir

$$x-\alpha = \varrho \cos\omega, \quad y-\beta = \varrho \sin\omega$$

setzen, so sind $\omega$, $\varrho$ die polaren Coordinaten des Punktes $(xy)$ in Bezug auf den Punkt $A$ als Pol und den positiven Theil der Abscissenaxe des secundären rechtwinkligen Systems als Axe der polaren Coordinaten, von welcher an die Winkel oder Bogen $\omega$ nach der Seite der positiven secundären rechtwinkligen Ordinaten hin gezählt werden. Bezeichnen wir nun, indem wir annehmen, dass $\omega$ sich stetig verändert, wenn $s$ sich von 0 bis $c$ stetig verändert, die den Werthen 0 und $c$ des Bogens $s$ entsprechenden Werthe von $\omega$ durch $\omega_0$ und $\omega_1$, so ist nach §. 32. offenbar

$$e = \frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}$$

der den Gränzen 0 und $c$ entsprechende Excess der Function $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$. Hierbei ist angenommen worden, dass $s$ sich von 0 bis $c$ stetig verändert, oder dass der Radius Vector $\varrho$ den ganzen Umfang der Curve von $AM$ an bis wieder zu $AM$ durchlaufen habe. Liegt nun der Punkt $A$ oder $(\alpha\beta)$ innerhalb unserer Curve, so ist offenbar

$$\omega_1 = \omega_0 + 2\pi, \quad \omega_1 - \omega_0 = 2\pi, \quad e = \frac{\omega_1-\omega_0}{\pi} = 2.$$

Liegt dagegen der Punkt $A$ oder $(\alpha\beta)$ ausserhalb unserer Curve, so ist offenbar

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_1 - \omega_0 = 0, \quad e = \frac{\omega_1-\omega_0}{\pi} = 0.$$

Der den Gränzen 0 und $c$ entsprechende Excess der Function $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ ist also 2 oder 0, jenachdem der Punkt $(\alpha\beta)$ innerhalb oder ausserhalb der Curve liegt.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gleichung des $n$ten Grades

$$f(x+y\sqrt{-1}) = 0$$

die $n$ sämmtlich unter einander ungleichen reellen oder imaginären Wurzeln

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha'+\beta'\sqrt{-1},\ \alpha''+\beta''\sqrt{-1},\ \alpha'''+\beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

Digitized by Google

habe; so ist bekanntlich

$$f(x+y\sqrt{-1})$$
$$=\{x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1}\}\ \{x-\alpha'+(y-\beta')\sqrt{-1}\}$$
$$\{x-\alpha''+(y-\beta'')\sqrt{-1}\}\ \ldots\ldots$$

Die den Gränzen 0, $c$ entsprechenden Excesse der Functionen

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta},\ \frac{x-\alpha'}{y-\beta'},\ \frac{x-\alpha''}{y-\beta''},\ \frac{x-\alpha'''}{y-\beta'''},\ \ldots\ldots$$

wollen wir durch $e$, $e'$, $e''$, $e'''$, .... bezeichnen, und wollen annehmen, dass keiner der Punkte $(\alpha\ \beta)$, $(\alpha'\ \beta')$, $(\alpha''\ \beta'')$, $(\alpha'''\ \beta''')$, .... ein Punkt unserer Curve sei; so ist nach dem Vorhergehenden

$$e=2 \text{ oder } e=0,$$
$$e'=2 \text{ oder } e'=0,$$
$$e''=2 \text{ oder } e''=0,$$
$$e'''=2 \text{ oder } e'''=0,$$

u. s. w.

jenachdem die Punkte $(\alpha\ \beta)$, $(\alpha'\ \beta')$, $(\alpha''\ \beta'')$, $(\alpha'''\ \beta''')$, .... innerhalb oder ausserhalb der Curve liegen. Bezeichnen wir daher die Anzahl der innerhalb der Curve liegenden Punkte durch $m$, so ist, weil die Excesse $e$, $e'$, $e''$, $e'''$, .... der 2 gleich sind oder verschwinden, jenachdem die entsprechenden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Curve liegen, offenbar

$$2m=e+e'+e''+e'''+\ldots.$$

und folglich

$$m=\frac{e+e'+e''+e'''+\ldots.}{2}.$$

Setzen wir nun aber

$$f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1},$$

also nach dem Obigen

$$U+V\sqrt{-1}=\{x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1}\}\ \{x-\alpha'+(y-\beta')\sqrt{-1}\}\ldots.,$$

und bezeichnen den Excess der Function $\frac{U}{V}$ für die Gränzen 0, $c$ durch $E$; so ist nach §. 33.

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.,$$

und nach dem Obigen folglich $m=\frac{1}{2}E$, woraus sich der folgende merkwürdige Satz ergiebt:

Es sei $f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1}=0$ eine beliebige Gleichung mit lauter ungleichen Wurzeln. Wenn nun in einer Ebene eine geschlossene Curve, deren Umfang $c$ sein mag, beschrieben ist, und die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte dieser Curve als zwischen den Gränzen 0 und $c$ stetige Functionen der entsprechenden von einem gewissen Anfangspunkte an gerechneten Bogen der Curve betrachtet werden können; so ist die Anzahl der innerhalb dieser Curve liegenden

Digitized by Google

Punkte, deren Coordinaten, für $x$ und $y$ in die Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$ gesetzt, dieser Gleichung genügen, jederzeit dem halben Excesse der Function $\frac{U}{V}$ für die Gränzen 0, $c$ gleich, wenn nur die Curve so beschaffen ist, dass die Coordinaten keines ihrer Punkte, für $x$ und $y$ gesetzt, der Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$ genügen.

## §. 35.

Wenn uns nun die lauter ungleiche Wurzeln habende Gleichung

$$f(x+y\sqrt{-1}) = U+V\sqrt{-1}=0$$

gegeben ist, so wollen wir jetzt zu bestimmen suchen, wie viele Wurzeln dieser Gleichung es giebt, deren reeller Theil zwischen den Gränzen $x_0$, $X$, und deren Factor der imaginären Grösse $\sqrt{-1}$ zwischen den Gränzen $y_0$, $Y$ enthalten ist, wobei wir aber annehmen wollen, dass $x+y\sqrt{-1}$ weder für $x=x_0$, noch für $x=X$, noch für $y=y_0$, noch für $y=Y$ eine Wurzel unserer Gleichung wird. Zu dem Ende wollen wir uns $x_0$, $y_0$ und $X$, $Y$ als die rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte in einem beliebigen rechtwinkligen Coordinatensysteme denken, und wollen durch die Endpunkte der den Ordinaten $y_0$, $Y$ entsprechenden geraden Linien Parallelen mit der Abscissenaxe ziehen, so werden diese Parallelen in Gemeinschaft mit den, den Ordinaten $y_0$, $Y$ entsprechenden, nöthigenfalls verlängerten Linien jederzeit ein Rechteck einschliessen. Die Coordinaten eines jeden Punktes innerhalb dieses Rechtecks liegen offenbar zwischen den Gränzen $x_0$, $X$ und $y_0$, $Y$, und unsere Aufgabe wird daher offenbar gelöst sein, wenn wir bestimmen können, wie viel Punkte innerhalb dieses Rechtecks es giebt, deren Coordinaten für $x$ und $y$ gesetzt, der gegebenen Gleichung

$$f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1}=0$$

genügen, auf welche Bestimmung wir demnach jetzt unser Augenmerk allein werden zu richten haben.

Die durch den Endpunkt von $y_0$ gehende, der Abscissenaxe parallele Seite unsers Rechtecks soll als die erste; die durch den Endpunkt von $X$ gehende, der Ordinatenaxe parallele Seite soll als die zweite; die durch den Endpunkt von $Y$ gehende, der Abscissenaxe parallele Seite soll als die dritte; die durch den Endpunkt von $x_0$ gehende, der Ordinatenaxe parallele Seite soll als die vierte Seite unsers Rechtecks angenommen werden. Für jeden Punkt in der ersten, zweiten, dritten, vierten Seite ist respective

$$y=y_0,\ x=X,\ y=Y,\ x=x_0,$$

und weil nun nach der Voraussetzung nie

$$f(x+y_0\sqrt{-1})=0,$$
$$f(X+y\sqrt{-1})=0,$$
$$f(x+Y\sqrt{-1})=0,$$
$$f(x_0+y\sqrt{-1})=0$$

Digitized by Google

sein soll, so genügen die Coordinaten keines Punktes in dem Umfange unsers Rechtecks der gegebenen Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$, und der Umfang dieses Rechtecks kann also als die im vorigen Paragraphen betrachtete geschlossene Curve angenommen werden.

Die Längen der vier Seiten unsers Rechtecks seien nach der Reihe $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, und $c=c_1+c_2+c_3+c_4$ sei der ganze Umfang des Rechtecks. Der Kürze wegen wollen wir

$$\frac{U}{V}=\varphi(x, y)$$

setzen, und der den Gränzen $s=0$, $s=c$, wobei der vorige Paragraph zu vergleichen ist, entsprechende Excess dieser Function sei $E$; so ist nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze $\frac{1}{2}E$ die Grösse, welche wir suchen, und es wird nun darauf ankommen, zu zeigen, wie der Excess $E$ gefunden werden kann.

Für jeden Punkt der ersten Seite ist $y=y_0$ und folglich $\varphi(x, y)=\varphi(x, y_0)$. Für $s=0$ und $s=c_1$ ist respective $x=x_0$ und $x=X$; also ist der Excess von $\varphi(x, y)$ für die Gränzen $s=0$ und $s=c_1$ offenbar dem Excesse von $\varphi(x, y_0)$ für die Gränzen $x=x_0$ und $x=X$, welchen wir durch $E_{y_0}$ bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der zweiten Seite ist $x=X$, und folglich $\varphi(x, y)=\varphi(X, y)$. Für $s=c_1$ und $s=c_1+c_2$ ist $y=y_0$ und $y=Y$; also ist der Excess von $\varphi(x, y)$ für die Gränzen $s=c_1$ und $s=c_1+c_2$ dem Excesse von $\varphi(X, y)$ für die Gränzen $y=y_0$ und $y=Y$, welchen wir durch durch $E_X$ bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der dritten Seite ist $y=Y$, und folglich $\varphi(x, y)=\varphi(x, Y)$. Für $s=c_1+c_2$ und $s=c_1+c_2+c_3$ ist $x=X$ und $x=x_0$; also ist der Excess von $\varphi(x, y)$ für die Gränzen $s=c_1+c_2$ und $s=c_1+c_2+c_3$ dem Excesse von $\varphi(x, Y)$ für die Gränzen $x=X$ und $x=x_0$, welchen wir durch $E'_Y$ bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der vierten Seite ist $x=x_0$, und folglich $\varphi(x, y)=\varphi(x_0, y)$. Für $s=c_1+c_2+c_3$ und $s=c_1+c_2+c_3+c_4=c$ ist $y=Y$ und $y=y_0$; also ist der Excess von $\varphi(x, y)$ für die Gränzen $s=c_1+c_2+c_3$ und $s=c_1+c_2+c_3+c_4=c$ dem Excesse von $\varphi(x_0, y)$ für die Gränzen $y=Y$ und $y=y_0$, welchen wir durch $E'_{x_0}$ bezeichnen wollen, gleich.

Auf der Stelle erhellet nun aber aus dem allgemeinen Begriffe des Excesses die Richtigkeit der Gleichung

$$E=E_{y_0}+E_X+E'_Y+E'_{x_0},$$

wo

$$E_{y_0},\ E_X,\ E'_Y,\ E'_{x_0}$$

die Excesse der Functionen

$$\varphi(x, y_0),\ \varphi(X, y),\ \varphi(x, Y),\ \varphi(x_0, y)$$

für die Gränzen

$$x_0,\ X;\ y_0,\ Y;\ X,\ x_0;\ Y,\ y_0$$

sind, welche nach den in der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung gegebenen Regeln immer berechnet werden können.

Digitized by Google

Bezeichnen wir nun aber die den Gränzen $x_0$, $X$ und $y_0$, $Y$ entsprechenden Excesse der Functionen $\varphi(x, Y)$ und $\varphi(x_0, y)$ durch $E_Y$ und $E_{x_0}$; so erhellet aus dem allgemeinen Begriffe des Excesses auf der Stelle, dass

$$E_Y = -E_Y,\ E_{x_0} = -E_{x_0}$$

ist, und nach dem Obigen ist folglich

$$E = (E_X - E_{x_0}) - (E_Y - E_{y_0}),$$

und also die Grösse, welche wir suchen,

$$\tfrac{1}{2}|(E_X - E_{x_0}) - (E_Y - E_{y_0})|,$$

wo

$$E_X,\ E_{x_0},\ E_Y,\ E_{y_0}$$

die Excesse der Functionen

$$\varphi(X, y),\ \varphi(x_0, y),\ \varphi(x, Y),\ \varphi(x, y_0)$$

für die Gränzen

$$y_0,\ Y;\ y_0,\ Y;\ x_0,\ X;\ x_0,\ X$$

sind, welche nach den in der zweiten Abtheilung dieses Aufsatzes entwickelten Regeln jederzeit gefunden werden können.

Das in dem Vorhergehenden enthaltene, von Cauchy gefundene, in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Theorem ist, in Verbindung mit dem Satze von Sturm, und den im Obigen entwickelten allgemeinen Regeln zur Berechnung des Excesses gebrochener Functionen, im eigentlichen Sinne als neu gewonnenes Land in der Theorie der Gleichungen zu betrachten, und wird als eine der wichtigsten Erfindungen auf dem Gebiete der Mathematik dem gegenwärtigen Jahrhundert jederzeit zur Ehre und zum Ruhme gereichen, wobei auch noch die ganz elementare Darstellung, welche man im Obigen kennen gelernt hat, ganz besonders hervorgehoben zu werden verdient. Ganz richtig sagt Herr Abbé Moigno im Eingange seiner Abhandlung: „Lagrange et Legendre auraient en effet eu de la peine à croire qu'on arriverait par des procédés très élémentaires à déterminer, pour une équation de degré quelconque, le nombre des racines imaginaires dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont compris entre des limites données"; womit wir unsere Darstellung dieses höchst wichtigen Gegenstandes beschliessen wollen.

Digitized by Google

# VI.

## Neue Beweise einiger Sätze und allgemeine Bemerkungen über eine in der Analysis in gewissen Fällen gebräuchliche Art der Beweisführung.

Von dem

Herrn Doctor Stern

zu Göttingen.

---

Eine grosse Anzahl combinatorischer Lehrsätze wird bis jetzt in den Lehrbüchern dadurch bewiesen, dass man sie an die Betrachtung einer nach den Potenzen einer beliebigen Grösse $x$ fortschreitenden Reihe anknüpft. Dahin gehört z. B., um nur ganz Elementares zu erwähnen, das übliche Verfahren, wie man die Recursionsformel für die Coefficienten der $n$ten Potenz eines Polynoniums, den Zusammenhang der Coefficienten in der Exponentialreihe und Aehnliches findet. Auch die merkwürdigen Untersuchungen über die Theilung der Zahlen, welche Euler in dem 16. Cap. seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen angestellt hat, beruhen gänzlich auf Betrachtung solcher Reihen und es ist bis jetzt, so viel mir bekannt ist, nicht gelungen, die dort gefundenen Sätze, die elementarsten abgerechnet, ohne Hülfe der Reihen abzuleiten. So fruchtbar auch diese Art der Beweisführung ist, so scheint sie doch einen wissenschaftlichen Mangel zu haben, insofern sie ein Element $x$ einführt, welches in den zu beweisenden Sätzen gar nicht vorkommt. Sie hat hierin Aehnlichkeit mit dem Verfahren der synthetischen Geometrie, die Hülfslinien einführt, welche ebenfalls den zu beweisenden Sätzen fremd sind. So wie es aber in neuerer Zeit gelungen ist, solche Hülfsconstructionen fast gänzlich entbehrlich zu machen, so scheint es auch wünschenswerth, dass man alle Sätze, die nicht zu der Theorie der Reihen gehören, ohne deren Hülfe finde. Ich hoffe bei einer anderen Gelegenheit nachzuweisen, wie dies bei allen erwähnten Eulerschen Sätzen geleistet werden kann und will hier vorläufig nur für einen derselben einen sehr einfachen Beweis geben. Dieser sehr bekannte Satz sagt,

**dass man alle ganzen Zahlen aus den Gliedern der nach den Potenzen von 2 fortgehenden geometri-**

Digitized by Google

schen Progression, so dass jedes Glied nur einmal vorkommt, durch Addition bilden kann und zwar nur auf eine einzige Weise.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen, die man aus den $m+1$ Elementen 1, 2, $2^2 \ldots 2^m$ bilden kann, ist

$$m+1+\frac{m+1\,.\,m}{1\,.\,2}+\frac{m+1\,.\,m\,.\,m-1}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots=2^{m+1}-1.$$

Unter diesen Combinationsformen können nie zwei dem Werthe nach gleich sein, wenn man sich die Elemente durch Addition verbunden denkt. Die zwei Formen, welche gleich sein sollten, müssten entweder beide oder keine von beiden das Element 1 enthalten. Sei nun die eine

$$2^{k_1}+2^{k_2}\ldots+2^{k_r}+M,$$

die andere

$$2^{l_1}+2^{l_2}\ldots.+2^{l_n}+M,$$

wo $M$ die Summe der Elemente bezeichnen soll, die beiden Gruppen gemeinschaftlich sind, so dass also $k_1, k_2, \ldots k_r, l_1, l_2, \ldots l_n$ sämmtlich unter einander verschiedene Zahlen sind. Man hätte mithin

$$2^{k_1}+2^{k_2}\ldots+2^{k_r}=2^{l_1}+2^{l_2}\ldots+2^{l_n}.$$

Bezeichnet nun $k_1$ den kleinsten Exponenten, so hätte man

$$1+2^{k_2-k_1}\ldots+2^{k_r-k_1}=2^{l_1-k_1}+2^{l_2-k_1}\ldots+2^{l_n-k_1},$$

was unmöglich ist, da keine der Zahlen $k_2-k_1, \ldots k_r-k_1$, $l_1-k_1, \ldots l_n-k_1$ gleich Null sein kann. Jede der $2^{m+1}-1$ Combinationsformen muss also einen anderen Werth haben. Nun ist der Werth der ersten und kleinsten Combinationsform $=1$, der der letzten und grössten $=1+2+2^2\ldots+2^m=2^{m+1}-1$; mithin müssen die dazwischen liegenden Combinationen alle ganzen Zahlen zwischen 1 und $2^{m+1}-1$ und zwar jede nur einmal geben.

Auf dieselbe Weise kann man auch den anderen bekannten Satz beweisen, dass man jede Zahl aus der nach Potenzen von 3 aufsteigenden geometrischen Progression durch Addition und Subtraktion, und zwar nur auf eine Weise, bilden kann.

---

In den Nov. Act. Acad. Petr. T. IX. p. 44 findet Euler mit Hülfe der Integralrechnung den Ausdruck

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}+\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{9}{15}\ldots.$$

Die Richtigkeit dieses Ausdrucks lässt sich auch leicht vermittelst der Theorie der Kettenbrüche nachweisen. Es ist nämlich $\frac{1}{2}=\frac{1}{7-5}$, $5=\frac{7\,.\,5}{16-9}$, $9=\frac{11\,.\,9}{24-13}$, $13=\frac{15\,.\,13}{32-17}$ u. s. w., mithin

Digitized by Google

$$\frac{1}{2} = \cfrac{1}{7-\cfrac{7\,.\,5}{16-\cfrac{11\,.\,9}{24-\cfrac{15\,.\,13}{32\text{ etc.}}}}}$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch nach der bekannten Methode in eine Reihe, so erhält man den obigen Ausdruck.

---

# VII.

## Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen.

Mitgetheilt und bewiesen vom

Herausgeber.

---

In der Versammlung brittischer Gelehrten, welche im September 1837 zu Liverpool gehalten wurde, theilte Sir W. Hamilton folgende von Turner gefundene Eigenschaft der ungeraden Zahlen mit:

**Wenn man die Summen der 1sten; der 2ten und 3ten; der 4ten, 5ten und 6ten; der 7ten, 8ten, 9ten und 10ten; u. s. w. ungeraden Zahl bildet; so erhält man die Cubi der natürlichen Zahlen nach der Reihe.**

Es ist nämlich

$$1^3 = 1,$$
$$2^3 = 3+5,$$
$$3^3 = 7+9+11,$$
$$4^3 = 13+15+17+19,$$
$$5^3 = 21+23+25+27+29,$$

u. s. w.

welches auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Die ersten Glieder der arithmetischen Reihen, deren Summen durch die Cubikzahlen $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots n^3$ dargestellt werden sollen, sind

$$1\,.\,0+1,\ 2\,.\,1+1,\ 3\,.\,2+1,\ 4\,.\,3+1,\ 5\,.\,4+1, \ldots, n(n-1)+1;$$

welches leicht durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ bewiesen werden kann, indem nämlich, wenn dieses Gesetz für $n$ gilt, das

Digitized by Google

erste Glied der arithmetischen Reihe, deren Summe nach dem Turnerschen Satze durch $(n+1)^2$ dargestellt werden soll, nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen offenbar

$$\{n(n-1)+1\}+2(n+1-1)=n(n-1)+2n+1=(n+1)n+1$$

ist, so dass also das bemerkte Gesetz für $n+1$ gilt, wenn es für $n$ gilt, und daher allgemein richtig ist.

Hiernach kommt es nun, um den Turnerschen Satz zu beweisen, bloss darauf an, zu zeigen, dass

$$n^2=\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+3\}+\{n(n-1)+5\}+\ldots+\{n(n-1)+2n-1\}$$

ist. Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist aber eine gewöhnliche arithmetische Reihe, deren Summe bekanntlich

$$\frac{\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+2n-1\}}{2}\,.\,n=n^2\,.\,n=n^3$$

ist, welches bewiesen werden sollte.

Mittelst dieses Turnerschen Satzes kann man nun auch leicht die Reihe der Cubikzahlen $1^3$, $2^3$, $3^3$, $4^3$, .... $n^3$ summiren.

Nach demselben ist nämlich offenbar

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=1+3+5+7+9+\ldots+\{(n+1)n-1\},$$

und folglich, weil

$$(n+1)\,n-1=2\,.\,\frac{(n+1)n}{2}-1,$$

also $\frac{1}{2}(n+1)\,n$ die Anzahl der Glieder der arithmetischen Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{1+\{(n+1)n-1\}}{2}\,.\,\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\left\{\frac{(n+1)n}{2}\right\}^2,$$

wodurch die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden ist.

Als eine Eigenschaft der geraden Zahlen kann man sich folgenden ebenfalls leicht zu beweisenden Satz merken:

$$1^3+1=1(1^3+1)=\ 2,$$
$$2^3+2=2(2^3+1)=\ 4+6,$$
$$3^3+3=3(3^3+1)=\ 8+10+12,$$
$$4^3+4=4(4^3+1)=14+16+18+20,$$
$$5^3+5=5(5^3+1)=22+24+26+28+30,$$

u. s. w.

Digitized by Google

# VIII.

## Einige Resultate aus verglichenen Barometer-Beobachtungen in Berlin und Neustadt-Eberswalde.

Von dem

Herrn Professor F. W. Schneider

an der Königlichen höhern Forst-Lehr-Anstalt zu Neustadt-Eberswalde.

---

Eine Reihe fortlaufender meteorologischer Beobachtungen, die ich in den Jahren 1835 und 1836 auf Veranlassung des Herrn Prof. Berghaus am hiesigen Orte (Neustadt-Eberswalde) sechsmal täglich anstellte, verglich ich, soweit sie das Barometer betrafen, für den Zeitraum vom 1. Januar bis 11. März 1836 durch graphische Darstellung mit den gleichzeitigen Beobachtungen des Herrn Prof. Mädler in Berlin. Der Nullpunkt meines Barometers (Pistor'sches mikroskopisches Heber-B. Nr. 135, der hiesigen Königl. Forstlehranstalt gehörig) lag 64,89 pariser Fuss über der Ostsee bei Swinemünde, wie durch einen von dem K. Ingenieurgeographen Herrn Bertram und mir bewirkten Anschluss an das Nivellement des Herrn Majors Baeyer zwischen Swinemünde und Berlin, und zwar an die Station Pimpinellenberg bei Oderberg, ermittelt worden war.— Die analoge Bestimmung für das Mädlersche Barometer ist mir nicht bekannt geworden; nur so viel ist gewiss, dass eine Höhendifferenz beider Beobachtungsorte vorhanden war, und diese wenigstens 45 Fuss (Berlin über Neustadt) betragen musste. (Vergl. Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, von J. J. Baeyer, Berlin 1840, Seite 112.) — Die Mädlerschen Beobachtungen entnahm ich aus der Berliner Vossischen Zeitung, wo sie für $+ 10° R.$ Normaltemperatur des Quecksilbers, täglich mitgetheilt werden, nachdem ich sie wie die meinigen auf 0° Normaltemperatur reducirt hatte. Die horizontale Entfernung beider Beobachtungsorte beträgt ohngefähr 6 Meilen, und ihre Verbindungslinie, von Berlin aus nordöstlich, fällt in die Richtung der herrschenden stärkeren Winde und Stürme.

Die Barometerstände während des oben bezeichneten Zeitraums waren sehr veränderlich; Perioden höherer und hoher Stände (über 28 Zoll) wechselten in kurzen Uebergängen mit ausgezeichnet niederem Luftdruck, der einmal sogar unter 27 Zoll herabging (den 30. Januar Mittags, wo ich 321,92‴ beobachtete).

Den gleichzeitigen Gang beider Kurven habe ich auf Tafel I. in einer Zeichnung entworfen, in der Art, dass ihre Ordinaten die

Digitized by Google

Barometerhöhen unmittelbar in pariser Maass längs zwei mit 27″ und 28″ bezeichneten Abscissenaxen darstellen, woraus der Vortheil entsteht, dass man den Gang der barometrischen Differenzen sofort in demselben Maassstabe erblickt, wie ihn die Scala des Instruments anzeigte. Obgleich der Zeitraum der verglichenen Beobachtungen nur kurz ist, so zeigen sich doch als deutlich hervortretend folgende Phänomene:

1) Die Neustädter Kurve liegt fast überall höher als die Berliner, wie sich ohnehin nach der Höhendifferenz beider Orte erwarten liess. Nur am 17., 28., 30. und 31. Januar und am 16. Februar war der Barometerstand in Neustadt kurze Zeit hindurch niedriger als der in Berlin, aber mit so geringen Unterschieden, dass sie bei dem Maassstabe der Zeichnung nicht überall sichtbar werden.

2) Alle bedeutenden Aufgänge und Niedergänge sind beiden Kurven gemein.

3) Aber das Phänomen, welches ich hauptsächlich hier zur Sprache bringen wollte, ist die Veränderlichkeit in der Differenz der Barometerstände an beiden Beobachtungsorten, und dabei das Gesetz dieser Veränderlichkeit in den mit zahlreichen Wind- und Sturmperioden durchzogenen Monaten Januar und Februar:

Bei jedem bedeutenden und plötzlichen Niedergang des Barometers nähern sich die Neustädter und Berliner Kurven, zuweilen fast bis zur Kongruenz (s. u. a. den 18., 23., 24., 29. und 30. Januar), bei jedem Aufgange trennen sie sich wieder, und in den Perioden der höheren Barometerstände und bei mehr windstiller und beständiger Witterung sind die Abweichungen am grössten. Ein Gleiches findet Statt bei Niedergängen, die allmählich erfolgen, und bei tiefen Barometerständen, welche mehrere Tage mit geringeren Schwankungen anhalten.

Allerdings kann die Differenz der Barometerhöhen an zwei Orten, die nicht in demselben Niveau liegen, nicht konstant bleiben, sondern muss sich vermöge des Mariottischen Gesetzes bei niederem Luftdruck verkleinern; dass aber diese Ursache nur einen fast unmerklichen Antheil an dem so bedeutenden Zusammengehen der beiden Kurven in ihren tieferen Regionen haben kann, ergiebt sich aus der einfachsten Rechnung, und bedarf keiner Erläuterung.

Die in Nr. 3 gemachte Bemerkung berechtigt zu folgenden Schlüssen:

*a*) Bei stürmischem Wetter, mit welchem ein schnelles Sinken der Barometersäule verbunden zu sein pflegt, sind die Luftschichten von gleicher Dichtigkeit nicht horizontal, sondern ihre Lage nähert sich der Parallelität mit dem Boden.

In der Richtung von Berlin her erhebt sich das Terrain von 100 zu 150 bis 200′, und fällt dann in das Finowthal von 40′ absoluter Höhe ab; die Luft wird also in ihrer Bewegung von Südwesten her zuerst aufgestaut, und sinkt dann in die tiefere Gegend. Hiermit scheint der eben ausgesprochene Satz in ganz einfachem Zusammenhange zu stehen, insofern die wellenförmige Gestalt der Erdoberfläche auf den Weg der bei windstillem Wetter horizontalen Luftschichten von gleicher Dichtigkeit unmöglich ohne Einfluss bleiben kann. Sobald aber dieser Einfluss einzutreten beginnt, ist die Differenz der gleichzeitigen Barometerstände nicht mehr eine reine Function der Höhendifferenz beider Beobachtungsorte im ei-

Digitized by Google

gentlichen Sinne, sondern sie entspricht zugleich der relativen Höhenlage dieser Punkte gegen den Boden. Der Nullpunkt des Instruments, an welchem ich in Neustadt beobachtete, befand sich 6¼ pariser Fuss über dem Boden; wenn nun auch das Mädlersche Barometer vielleicht 20′ über der Erdoberfläche in Berlin befindlich war, so ist eben die Differenz doch nur so gering, und der Unterschied der absoluten Höhen wieder so gross, dass die Annäherung der beiden Beobachtungskurven mit der eben versuchten Erklärung aufs Beste übereinstimmt. — Allerdings war das Mädlersche Barometer mit dem meinigen nicht verglichen; da sich aber bei ruhigem Wetter die Differenzen des beobachteten Luftdrucks dem Höhenunterschiede der Stationen angemessen zeigten (s. die Zeichnung), so darf daraus auf gute Uebereinstimmung beider Instrumente geschlossen werden.

*b*) Wenn man die Höhendifferenz zweier Punkte, die sich in gleicher oder nahe gleicher Entfernung vom Boden befinden, aus einer oder einigen gleichzeitigen Barometerbeobachtungen ableitet, so erhält man das Resultat um eine, weder durch Rechnung noch durch Erfahrung jemals mit einiger Sicherheit zu bestimmende Grösse viel wahrscheinlicher zu klein als zu gross. Der Fehler wächst mit der Geschwindigkeit des Windes, wenigstens wenn der Strich desselben nahe oder ganz in die Verbindungslinie der beiden Stationen fällt, und wenn der Barometergang am Tage der Beobachtung eine schnelle Bewegung aufwärts oder abwärts erleidet.

*c*) Die Berechnung des Höhenunterschiedes derselben Punkte aus den durch mehrjährige Beobachtung gefundenen mittleren Barometerständen giebt um so gewissere falsche, nämlich zu kleine Resultate, je genauer die Mittel sind, d. h. aus je längeren Beobachtungszeiträumen sie abgeleitet wurden*). Denn die mittlere Differenz des Luftdrucks an beiden Orten (oder der Logarithmus seines mittleren Quotienten) setzt sich zusammen aus dem Mittel der normalen Differenzen bei hohem Barometerstande und ruhiger Luft, und aus den viel zu kleinen Differenzen während der Sturmperioden. Eine Bestätigung dieses Satzes glaube ich nachweisen zu können durch die Zahlen, in welchen Herr Major Baeyer (Nivellement zw. Swinemünde und Berlin, Seite V) die Berghaus'schen Berechnungen der Höhe Berlins über der Ostseefläche zusammenstellt, die sich auf zwei- bis neunjährige Beobachtungsreihen in Berlin, Swinemünde, Stralsund, Danzig, Königsberg, Apenrade und Altona gründen. Diese Berechnungen gaben für die Höhe von Berlin (Strassenpflaster im Thorwege der alten Sternwarte) resp. 14,74, 14,33, 14,75, 14,75, 15,23, 14,92, im Mittel 14,78 Toisen, mithin sämmtlich um Beträchtliches zu kleine Werthe, da durch das Baeyer'sche Nivellement dieselbe Höhe = 17,376 Tois. gefunden wurde.

Man kann also diesen Fehler bezeichnen als denjenigen, welchen die nicht horizontale, vielmehr der Parallelität mit dem Boden sich nähernde Bewegung der Luft bei heftigeren Winden hervorbringt, und es dürfte misslich sein, denselben durch eine Korrektion beseitigen zu wollen, die wohl weit

*) Diesen allerdings etwas paradox scheinenden Satz empfiehlt der geehrte Herr Verf. in einem an mich gerichteten Schreiben der sorgfältigen Prüfung der Leser. G.

Digitized by Google

unsicherer und im Allgemeinen weit beträchtlicher ausfallen dürfte, als etwa die Korrektion wegen Differenz der Breiten, oder die wegen Abnahme der Schwerkraft in der Richtung der Vertikalen. Ich glaube, man würde zuverlässigere Nivellements aus Barometerbeobachtungen erhalten, als bisher, wenn man die Methode der vieljährigen Mittel gänzlich verliesse, dafür, zur Erleichterung der Uebersicht, die korrespondirenden Beobachtungen graphisch zusammenstellte, und alsdann nur diejenigen Perioden aus den Sommer- und Herbstmonaten auswählte und zur Berechnung der Mittel verwendete, welche durchaus keine plötzlichen Schwankungen des Luftdrucks gezeigt hätten.

Obgleich ich kaum zu hoffen wage, durch Vorstehendes gelehrten Meteorologen, zu welchen ich mich nicht rechnen darf, etwas Neues gesagt zu haben, so bedaure ich doch, dass es mir nicht vergönnt war, die graphische Vergleichung des hiesigen und Berliner Barometerganges während eines längern Zeitraumes fortzusetzen. Bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft wäre es gewiss nicht mehr ohne Interesse, folgende Fragen durch zahlreiche korrespondirende, und übersichtlich zusammengestellte Beobachtungen beantwortet zu erhalten:

Wie verhält sich der gleichzeitige Barometergang:

1) Wenn die Station *A* nahe am Boden, die Station *B* entfernt vom Boden (z. B. auf einem hohen Thurme) aber in demselben Niveau mit *A*, befindlich wäre. Sollte hier nicht bei ruhiger Luft und hohem Druck ein gleicher Barometerstand, aber während der Windperioden bei niederem Druck, in der Station *A* ein höherer Barometerstand als der gleichzeitige in *B* zu erwarten sein? Die Kurven würden also die entgegengesetze Erscheinung zeigen, als die der beiliegenden Zeichnung, d. h. die Berührung würde in den Regionen der hohen und länger anhaltenden niederen, die Abweichung in den niederen von kürzerer Dauer, eintreten. Die Berechnung der Höhendifferenz aus den Mitteln ergäbe nicht 0, sondern *A* tiefer als *B*.

2) Wenn die Stationen *A* und *B* in gleicher Entfernung vom Boden, aber in verschiedenen Niveaus lägen? Ein Beitrag zur Untersuchung dieses Falles war der Zweck des vorliegenden Aufsatzes und der beigegebenen Zeichnung.

3) Wenn sich der Boden unter *A* und *B* in demselben Niveau befände? Hier würden, wenn *A* und *B* verschiedene absolute Höhe hätten, auch bei schnell abnehmendem Luftdruck mehr normale Differenzen der Barometerhöhen zu erwarten sein, mithin die Kurven bei den Niedergängen nur geringe Konvergenz zeigen, und die Berechnung der Höhendifferenz aus den barometrischen Mitteln liesse die relativ zuverlässigsten Resultate erwarten.

4) Wie unterscheidet sich der gleichzeitige Gang der Barometerstände, jenachdem die Verbindungslinie der Stationen in die Richtung der herrschenden Winde, oder mehr rechtwinklig mit dieser Richtung fällt? Auch dürfte die Lage des Beobachtungsortes, auf einem langgestreckten Erdrücken oder isolirten Berge, welcher den bewegten unteren Luftschichten ein Ausweichen zur Seite gestattet, nicht weniger wesentliche Modifikationen in die Erscheinungen bringen.

Digitized by Google

# IX.

## Ueber Reisebarometer.

Von dem

**Herrn Professor F. W. Schneider**

an der Königlichen höhern Forst-Lehr-Anstalt zu Neustadt-Eberswalde.

---

Bekanntlich ist die Reduction der Barometerstände auf eine feste Normaltemperatur des Quecksilbers eine so wichtige Korrektion, dass die Vernachlässigung derselben barometrische Beobachtungen für wissenschaftliche Zwecke fast werthlos macht. Man versieht desshalb jedes Barometer, das zu genauen Untersuchungen dienen soll, mit einem Thermometer, Behufs der Temperaturangabe einer Masse Quecksilbers, welches in einer kurzen Röhre, von gleichem Durchmesser mit dem der Barometerröhre, sich so nahe neben dieser befindet, dass eine gleiche Temperatur beider vorausgesetzt werden darf.

Leider aber wird noch fortwährend im Bau der Barometer, namentlich der zu Beobachtungen auf Reisen bestimmten, ein Versehen begangen, durch welches die Sicherheit in der Korrektion der Quecksilbertemperatur bedeutend gefährdet erscheint. Ich meine diejenigen Instrumente, welche, wie die sonst so vortrefflichen Greinerschen und Pistorschen mikroskopischen Heberbarometer, mit einer etwa auf $\frac{3}{4}$ der Länge fest in einen Holzrahmen verschlossenen, im Uebrigen frei dem Luftzuge ausgesetzten Quecksilberröhre versehen sind. Bei der schlechten Wärmeleitung des Holzes bedarf es offenbar einer längeren Zeit (oft sind $\frac{1}{4}$ Stunden nicht ausreichend), bevor die Temperatur des eingeschlossenen Quecksilbers sich mit der Lufttemperatur ins Gleichgewicht setzt, während dies bei dem im oberen Theile und im kürzeren Schenkel enthaltenen Quecksilber viel eher geschehen muss. Hat man sich nach einer im Freien gelegenen Beobachtungsstation begeben, ist vielleicht das Futteral des Barometers und somit sein ganzer Inhalt durch die aufprallenden Sonnenstrahlen bedeutend erwärmt worden; so zeigt innerhalb geraumer Zeit nach dem Aufhängen des Instruments das Thermometer desselben eine um mehrere Grade höhere Temperatur als die umgebende Luft, da doch ohne Zweifel derjenige Theil der Quecksilbersäule, der in den durchbrochenen Räumen der Holzfassung liegt, bereits einen der Luftwärme näher kommenden Grad angenommen haben muss. Man hat daher durchaus keine Gewährschaft, dass das Quecksilber des Barometers gleichförmig er-



Digitized by Google

wärmt sei, wenn man nicht einem oft sehr lästigen Zeitverlust durch stundenlanges Warten sich hingeben will. Selbst dann noch möchte unter gewissen Umständen zweifelhaft sein, ob die Temperatur der verschiedenen Theile der Säule unter einander und mit der Temperatur des Thermometers bis auf Zehntelgrade übereinstimmen, und es bleibt eine Unsicherheit, welche der sonstigen Einrichtung des Instruments (der mikroskopischen Einstellung und dem Nonius auf 50tel Linien) wenig angemessen ist.

Beim Gebrauch ähnlicher Barometer zu Beobachtungen im Zimmer verliert zwar der erwähnte Nachtheil an Erheblichkeit, sobald man in ungeheizten Zimmern beobachtet, wo sich die Temperatur langsam ändert; in geheizten Zimmern aber ist der Uebelstand um so grösser, weil man, an bestimmte Beobachtungszeiten gebunden, die Ausgleichung der Temperatur-Differenzen nicht abwarten kann. Es entsteht also die Frage, ob nicht bei der Verfertigung der Barometer folgende Grundsätze zu befolgen wären:

1) Die Quecksilbersäule muss nach der ganzen Länge beider Schenkel frei liegen, entweder in einem durchbrochenen, durch schmale Metallbänder zusammengehaltenen Gestell, oder vor demselben, und so weit davon entfernt, dass sie ringsum von der Luft bestrichen werden kann.

2) Eine ganz gleichartige Lage muss die Quecksilberröhre haben, in welcher sich die Kugel des fixen Thermometers befindet.

Da es längst transportable Barometer giebt, deren Röhren frei vor der Holzwand liegen, so fällt der Einwand weg, dass die partielle Einschliessung zur Sicherung des Instruments unvermeidlich sei. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch noch behaupten, dass ein Thermometer der Skala, womit man genauere Instrumente zu versehen pflegt, ganz füglich entbehrt werden kann. Denn wenn angenommen wird, dass die Längenausdehnung des Messings $\frac{1}{10}$ beträgt von der Ausdehnung der Quecksilbersäule, so genügt es selbst bei den genauesten Messungen, die Temperatur der Skala nur in ganzen Graden zu wissen, und um ganze Grade wird das Thermometer der Skala nie vom Thermometer des Quecksilbers abweichen, wenn letzteres nicht im Holze eingeschlossen ist. Man kann folglich die Temperatur der Skala vom Thermometer des Quecksilbers ablesen, ohne fürchten zu müssen, die reducirte Barometerhöhe nicht mit eben so vielen Hunderttheilen der pariser Linie zu erhalten, als wenn man die Temperatur der Skala besonders gemessen hätte.

Digitized by Google

# X.

## Das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten, als specieller Fall eines allgemeinern Satzes betrachtet.

Vom

Herausgeber.

Längst ist den Mathematikern der merkwürdige Satz von den Binomial-Coefficienten bekannt, auf welchen Euler, Segner, L'Huilier, Rothe, Busse und andere neuere Geometer den kürzesten und einleuchtendsten Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner grössten Allgemeinheit gegründet haben. Nicht so allgemein bekannt dürfte aber die Bemerkung sein, dass in dem in Rede stehenden Satze von den Binomial-Coefficienten, wenn man denselben nur auf eine zweckmässige Weise erweitert, der Binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten selbst als ein specieller Fall enthalten ist, welches zu zeigen der Hauptzweck des vorliegenden kleinen Aufsatzes ist.

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden die Grösse

$$\frac{n(n+k)\,(n+2k)\,\ldots\,(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,p},$$

wo $n$ und $k$ beliebige Grössen sein können, $p$ aber eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, durch $u_p$ bezeichnen, so dass also

$$1.\quad u_p = \frac{n(n+k)\,(n+2k)\,\ldots\,(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,p},$$

und folglich für $k = -1$

$$2.\quad u_p = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,p}$$

ist, welches Letztere die bekannte Form der Binomial-Coefficienten ist.

Nach 1. ist

$$u_p = \frac{n(n+k)\,(n+2k)\,\ldots\,(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,p},$$

$$u_{p+1} = \frac{n(n+k)\,(n+2k)\,\ldots\,(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(p+1)};$$



Digitized by Google

und folglich offenbar

$$3.\quad \overset{k}{n}_{p+1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1}.$$

Weil nach 1.

$$\overset{k}{n}_1 = \frac{n}{1}$$

ist; so muss man, wenn die Relation 3. noch für $p=0$ gelten soll, offenbar

$$4.\quad \overset{k}{n}_0 = 1$$

setzen, welches im Folgenden auch immer geschehen wird.

Nach 1. ist ferner

$$(n \overset{k}{+} k)_p = \frac{(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p},$$

und folglich, weil nach dem Obigen offenbar

$$\overset{k}{n}_{p+1} = \frac{(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p} \cdot \frac{n}{p+1}$$

ist,

$$5.\quad \overset{k}{n}_{p+1} = (n \overset{k}{+} k)_p \cdot \frac{n}{p+1},$$

welche Relation auch nur dann noch für $p=0$ gilt, wenn man, wie schon in 4. geschehen ist, allgemein $n_0 = 1$ setzt.

Nach 3. ist

$$(n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n+pk}{p},$$

und folglich

$$(n \overset{k}{+} k)_{p-1} + (n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n+p\,(k+1)}{p}.$$

Nach 5. ist aber

$$\overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n}{p} \text{ oder } (n \overset{k}{+} k)_{p-1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{p}{n}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$6.\quad (n \overset{k}{+} k)_{p-1} + (n \overset{k}{+} k)_p = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+p\,(k+1)}{n},$$

eine für das Folgende sehr wichtige Relation. Setzt man in derselben $k=-1$, so erhält man

$$7.\quad (n \overset{-1}{-} 1)_{p-1} + (n \overset{-1}{-} 1)_p = \overset{-1}{n}_p,$$

worin ein sehr bekannter Satz von den Binomial-Coefficienten enthalten ist.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir uns nun mit der Summirung der in vielen Beziehungen wichtigen und merkwürdigen Reihe

$$\overset{k}{m}_p + \overset{k}{m}_{p-1} \cdot \overset{k}{n}_1 + \overset{k}{m}_{p-2} \cdot \overset{k}{n}_2 + \ldots + \overset{k}{m}_2 \cdot \overset{k}{n}_{p-2} + \overset{k}{m}_1 \cdot \overset{k}{n}_{p-1} + \overset{k}{n}_p$$

beschäftigen. Der Kürze wegen bezeichnen wir diese Summe durch $F(p)$, und setzen also

Digitized by Google

8. $F(p) = \overset{\circ}{m}_p + \overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \overset{\circ}{n}_1 + \overset{\circ}{m}_{p-2} \cdot \overset{\circ}{n}_2 + \ldots + \overset{\circ}{m}_2 \cdot \overset{\circ}{n}_{p-2} + \overset{\circ}{m}_1 \cdot \overset{\circ}{n}_{p-1} + \overset{\circ}{n}_p.$

Die Summe $F(p)$ kann aber auf folgende Art gefunden werden. Es ist, wovon man sich durch eine ganz einfache Rechnung auf der Stelle überzeugen wird,

$$\begin{aligned}
\frac{m+n+pk}{p+1} &= \frac{m+pk}{p+1} + \frac{n}{p+1} \\
&= \frac{m+(p-1)k}{p+1} + \frac{n+k}{p+1} \\
&= \frac{m+(p-2)k}{p+1} + \frac{n+2k}{p+1} \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&= \frac{m+2k}{p+1} + \frac{n+(p-2)k}{p+1} \\
&= \frac{m+k}{p+1} + \frac{n+(p-1)k}{p+1} \\
&= \frac{m}{p+1} + \frac{n+pk}{p+1}.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichung 8. mit der Grösse

$$\frac{m+n+pk}{p+1},$$

indem man dabei für diese Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 8. ihre obigen Zerlegungen nach der Reihe einführt; so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
F(p) \cdot \frac{m+n+pk}{p+1} = {} & \overset{\circ}{m}_p \cdot \frac{m+pk}{p+1} && + \overset{\circ}{m}_p \cdot \frac{n}{p+1} \\
& + \overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \frac{m+(p-1)k}{p+1} \cdot \overset{\circ}{n}_1 && + \overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \overset{\circ}{n}_1 \cdot \frac{n+k}{p+1} \\
& + \overset{\circ}{m}_{p-2} \cdot \frac{m+(p-2)k}{p+1} \cdot \overset{\circ}{n}_2 && + \overset{\circ}{m}_{p-2} \cdot \overset{\circ}{n}_2 \cdot \frac{n+2k}{p+1} \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \overset{\circ}{m}_2 \cdot \frac{m+2k}{p+1} \cdot \overset{\circ}{n}_{p-2} && + \overset{\circ}{m}_2 \cdot \overset{\circ}{n}_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p+1} \\
& + \overset{\circ}{m}_1 \cdot \frac{m+k}{p+1} \cdot \overset{\circ}{n}_{p-1} && + \overset{\circ}{m}_1 \cdot \overset{\circ}{n}_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p+1} \\
& + \frac{m}{p+1} \cdot \overset{\circ}{n}_p && + \overset{\circ}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1}.
\end{aligned}$$

Weil nun nach 3.

$$\overset{\circ}{m}_p \cdot \frac{m+pk}{p+1} = \overset{\circ}{m}_p \cdot \frac{m+pk}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} = \overset{\circ}{m}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1},$$

$$\overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \frac{m+(p-1)k}{p+1} = \overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \frac{m+(p-1)k}{p} \cdot \frac{p}{p+1} = \overset{\circ}{m}_p \cdot \frac{p}{p+1},$$

$$\overset{\circ}{m}_{p-2} \cdot \frac{m+(p-2)k}{p+1} = \overset{\circ}{m}_{p-2} \cdot \frac{m+(p-2)k}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} = \overset{\circ}{m}_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1},$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$\overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \frac{m+2k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \frac{m+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_3 \cdot \frac{3}{p+1},$$

$$\overset{\blacktriangle}{m}_1 \cdot \frac{m+k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_1 \cdot \frac{m+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$$\frac{m}{p+1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_1 \cdot \frac{1}{p+1};$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\frac{n}{p+1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \frac{1}{p+1},$$

$$\overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \frac{n+k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \frac{n+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$$\overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{n+2k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{n+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_3 \cdot \frac{3}{p+1},$$

u. s. w.

$$\overset{\blacktriangle}{n}_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1},$$

$$\overset{\blacktriangle}{n}_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p} \cdot \frac{p}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_p \cdot \frac{p}{p+1},$$

$$\overset{\blacktriangle}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{n}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$F(p) \cdot \frac{m+n+k}{p+1} = \overset{\blacktriangle}{m}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_p \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \frac{1}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_p \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \frac{p}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_{p-1} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{2}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_{p-1} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{p-1}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_{p-2} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_3 \cdot \frac{3}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_{p-2} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \frac{p-2}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_{p-3} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_4 \cdot \frac{4}{p+1}$$

u. s. w.

$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_{p-2} \cdot \frac{3}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_2 \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_{p-1} \cdot \frac{2}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{m}_1 \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_p \cdot \frac{p}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_1 \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_p \cdot \frac{1}{p+1} + \overset{\blacktriangle}{n}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

$$= \overset{\blacktriangle}{m}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_p \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_1 \cdot \left\{\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right\}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_{p-1} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_2 \cdot \left\{\frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1}\right\}$$
$$+ \overset{\blacktriangle}{m}_{p-2} \cdot \overset{\blacktriangle}{n}_3 \cdot \left\{\frac{p-2}{p+1} + \frac{3}{p+1}\right\}$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$+ \overset{\wedge}{m}_2 \cdot \overset{\wedge}{n}_{p-1} \cdot \left\{\frac{2}{p+1} + \frac{p-1}{p+1}\right\}$$
$$+ \overset{\wedge}{m}_1 \cdot \overset{\wedge}{n}_p \cdot \left\{\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1}\right\}$$
$$+ \overset{\wedge}{n}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

$$= \overset{\wedge}{m}_{p+1} + \overset{\wedge}{m}_p \cdot \overset{\wedge}{n}_1 + \overset{\wedge}{m}_{p-1} \cdot \overset{\wedge}{n}_2 + \overset{\wedge}{m}_{p-2} \cdot \overset{\wedge}{n}_3 + \ldots + \overset{\wedge}{m}_2 \cdot \overset{\wedge}{n}_{p-1} + \overset{\wedge}{m}_1 \cdot \overset{\wedge}{n}_p + \overset{\wedge}{n}_{p+1}.$$

So wie nun oben in 8.

$$F(p) = \overset{\wedge}{m}_p + \overset{\wedge}{m}_{p-1} \cdot \overset{\wedge}{n}_1 + \overset{\wedge}{m}_{p-2} \cdot \overset{\wedge}{n}_2 + \ldots + \overset{\wedge}{m}_2 \cdot \overset{\wedge}{n}_{p-2} + \overset{\wedge}{m}_1 \cdot \overset{\wedge}{n}_{p-1} + \overset{\wedge}{n}_p$$

gesetzt worden ist, muss natürlich

$$F(p+1) = \overset{\wedge}{m}_{p+1} + \overset{\wedge}{m}_p \cdot \overset{\wedge}{n}_1 + \overset{\wedge}{m}_{p-1} \cdot \overset{\wedge}{n}_2 + \overset{\wedge}{m}_{p-2} \cdot \overset{\wedge}{n}_3 + \ldots + \overset{\wedge}{m}_2 \cdot \overset{\wedge}{n}_{p-1} + \overset{\wedge}{m}_1 \cdot \overset{\wedge}{n}_p + \overset{\wedge}{n}_{p+1}$$

gesetzt werden, und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich daher unmittelbar die folgende Relation:

$$9.\ F(p+1) = F(p) \cdot \frac{m+n+pk}{p+1}.$$

Weil nun offenbar

$$F(1) = \overset{\wedge}{m}_1 + \overset{\wedge}{n}_1 = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \frac{m+n}{1}$$

ist; so ist nach dieser Relation

$$F(1) = \frac{m+n}{1},$$

$$F(2) = F(1) \cdot \frac{m+n+k}{2}$$
$$= \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n+k}{2},$$

$$F(3) = F(2) \cdot \frac{m+n+2k}{3}$$
$$= \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n+k}{2} \cdot \frac{m+n+2k}{3},$$

$$F(4) = F(3) \cdot \frac{m+n+3k}{4}$$
$$= \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n+k}{2} \cdot \frac{m+n+2k}{3} \cdot \frac{m+n+3k}{4},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und das Gesetz, nach welchem die obigen Ausdrücke fortschreiten, liegt deutlich vor Augen. Also ist in völliger Allgemeinheit

Digitized by Google

10. $F(p) = \frac{(m+n)(m+n+k)(m+n+2k)\ldots(m+n+(p-1)k)}{1.2.3.4\ldots.p}$

d. i. nach 1.

11. $F(p) = (m+n)_p$,

und folglich nach 8.

12. $(m+n)_p = m_p + m_{p-1}.n_1 + m_{p-2}.n_2 + \ldots + m_2.n_{p-2} + m_1.n_{p-1} + n_p$,

eine auf jeden Fall höchst merkwürdige Relation. Für $k = -1$ wird dieselbe

13. $(m+n)_p = m_p + m_{p-1}.n_1 + m_{p-2}.n_2 + \ldots + m_2.n_{p-2} + m_1.n_{p-1} + n_p$,

welches der oben erwähnte längst bekannte Satz von den Binomial-Coefficienten ist.

Setzt man aber in der Gleichung 12., wie es verstattet ist, $k = 0$; so erhält man

$$(m+n)_p = m_p + m_{p-1}.n_1 + m_{p-2}.n_2 + \ldots + m_2.n_{p-2} + m_1.n_{p-1} + n_p.$$

Weil nun nach 1. überhaupt

$$n_p = \frac{n^p}{1\ldots p}$$

ist; so ist wegen vorstehender Gleichung

$$\frac{(m+n)^p}{1\ldots p} = \frac{m^p}{1\ldots p} + \frac{m^{p-1}}{1\ldots(p-1)}\cdot\frac{n}{1} + \frac{m^{p-2}}{1..(p-2)}\cdot\frac{n^2}{1.2} + \frac{m^{p-3}}{1..(p-3)}\cdot\frac{n^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{n^{p-2}}{1..(p-2)} + \frac{m}{1}\cdot\frac{n^{p-1}}{1..(p-1)} + \frac{n^p}{1\ldots p},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $1\ldots p$ multiplicirt,

$$(m+n)^p = m^p + \frac{p}{1}m^{p-1}n + \frac{p(p-1)}{1.2}m^{p-2}n^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}m^{p-3}n^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{p(p-1)\ldots3}{1\ldots(p-2)}m^3n^{p-2} + \frac{p(p-1)\ldots2}{1\ldots(p-1)}mn^{p-1} + \frac{p(p-1)\ldots1}{1\ldots p}n^p,$$

d. i. nach 1.

14. $(m+n)^p = m^p + p_1.m^{p-1}n + p_2.m^{p-2}n^2 + p_3.m^{p-3}n^3 + \ldots.$
$$\ldots + p_{p-2}.m^2n^{p-2} + p_{p-1}.mn^{p-1} + p_p.n^p,$$

in welcher Gleichung das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten enthalten ist.

Hieraus sieht man also, dass die merkwürdige allgemeine Relation 12. das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten als einen speciellen Fall in sich enthält.

Digitized by Google

# XI.

## Bemerkung zur Trigonometrie.

Vom

Herausgeber.

---

Wenn der Winkel oder Bogen $\varphi$ mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi = A \text{ oder } \sin\varphi = A$$

zu finden ist, und der absolute Werth von $A$ der Einheit sehr nahe kommt, so kann $\varphi$ mittelst der gewöhnlichen goniometrischen Tafeln nicht mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden, weshalb man auch beim trigonometrischen Calcul solchen Formeln den Vorzug zu geben pflegt, bei denen die gesuchten Winkel alle mittelst ihrer Tangenten oder Cotangenten gefunden werden. Wie es mir scheint, kann man sich aber in solchen Fällen wie die obigen jederzeit auf folgende Art helfen.

Man berechne einen Hülfswinkel $\Theta$ mittelst der Formel

$$\tang\Theta = A,$$

welches jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit geschehen kann. Ist dann

$$\cos\varphi = A,$$

so ist $\cos\varphi = \tang\Theta$, und folglich

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\tang\Theta}{1+\tang\Theta},$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \tang(45°-\Theta),\ \tang\tfrac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\tang(45°-\Theta)},$$

mittelst welcher Formel $\varphi$ jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden kann. Ist dagegen

$$\sin\varphi = A,$$

so ist $\sin\varphi = \tang\Theta$, und folglich

$$\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1-\tang\Theta}{1+\tang\Theta},$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

Digitized by Google

$\tang(45°-\frac{1}{2}\varphi)^2 = \tang(45°-\Theta)$, $\tang(45°-\frac{1}{2}\varphi) = \pm\sqrt{\tang(45°-\Theta)}$, mittelst welcher Formel $\varphi$ wieder jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann.

Um ein Beispiel zu geben, so sei aus zwei Seiten $a$, $b$ eines ebenen Dreiecks und dem Gegenwinkel $\alpha$ der einen $a$ dieser beiden Seiten der Gegenwinkel $\beta$ der anderen Seite $b$ zu finden, und es sei gegeben

$$\alpha = 18°\,.\,14'\,.\,0'' \text{ und } \log\frac{b}{a} = 0{,}5046112.$$

Weil nun bekanntlich $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \log\frac{b}{a} &= 0{,}5046112 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}4953883 \\ \log\sin\beta &= 9{,}9999995 \end{aligned}$$

Ein Blick in die Callet'schen Tafeln, deren ich mich hier bedienen werde, zeigt, dass $\beta$ in diesem Falle mittelst seines Sinus nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann, weshalb man nun die Rechnung auf folgende Art führen wird:

$$\begin{aligned} \log\tang\Theta &= 9{,}9999995 \\ \Theta &= 44°\,.\,59'\,.\,59'',88 \\ 45°-\Theta &= 0.\ \ 0.\ \ 0,12 \\ \log\tang(45°-\Theta) &= 3{,}7647562 \\ \log\tang(45°-\tfrac{1}{2}\beta) &= 6{,}8823781 \\ 45°-\tfrac{1}{2}\beta &= 0°\,.\,2'\,.\,37'',39 \\ 90°-\beta &= 0.\ 5.\ 14,\ \ 78 \\ \beta &= 89.\ 54.\ 45,\ 22 \end{aligned}$$

Uebrigens hat $\beta$ im vorliegenden Falle, wo offenbar $\alpha < b$ ist, zwei Werthe, deren Summe 180° beträgt. Der zweite Werth ist die Ergänzung des durch die vorhergehende Rechnung gefundenen Werths zu 180°, nämlich 90°. 5'. 14''. 78.

Digitized by Google

# XII.

## Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Auf dienstliche Veranlassung, ausgeführt von J. J. Baeyer, Major im Generalstabe. Mit einer Uebersichtskarte. Berlin. 1840. 4.

Vom

Herausgeber.

---

Die aus zu verschiedenen Zeiten angestellten barometrischen Messungen und Vergleichungen für die Höhe Berlins über dem Meere gezogenen Resultate, welche der Verfasser in der Vorrede zu seinem in jeder Beziehung höchst schätzbaren Werke zusammenstellt, waren bisher höchst schwankend, und es herrschte gerade über dieses Element noch immer die grösste Ungewissheit. Als nun dasselbe bei der im Frühjahre 1835 von Bessel vorgenommenen Bestimmung der Länge des Secundenpendels auf der Berliner Sternwarte als ein wichtiges Reductionselement zur Sprache kam, ersuchte Alexander von Humboldt den Chef des Generalstabes der Armee und General der Infanterie Herrn Krauseneck, zur endlichen Entscheidung der Sache ein trigonometrisches Nivellement zwischen der Ostsee und Berlin ausführen zu lassen. Letzterer, stets bereit wissenschaftliche Zwecke kräftigst zu unterstützen und zu fördern, ging sogleich mit der grössten Bereitwilligkeit auf den Vorschlag ein, und ertheilte dem Verfasser den Auftrag, in Gemeinschaft mit dem in Neu-Vorpommern eben mit Messungen beschäftigten Ingenieur-Geographen Herrn Bertram als zweitem Beobachter die Arbeit im Laufe des Sommers 1835 auszuführen. Im September 1835 war die ganze Operation beendigt. Die Rechnungen sind mit Hülfe des Lieutenants von Mörner, eines jungen thätigen und kenntnissreichen Offiziers, sämmtlich nach Bessels Vorschriften ausgeführt, welcher Letztere sich der Sache überhaupt auf das Eifrigste annahm und seinen Rath nie fehlen liess.

Die Instrumente waren: 1) Ein Theodolit von Ertel in München mit 15 zölligem Azimuthalkreis und 8 zölligem Höhenkreis, deren Nonien unmittelbar respective 2 und 4 Secunden angaben. 2) Ein Theodolit von Gambey in Paris mit einem 12zölligen Azimuthalkreise und einem eben so grossen Höhenkreise, deren Nonien eine unmittelbare Ablesung der Winkel von 3 Secunden gestatteten. 3) Ein Box-Chronometer von Tiede in Berlin, und 4) ein Taschen-Chronometer von Tiede. Mit Nr. 1. und 3. beobachtete der Verfasser, mit Nr. 2. und 4. Herr Bertram.

Digitized by Google

Die Dreiecksverbindung zwischen Berlin und Swinemünde konnte durch Anschliessung an eine trigonometrische Vermessung der Oder bewirkt werden, welche das Königliche Ministerium für den Handel, die Gewerbe und das Bauwesen in den Jahren 1820 bis 1824 durch den Premier-Lieutenant Asmann hatte ausführen lassen.

Die Höhenmessungen wurden natürlich, um den Einfluss der Strahlenbrechung so viel als möglich zu beseitigen, auf bekannte Weise durch gleichzeitige Beobachtung gegenseitiger Zenithdistanzen ausgeführt, und bei der Berechnung die folgenden, dem Wesentlichen nach Bessel angehörenden, von dem Verfasser aber in Bezug auf praktische Anwendung erweiterten und weiter entwickelten Formeln in Anwendung gebracht.

Die Höhen zweier Punkte $A$ und $B$ über dem Meere seien $h$ und $h'$; die in $A$ beobachtete Zenithdistanz von $B$ sei $z$, die gleichzeitig in $B$ beobachtete Zenithdistanz von $A$ sei $z'$. Bezeichnen wir nun die entsprechenden Refractionen durch $\Delta z$ und $\Delta z'$, so sind die wahren Zenithdistanzen von $B$ und $A$ respective $z+\Delta z$ und $z'+\Delta z'$, wobei man nicht zu übersehen hat, dass durch die Strahlenbrechung die Höhen vergrössert, die Zenithdistanzen also vermindert werden. Obgleich nun ein Durchschnitt der Vertikallinien zweier Punkte auf dem Erdellipsoid nur bedingungsweise Statt findet, so wird doch mit Rücksicht auf die geringe Verschiedenheit der Lage zweier von einander sichtbaren Punkte der Fehler unberücksichtigt bleiben, und man wird also den von den Vertikallinien der beiden Punkte $A$ und $B$ eingeschlossenen Winkel sowohl, als auch den Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden Vertikallinien durch $C$ bezeichnen können. Denkt man sich nun das Dreieck $ABC$, so wird auch ohne Figur auf der Stelle ersichtlich sein, dass dessen äussere an $A$ und $B$ und der Seite $AB$ liegende Winkel respective $z+\Delta z$ und $z'+\Delta z'$, die innern Winkel dieses Dreiecks also $180°-(z+\Delta z)$, $180°-(z'+\Delta z')$ und $C$ sind, welches die Gleichung

$$360° + C - (z + \Delta z + z' + \Delta z') = 180°$$

oder

$$z + \Delta z + z' + \Delta z' = 180° + C$$

giebt. Setzt man nun $\Delta z + \Delta z' = kC$, wo $k$ nach Gauss der Coefficient der Strahlenbrechung ist, unter welchem die französischen Mathematiker gewöhnlich $\frac{1}{2}k$ verstehen, so erhält man die Gleichung

$$z + z' - 180° = (1 - k)\,C.$$

Bezeichnet $r$ den Radius der Erde, die wir hier als eine Kugel betrachten wollen, und $s$ den dem Winkel $C$ entsprechenden Bogen, d. h. die horizontale Entfernung der beiden Punkte $A$ und $B$, so hat man die Proportion

$$\sin 1'' : \frac{s}{r} = 1 : C,$$

und folglich

$$C = \frac{s}{r \sin 1''},$$

oder wenn $\omega = 206264{,}8$ gesetzt wird,

Digitized by Google

$$C = \frac{s\omega}{r},$$

wodurch man $C$ in Secunden ausgedrückt erhält. Führt man nun diesen Ausdruck von $C$ in die obige Gleichung zwischen $z$, $z'$, $k$, $C$ ein, so ergiebt sich

$$1 - k = \frac{r}{s\omega}(z + z' - 180°),$$

welche Formel den Coefficienten der Strahlenbrechung liefert, ausgedrückt durch die gegenseitig gleichzeitig beobachteten Zenithdistanzen und die Entfernung der Beobachtungspunkte. Natürlich muss nun auch in dieser Gleichung die Grösse $z + z' - 180°$ in Secunden ausgedrückt gedacht werden. Hat man auf diese Weise $k$ gefunden, so kann auch $\Delta z + \Delta z'$ gefunden werden, weil nach dem Obigen

$$\Delta z + \Delta z' = kC$$

ist. Um nun aber $\Delta z$ und $\Delta z'$ selbst zu finden, ist man nach dem jetzigen Stand der Sache genöthigt $\Delta z = \Delta z'$ zu setzen, welches freilich nur näherungsweise, und zwar mit desto grösserer Genauigkeit richtig ist, je geringer der Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte, und mit je grösserm Rechte also die Voraussetzung gleicher Dichtigkeit der Luft an beiden Beobachtungsorten zulässig ist. Auf die Gleichungen $\Delta z = \Delta z'$ und $\Delta z + \Delta z' = kC$ gestützt, erhält man

$$\Delta z = \Delta z' = \tfrac{1}{2}kC,$$

wodurch also, da $k$ nach dem Obigen schon bekannt ist, die Refractionen $\Delta z$ und $\Delta z'$ sich ergeben.

Das Dreieck $ABC$ liefert nun, indem wir jetzt zu der Bestimmung des Höhenunterschieds der beiden Beobachtungsorte selbst übergehen, nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie die Proportion

$$AC + BC : AC - BC = \cot \tfrac{1}{2}C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A),$$

oder, weil offenbar $AC = r + h$, $BC = r + h'$ ist,

$$2r + h + h' : h - h' = \cot \tfrac{1}{2}C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A),$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$B - A = z + \Delta z - z' - \Delta z'$$

ist,

$$2r + h + h' : h - h' = \cot \tfrac{1}{2}C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z + \Delta z - z' - \Delta z'),$$

also

$$h - h' = 2r\,(1 + \frac{h + h'}{2r}) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z + \Delta z - z' - \Delta z'),$$

oder, weil man $\Delta z = \Delta z'$ setzt, und bei nicht sehr beträchtlichen Höhen $\frac{h + h'}{2r}$ offenbar als eine verschwindende Grösse betrachtet werden kann,

$$h - h' = 2r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z - z'),$$

oder endlich, weil $2r \operatorname{tang} \frac{1}{2}C = s$ gesetzt werden kann,

Digitized by Google

gewusst, welches wir hier zum Schluss noch mittheilen wollen, indem wir zugleich diejenigen, welche dazu Gelegenheit haben, zu einer nähern Prüfung desselben auffordern.

Dass die Strahlenbrechung an jedem Tage sich nicht gleich bleibt, sondern im Allgemeinen vom Morgen gegen den Mittag hin abnimmt, und vom Mittage gegen den Abend hin wächst, ist schon früher nicht unbekannt gewesen. Dies hat den Verfasser zu einer Vergleichung seiner Bestimmungen von $k$ mit den Tageszeiten, welchen dieselben entsprechen, veranlasst, wobei er von der Hypothese ausgeht, dass die Werthe von $k$ den Abständen der entsprechenden Tageszeiten vom wahren Mittage proportional sind, und eben diese Hypothese ist es, deren Wahrscheinlichkeit er aus seinen Beobachtungen darzuthun sucht, wobei er auf folgende Art verfährt.

Er drückt die Abstände der Tageszeiten vom wahren Mittage in Theilen des halben Tagebogens aus, so dass 0 dem Mittage, 1 dem Sonnen-Auf- oder Untergange entspricht. Ist nämlich $T$ der Abstand der Tageszeit vom wahren Mittage und $L$ die Tageslänge, beide in einerlei Zeitmaas ausgedrückt, so erhält man den Abstand der Tageszeit vom wahren Mittage in Theilen des halben Tagebogens ausgedrückt durch die Formel $\frac{2T}{L}$, welche wir im Folgenden durch $b$ bezeichnen wollen. Ist dann die obige Hypothese richtig, so muss $\frac{k}{b}$ eine constante Grösse, oder es muss

$$k = ab$$

sein, wo $a$ eine constante Grösse bezeichnet. Die Uebereinstimmung dieser Hypothese mit wirklich angestellten Beobachtungen wird man aus dem folgenden von dem Verfrsser mitgetheilten Täfelchen zu beurtheilen im Stande sein:

| Anzahl der Bestimmungen von $k$ | Zeit in halben Tagebögen $b$ | Beobachtete Werthe von $k$ | $\frac{k}{b} = a$ | Berechnete Werthe von $k = ab$ | Fehler. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,376 | 0,0791 | 0,2104 | 0,0802 | + 0,0011 |
| 4 | 0,460 | 0,1003 | 0,2180 | 0,0981 | — 0,0022 |
| 10 | 0,555 | 0,1205 | 0,2171 | 0,1183 | — 0,0022 |
| 19 | 0,640 | 0,1347 | 0,2105 | 0,1364 | + 0,0017 |
| 15 | 0,738 | 0,1543 | 0,2091 | 0,1573 | + 0,0030 |
| 5 | 0,849 | 0,1912 | 0,2252 | 0,1810 | — 0,0102 |
| 54 | | Mittel .... | 0,2132 = $a$ | | |

Dass der von dem Verfasser aufgestellten Hypothese grosse Wahrscheinlichkeit zur Seite steht, unterliegt hiernach keinem Zweifel, und es ist sehr zu wünschen, dass durch vervielfältigte Beobachtungen dieselbe näher geprüft und der Werth von $a$ genauer bestimmt werde. Bis jetzt wird man

$$k = 0{,}2132 \, . \, b$$

zu setzen haben, wo $b$ die obige Bedeutung hat. Bei Sonnen-Auf- oder Untergang ist nach dieser Formel $k = 0{,}2132$, für den wahren Mittag ergiebt sich nach derselben $k = 0$. Der erste Werth von $k$ stimmt nach des Verfassers Versicherung mit mehreren an-

Digitized by Google

dern von ihm gemachten Bestimmungen sehr nahe überein; den zweiten Werth von $k$ hat er, was freilich sehr zu wünschen gewesen wäre und andern Beobachtern ganz besonders empfohlen werden muss, bis jetzt noch nicht durch directe Beobachtungen zu prüfen Gelegenheit gehabt.

Allen, die sich für trigonometrische Nivellements interessiren und namentlich selbst dergleichen Arbeiten auszuführen beabsichtigen, wird das in jeder Beziehung höchst schätzbare Werk des Herrn Baeyer die vielfachste Belehrung darbieten und sie bei ihren Arbeiten wesentlich unterstützen.

---

# XIII.

## Mourey's Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Nach zwei Abhandlungen des Herrn Liouville in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. IV. p. 501 T. V. p. 31. frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

---

### §. 1.

Der Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen, welchen in neuerer Zeit vorzüglich Gauss und Cauchy zum Gegenstande ihrer scharfsinnigen Untersuchungen gemacht haben, ist bekanntlich der Satz:

dass jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten sämmtlich die Form $a+b\sqrt{-1}$ haben, wo $a$ und $b$ reelle Grössen sind, die auch verschwinden können, mindestens *eine* Wurzel von derselben Form haben muss.

Einen sehr einfachen und beachtungswerthen Beweis dieses in jeder Beziehung höchst wichtigen Theorems hat Herr Mourey in einer im Jahre 1828 unter dem Titel: Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, erschienenen Schrift gegeben. Da aber dieser Beweis bis jetzt nur wenig bekannt geworden zu seyn scheint, so hat Herr Liouville in den beiden oben genannten Abhandlungen von Neuem auf denselben aufmerksam gemacht, und hat ihn zugleich in einem Punkte vervollständigt, wo er der Vervollständigung sehr bedurfte. Diese beiden Abhandlungen des Herrn Liouville legen wir unserer folgenden Darstellung des in Rede stehenden bemerkenswerthen Beweises des oben genannten wichtigen Satzes, dessen Beweis schon auf so



Digitized by Google

viele verschiedene Arten von den berühmtesten Mathematikern der neuern Zeit versucht worden ist, zum Grunde.

Als bekannt setzen wir bei dieser Darstellung die folgenden Sätze voraus, welche in jedem etwas vollständigen Lehrbuche der Algebra bewiesen werden:

1. Unter der Voraussetzung, dass jede algebraische Gleichung des $n$ten und jedes niedrigern Grades, deren höchstes Glied die Einheit zum Coefficienten hat, und deren übrige Coefficienten sämmtlich von der Form $a+b\sqrt{-1}$ sind, mindestens *eine* Wurzel von derselben Form hat, lässt sich die Function einer jeden solchen Gleichung des $n$ten Grades in $n$ Factoren zerlegen, welche sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen des ersten Grades der unbekannten Grösse $z$ der Gleichung von der Form $z-p-q\sqrt{-1}$ sind.

2. Jede algebraische Gleichung des $n$ten Grades kann höchstens $n$ sämmtlich unter einander verschiedene Wurzeln haben.

## §. 2.

In einer Ebene nehme man jetzt zwei rechtwinklige Axen der $x$ und $y$ an und denke sich in derselben Ebene eine beliebige völlig geschlossene Curve gezogen. $M$ sei ein beliebiger Punkt auf dieser Curve, und $A$ sei ein beliebiger innerhalb oder ausserhalb derselben, nicht auf ihr, liegender Punkt in der in Rede stehenden Ebene. Von dem Punkte $A$ aus denke man sich eine mit dem positiven Theile der Axe der $x$ parallele und nach derselben Seite wie der positive Theil der Axe der $x$ von dem Anfange der $xy$ aus hin gerichtete gerade Linie gezogen, und betrachte alle mit dieser Linie von der Linie $AM$ eingeschlossenen Winkel als positiv oder als negativ, jenachdem dieselben von der von dem Punkte $A$ aus mit dem positiven Theile der Axe der $x$ parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linie an bis zu der Linie $AM$ nach der Seite der positiven oder negativen $y$ hin gezählt worden sind.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man nun einen der von der Linie $AM$ mit der von dem Punkte $A$ aus mit dem positiven Theile der Axe der $x$ parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linie eingeschlossenen Winkel durch $\omega$, und lasse sich den Punkt $M$ auf der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve immer nach derselben Richtung hin bewegen, bis er wieder in seine erste Lage zurückkehrt; so wird der Winkel $\omega$ sich stetig verändern, und möge durch diese stetige Veränderung, wenn der Punkt $M$ wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, den Werth $\omega'$ erhalten. Zwischen den beiden Grössen $\omega$ und $\omega'$ wollen wir nun eine Gleichung aufsuchen, und wollen dabei $\omega$ und $\omega'$ als durch Kreisbogen für einen der Einheit gleichen Radius gemessen annehmen. Wir müssen aber bei dieser Untersuchung die folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn der Punkt $A$ innerhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegt, und der Punkt $M$ sich auf dieser Curve nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den von den positiven Theilen der Axen der $x$ und $y$ eingeschlossenen

Digitized by Google

rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen; so wird der Winkel $\omega$, mag derselbe nun positiv oder negativ sein, jederzeit stetig zunehmen, und es wird auf der Stelle erhellen, dass in diesem Falle zwischen $\omega$ und $\omega'$ immer die Gleichung

$$\omega' = \omega + 2\pi,$$

wo $\pi$ seine bekannte Bedeutung hat, Statt findet.

Wenn der Punkt $A$ wieder innerhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegt, der Punkt $M$ sich aber auf dieser Curve nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den von dem positiven Theile der Axe der $x$ und dem negativen Theile der Axe der $y$ eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem negativen Theile der Axe der $y$ zu gelangen; so wird der Winkel $\omega$, mag derselbe nun positiv oder negativ sein, jederzeit stetig abnehmen, und es wird auf der Stelle erhellen, dass in diesem Falle zwischen $\omega$ und $\omega'$ immer die Gleichung

$$\omega' = \omega - 2\pi,$$

wo $\pi$ wieder seine bekannte Bedeutung hat, Statt findet.

Wenn der Punkt $A$ ausserhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegt, so findet, wovon man sich sogleich überzeugen wird, wenn man nur diesen Fall an einer Figur etwas näher betrachtet, zwischen den Grössen $\omega$ und $\omega'$ jederzeit die Gleichung

$$\omega' = \omega$$

Statt.

Hieraus ergiebt sich, dass zwischen den Grössen $\omega$ und $\omega'$ jederzeit die Gleichung

$$\omega' = \omega \pm 2\pi \text{ oder } \omega' = \omega$$

Statt findet, jenachdem der Punkt $A$ innerhalb oder ausserhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegt, und dass man in der ersten dieser beiden Gleichungen das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem sich der Punkt $M$ auf der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den von den positiven Theilen der Axen der $x$ und $y$ eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegt.

Dies führt aber ferner, indem alle vorhergehenden Voraussetzungen auch jetzt noch ihre Gültigkeit behalten, unmittelbar zu dem folgenden Satze:

Wenn die $n$ Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ sämmtlich in der Ebene der $xy$ liegen, von jedem derselben aus eine mit dem positiven Theile der Axe der $x$ parallele und nach derselben Seite hin gerichtete gerade Linie gezogen gedacht wird, die mit diesen Linien von den Linien $AM, A_1M, A_2M, A_3M, \ldots A_{n-1}M$ eingeschlossenen Winkel respective durch $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}$ die Werthe aber, welche diese Winkel, wenn sich der Punkt $M$ auf der in der Ebene der $xy$ geschlossenen Curve immer



Digitized by Google

nach derselben Richtung hin bis wieder in seine ursprüngliche Lage bewegt, durch ihre mit dieser Bewegung des Punktes $M$ verbundene stetige Veränderung, indem derselbe wieder in seiner ursprünglichen Lage ankommt, erhalten, respective durch $\omega', \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots \omega'_{n-1}$ bezeichnet werden, und $\varkappa$ die Anzahl derjenigen der Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ ist, welche innerhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegen; so ist immer

$$\omega' + \omega'_1 + \omega'_2 + \ldots + \omega'_{n-1} = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} \pm \varkappa\pi,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich der Punkt $M$ auf der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den von den positiven Theilen der Axen der $x$ und $y$ eingeschlossenen Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegt hat.

Weiss man also, dass von den Punkten $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ wenigstens *einer* innerhalb der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve liegt, so wird man, wenn man nur den Punkt $M$ auf dieser Curve seine Lage der Grösse und der Richtung nach auf die erforderliche Weise verändern, auch nöthigenfalls seinen Umlauf auf der in Rede stehenden Curve mehrere Mal vollenden lässt, die Summe $\omega+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_{n-1}$ jede beliebige Zunahme oder Abnahme, überhaupt jede beliebige Veränderung erleiden lassen können; welches sich ganz unmittelbar aus dem vorigen Satze ergiebt, wenn man nur bei der Anwendung desselben zugleich nicht aus den Augen verliert, dass sich die in Rede stehende Summe so wie jeder ihrer einzelnen Theile fortwährend stetig verändert, wenn sich der Punkt $M$ auf der in der Ebene der $xy$ gezogenen geschlossenen Curve ohne Unterbrechung bewegt.

Auf diesen wenigen an sich höchst einfachen Principien, von deren Richtigkeit man sehr leicht die vollkommenste Ueberzeugung gewinnt, beruhet vorzüglich der Beweis des Herrn Mourey, den wir nun sogleich näher kennen lernen werden.

## §. 3.

Es sei

$$z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \ldots + Tz + U = 0$$

irgend eine Gleichung des $n$ten Grades, deren Coefficienten sämmtlich von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sind. Für $n = 1$ hat diese Gleichung offenbar eine Wurzel von derselben Form, und es wird also, um das wichtige Fundamentaltheorem der Theorie der Gleichungen, von dem in §. 1. die Rede gewesen ist, im Allgemeinen zu beweisen, bloss darauf ankommen, zu zeigen, dass dasselbe, wenn es für jede Gleichung von einem niedrigern Grade als dem $n$ten richtig ist, dann immer auch für jede Gleichung des $n$ten Grades gelten muss.

Digitized by Google

Daher wollen wir jetzt annehmen, dass der zu beweisende Satz für jede Gleichung von einem niedrigern Grade als dem $n$ten gilt. Unter dieser Voraussetzung lässt sich nach dem Satze 1. in §. 1. die Function

$$z^{n-1} + Pz^{n-2} + Qz^{n-3} + \ldots + T$$

jederzeit als ein aus $n-1$ Factoren bestehendes Product von der Form

$$(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})$$

darstellen, und es wird, um unsern Satz zu beweisen, nun darauf ankommen, dass man zeigt, dass es immer mindestens einen Werth von $z$ von derselben Form wie die Coefficienten der gegebenen Gleichung geben muss, für welchen

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})+U=0$$

oder

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})=-U$$

ist.

Um dies zu beweisen, setze man

$$z=x+y\sqrt{-1},$$

und stelle sich $x$ und $y$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $M$ in einer Ebene in Bezug auf zwei beliebige auf einander senkrecht stehende Coordinatenaxen, deren positive Theile $Ox$ und $Oy$ sein mögen, vor. Ferner seien $A_1$, $A_2$, $A_3$, $\ldots A_{n-1}$ die durch die Coordinaten

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3;\ \ldots\ a_{n-1},\ b_{n-1}$$

in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem bestimmten $n-1$ Punkte in dieser Ebene. $\omega$ sei einer der von dem Radius Vector $OM=\varrho$ mit dem positiven Theile der Axe der $x$ eingeschlossenen Winkel; so ist, wie sogleich erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$z=x+y\sqrt{-1}=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}).$$

Sind nun ferner $\omega_1$, $\omega_2$, $\ldots$ $\omega_{n-1}$ die von den Vectoren $A_1M=\varrho_1$, $A_2M=\varrho_2$, $A_3M=\varrho_3$, $\ldots$ $A_{n-1}M=\varrho_{n-1}$ mit den von den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $\ldots$ $A_{n-1}$ aus mit dem positiven Theile der Axe der $x$ parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit

$$z-a_1-b_1\sqrt{-1}=x-a_1+(y-b_1)\sqrt{-1}=\varrho_1(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1}),$$

$$z-a_2-b_2\sqrt{-1}=x-a_2+(y-b_2)\sqrt{-1}=\varrho_2(\cos\omega_2+\sin\omega_2\sqrt{-1}),$$

$$z-a_3-b_3\sqrt{-1}=x-a_3+(y-b_3)\sqrt{-1}=\varrho_3(\cos\omega_3+\sin\omega_3\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1}=x-a_{n-1}+(y-b_{n-1})\sqrt{-1}$$
$$=\varrho_{n-1}\,(\cos\omega_{n-1}+\sin\omega_{n-1}\sqrt{-1});$$

und folglich nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den imaginären Grössen

Digitized by Google

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})$$
$$=\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}\{\cos(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})$$
$$+\sin(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\sqrt{-1}\}.$$

Weil nach dem Obigen uns nun zu zeigen obliegt, dass sich für $z=x+y\sqrt{-1}$, wo $x$ und $y$ reelle Grössen sind, immer mindestens ein Werth angeben lässt, für welchen

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})=-U$$

ist; so werden wir jetzt zu zeigen haben, dass sich für $x$, $y$ immer mindestens ein System zweier reeller Werthe angeben lässt, für welches

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}\{\cos(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})$$
$$+\sin(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\sqrt{-1}\}=-U$$

ist. Nach der Voraussetzung und nach der Lehre von den imaginären Grössen kann aber immer

$$-U=R(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})$$

gesetzt werden. Daher wird das Obige bewiesen sein, wenn man zeigen kann, dass sich für $x$, $y$ immer mindestens ein System zweier reeller Werthe angeben lässt, durch welches die beiden Gleichungen

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R,\ \omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}=\alpha$$

zugleich erfüllt werden, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann.

Weil nach dem Obigen

$$\varrho_1=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_1)^2+(\varrho\sin\omega-b_1)^2},$$
$$\varrho_2=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_2)^2+(\varrho\sin\omega-b_2)^2},$$
$$\varrho_3=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_3)^2+(\varrho\sin\omega-b_3)^2},$$

u. s. w.

$$\varrho_{n-1}=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_{n-1})^2+(\varrho\sin\omega-b_{n-1})^2}$$

ist; so ist das Produkt $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$, dessen Werth immer positiv ist, für jeden bestimmten Werth von $\omega$ eine stetige Function von $\varrho$, welche für $\varrho=0$ verschwindet und für $\varrho=\infty$ unendlich wird. Daher muss es offenbar für jeden bestimmten Werth von $\omega$ mindestens einen Werth von $\varrho$ geben, für welchen

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R,$$

also die erste der beiden obigen Gleichungen erfüllt ist. Denkt man sich folglich in der Ebene der $xy$ von dem Anfange $O$ der Coordinaten aus eine stetige Folge gerader Linien gezogen, so wird es auf jeder dieser geraden Linien einen Punkt $M$ geben, dessen Entfernung vom Anfange der Coordinaten oder dessen Radius Vector, für $\varrho$ in die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

gesetzt, derselben genügt, und es frägt sich jetzt zunächst, ob alle

Digitized by Google

diese Punkte eine stetige völlig geschlossene, den Punkt $O$ also nach allen Seiten hin ohne Unterbrechung umgebende Curve bilden. Dass dies aber wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art gezeigt werden.

Weil nach dem Obigen

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2},$$
$$\varrho_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2},$$

u. s. w.

$$\varrho_{n-1} = \sqrt{(x-a_{n-1})^2 + (y-b_{n-1})^2}$$

ist, so ist die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R,$$

oder vielmehr, wenn man dieselbe rational macht, die Gleichung

$$\varrho^2\varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2,$$

offenbar sowohl in Bezug auf $x$, als auch in Bezug auf $y$ vom $2n$ten Grade. Die Gleichung einer jeden geraden Linie hat die Form

$$y = \lambda x + \mu \text{ oder } x = \lambda.$$

Denkt man sich im ersten Falle in der Gleichung

$$\varrho^2\varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2$$

für $y$ den Ausdruck $\lambda x + \mu$ gesetzt, so erhält man eine bloss die unbekannte Grösse $x$ enthaltende Gleichung, deren höchstes Glied offenbar $(1+\lambda^2)^n\, x^{2n}$, und die also vom $2n$ten Grade ist, folglich nach dem Satze 2. in §. 1. höchstens $2n$ reelle Wurzeln haben kann, zu deren jeder wegen der Gleichung $y = \lambda x + \mu$ nur ein bestimmter reeller Werth von $y$ gehört. Im zweiten Falle erhält man, wenn man in der Gleichung

$$\varrho^2\varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2$$

die Grösse $x = \lambda$ setzt, eine bloss die unbekannte Grösse $y$ enthaltende Gleichung des $2n$ten Grades, welche also nach dem Satze 2. in §. 1. wieder höchstens $2n$ reelle Wurzeln haben kann. Hieraus ergiebt sich, dass von der durch die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R$$

characterisirten Curve keine gerade Linie in mehr als $2n$ Punkten geschnitten werden kann, und dass also diese Curve jedenfalls nicht der Gattung der Spiralen angehört, welche ohne jemals in sich selbst zurückzukehren in unendlich vielen Windungen einen festen Punkt umgeben. Bestände aber die durch die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R$$

characterisirte Curve aus gewissen von einander gesonderten, also in keinem stetigen Zusammenhange stehenden Theilen, so würde man von dem Punkte $O$ an durch die Zwischenräume zwischen den

Digitized by Google

einzelnen Theilen hindurch bis zu einem von dem Punkte $O$ unendlich weit entfernten Punkte $O_1$ eine stetige Curve ziehen können, auf welcher der Radius Vector keines Punktes der Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

genügen würde, welches ungereimt ist. Denn die, dem diese Curve beschreibenden Punkte entsprechenden Vectoren $\varrho$ verändern sich stetig von 0 bis $\infty$, und es werden sich also auch die entsprechenden Werthe der Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}-R$$

stetig verändern. Weil nun $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$ für $\varrho=0$ verschwindet, so ist in der Nähe des Punktes $O$ die Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}-R$$

offenbar negativ; positiv ist diese Grösse dagegen in der Nähe des Punktes $O_1$, weil $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$ für $\varrho=\infty$ unendlich wird. Daher muss die Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}-R$$

irgendwo auf der Curve $OO_1$ vom Negativen zum Positiven übergehen, welches wegen der stetigen Veränderung dieser Grösse nur dann geschehen kann, wenn dieselbe durch Null hindurch geht, woraus sich also ergiebt, dass jederzeit für einen gewissen Punkt auf der Curve $OO_1$

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}-R=0 \text{ oder } \varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

sein muss, welches gegen das Obige streitet. Folglich ist die durch die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

characterisirte Curve nothwendig eine stetige geschlossene, den Punkt $O$ nach allen Seiten hin ohne Unterbrechung umgebende Curve.

Von den Punkten $O$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $\ldots A_{n-1}$ liegt immer mindestens einer, nämlich der Punkt $O$, innerhalb der in Rede stehenden Curve. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass keiner dieser Punkte auf derselben liegt. Von dem Punkte $O$ versteht sich dies von selbst. Läge aber z. B. der Punkt $A_1$ auf der Curve, so würde, da für jeden Punkt derselben die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

erfüllt ist, dies auch für den Punkt $A_1$ der Fall sein, welches aber ungereimt ist. Weil man nämlich unter diesen Voraussetzungen den oben im Allgemeinen durch $M$ bezeichneten Punkt als mit dem Punkte $A_1$ zusammenfallend betrachten muss, so würde offenbar $\varrho_1=A_1M=0$, und folglich auch $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=0$ sein, da doch offenbar $R$ nie verschwinden kann, weil natürlich $U$ als nicht verschwindend angenommen wird. Nimmt man nun alles dieses zusammen, so ergiebt sich aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen unmittelbar, dass auf der in Rede stehenden Curve der Punkt $M$ immer so angenommen werden kann, dass die Summe

$$\omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}$$

jeden beliebigen Werth erhält, also auch so, dass

Digitized by Google

$$\omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = \alpha$$

ist. Da nun nach dem Obigen für jeden Punkt unserer Curve die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R$$

erfüllt ist, so sieht man, dass sich auf derselben immer ein Punkt angeben lässt, durch dessen Coordinaten die beiden Gleichungen

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R,\ \omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = \alpha$$

zugleich erfüllt werden: auf den Beweis dieses Satzes ist aber oben der Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen zurückgeführt worden, so dass also nun auch dieser wichtige Fundamentalsatz selbst vollständig bewiesen ist.

---

# XIV.

## Ueber eine merkwürdige Relation zwischen den rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten in einer Ebene und den drei Winkeln, welche die vier von diesen Punkten nach einem fünften Punkte in derselben Ebene gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen, und über zwei wichtige geodätische Aufgaben.

Von

dem Herausgeber.

---

Es seien $A'$, $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, vier Punkte in einer Ebene, deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem respective $x'$, $y'$; $x'_1$, $y'_1$; $x'_2$, $y'_2$; $x'_3$, $y'_3$ sein mögen. Ein fünfter Punkt in derselben Ebene sei $A$, und $x$, $y$ seien die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf dasselbe System. Durch den Punkt $A$ denke man sich ein dem primitiven paralleles Coordinatensystem der $\xi\,\eta$ gelegt, und bezeichne die Coordinaten der Punkte $A'$, $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ in Bezug auf dieses neue System respective durch $\xi'$, $\eta'$; $\xi'_1$, $\eta'_1$; $\xi'_2$, $\eta'_2$; $\xi'_3$, $\eta'_3$; so hat man nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$1.\quad \begin{cases} x' = x + \xi,\ y' = y + \eta; \\ x'_1 = x + \xi_1, y'_1 = y + \eta'_1; \\ x'_2 = x + \xi'_2, y'_2 = y + \eta'_2; \\ x'_3 = x + \xi'_3, y'_3 = y + \eta'_3. \end{cases}$$

Die von den Linien $AA'$, $AA'_1$, $AA'_2$, $AA'_3$, welche durch $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der Axe der $\xi$ eingeschlossenen Winkel, welche von dem positiven Theile der Axe der $\xi$ an durch den von den positiven Theilen der Axen der $\xi$ und $\eta$ eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden, wollen wir durch $\varphi$, $\varphi + \alpha$, $\varphi + \beta$, $\varphi + \gamma$ bezeichnen, indem wir darauf besonders aufmerksam zu machen nicht unterlassen, dass die durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichneten Grössen zwar nicht in allen Fällen die 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA'_1$, $A'AA'_2$, $A'AA'_3$ selbst sind, aber doch aus diesen Winkeln jederzeit leicht gefunden, und daher, wenn dieselben etwa bei einer geodätischen Aufnahme gemessen worden sind, immer als bekannt angenommen werden können. Dies vorausgesetzt ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned} \xi' &= \varrho \cos\varphi, & \eta' &= \varrho \sin\varphi; \\ \xi'_1 &= \varrho_1 \cos(\varphi+\alpha), & \eta'_1 &= \varrho_1 \sin(\varphi+\alpha); \\ \xi'_2 &= \varrho_2 \cos(\varphi+\beta), & \eta'_2 &= \varrho_2 \sin(\varphi+\beta); \\ \xi'_3 &= \varrho_3 \cos(\varphi+\gamma), & \eta'_3 &= \varrho_3 \sin(\varphi+\gamma); \end{aligned}$$

und mittelst der Gleichungen 1. ergeben sich daher jetzt die folgenden Gleichungen:

$$2.\quad \begin{cases} x' = x + \varrho \cos\varphi & y' = y + \varrho \sin\varphi; \\ x'_1 = x + \varrho_1 \cos(\varphi+\alpha), & y'_1 = y + \varrho_1 \sin(\varphi+\alpha); \\ x'_2 = x + \varrho_2 \cos(\varphi+\beta), & y'_2 = y + \varrho_2 \sin(\varphi+\beta); \\ x'_3 = x + \varrho_3 \cos(\varphi+\gamma), & y'_3 = y + \varrho_3 \sin(\varphi+\gamma). \end{cases}$$

Durch Elimination der Grössen $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ aus diesen acht Gleichungen erhält man die vier folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} x\sin\varphi - y\cos\varphi = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi; \\ x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) = x'_1\sin(\varphi+\alpha) - y'_1\cos(\varphi+\alpha); \\ x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) = x'_2\sin(\varphi+\beta) - y'_2\cos(\varphi+\beta); \\ x\sin(\varphi+\gamma) - y\cos(\varphi+\gamma) = x'_3\sin(\varphi+\gamma) - y'_3\cos(\varphi+\gamma); \end{cases}$$

aus denen sich ferner, wenn man aus der ersten und zweiten, aus der ersten und dritten, aus der ersten und vierten die Grösse $y$ eliminirt, leicht die drei Gleichungen

$$4.\quad \begin{cases} x\sin\alpha = \{x'_1\sin(\varphi+\alpha) - y'_1\cos(\varphi+\alpha)\}\cos\varphi - (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\alpha), \\ x\sin\beta = \{x'_2\sin(\varphi+\beta) - y'_2\cos(\varphi+\beta)\}\cos\varphi - (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\beta), \\ x\sin\gamma = \{x'_3\sin(\varphi+\gamma) - y'_3\cos(\varphi+\gamma)\}\cos\varphi - (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\gamma) \end{cases}$$

ergeben, die dann durch Elimination von $x$ sogleich zu den beiden Gleichungen

Digitized by Google

$$\frac{\{x'_1 \sin(\varphi+\alpha) - y'_1 \cos(\varphi+\alpha)\}\cos\varphi - (x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\{x'_2 \sin(\varphi+\beta) - y'_2 \cos(\varphi+\beta)\}\cos\varphi - (x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}$$
$$= \frac{\{x'_3 \sin(\varphi+\gamma) - y'_3 \cos(\varphi+\gamma)\}\cos\varphi - (x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)\cos(\varphi+\gamma)}{\sin\gamma}$$

oder

$$x'_1(1+\cot\alpha\tang\varphi) - y'_1(\cot\alpha - \tang\varphi) - (x'\tang\varphi - y')(\cot\alpha - \tang\varphi)$$
$$= x'_2(1+\cot\beta\tang\varphi) - y'_2(\cot\beta - \tang\varphi) - (x'\tang\varphi - y')(\cot\beta - \tang\varphi)$$
$$= x'_3(1+\cot\gamma\tang\varphi) - y'_3(\cot\gamma - \tang\varphi) - (x'\tang\varphi - y')(\cot\gamma - \tang\varphi);$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, zu den beiden Gleichungen

$$x'_1 - (y'_1 - y')\cot\alpha + \{(x'_1 - x')\cot\alpha + y'_1 - y'\}\tang\varphi + x'\tang\varphi^2$$
$$= x'_2 - (y'_2 - y')\cot\beta + \{(x'_2 - x')\cot\beta + y'_2 - y'\}\tang\varphi + x'\tang\varphi^2$$
$$= x'_3 - (y'_3 - y')\cot\gamma + \{(x'_3 - x')\cot\gamma + y'_3 - y'\}\tang\varphi + x'\tang\varphi^2;$$

oder, wenn man in diesen Gleichungen die letzten einander gleichen Glieder aufhebt, zu den beiden Gleichungen

5. $$x'_1 - (y'_1 - y')\cot\alpha + \{(x'_1 - x')\cot\alpha + y'_1 - y'\}\tang\varphi$$
$$= x'_2 - (y'_2 - y')\cot\beta + \{(x'_2 - x')\cot\beta + y'_2 - y'\}\tang\varphi$$
$$= x'_3 - (y'_3 - y')\cot\gamma + \{(x'_3 - x')\cot\gamma + y'_3 - y'\}\tang\varphi$$

führen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber leicht

6. $$\begin{cases} \tang\varphi = -\dfrac{x'_1 - x'_2 - (y'_1 - y')\cot\alpha + (y'_2 - y')\cot\beta}{y'_1 - y'_2 + (x'_1 - x')\cot\alpha - (x'_2 - x')\cot\beta}, \\ \tang\varphi = -\dfrac{x'_2 - x'_3 - (y'_2 - y')\cot\beta + (y'_3 - y')\cot\gamma}{y'_2 - y'_3 + (x'_2 - x')\cot\beta - (x'_3 - x')\cot\gamma}, \end{cases}$$

also

7. $$\frac{x'_1 - x'_2 - (y'_1 - y')\cot\alpha + (y'_2 - y')\cot\beta}{y'_1 - y'_2 + (x'_1 - x')\cot\alpha - (x'_2 - x')\cot\beta}$$
$$= \frac{x'_2 - x'_3 - (y'_2 - y')\cot\beta + (y'_3 - y')\cot\gamma}{y'_2 - y'_3 + (x'_2 - x')\cot\beta - (x'_3 - x')\cot\gamma}.$$

Bringt man aber diese Gleichung auf Null, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen die folgende merkwürdige Gleichung:

8. $$0 = \{(x'_1 - x'_2)(y'_2 - y'_3) - (x'_2 - x'_3)(y'_1 - y'_2)\}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_1)(x'_2 - x'_3) + (y' - y'_1)(y'_2 - y'_3)\}\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_2)(x'_3 - x'_1) + (y' - y'_2)(y'_3 - y'_1)\}\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_3)(x'_1 - x'_2) + (y' - y'_3)(y'_1 - y'_2)\}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_3)(y' - y'_3) - (x' - x'_3)(y' - y'_3)\}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_3)(y' - y'_1) - (x' - x'_1)(y' - y'_3)\}\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$+ \{(x' - x'_1)(y' - y'_2) - (x' - x'_2)(y' - y'_1)\}\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Nach weiterer Entwickelung erhält diese Gleichung die Form

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
9.\ 0 = {} & (x'x'_1+y'y'_1+x'_2x'_3+y'_2y'_3)\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\\
& +(x'x'_2+y'y'_2+x'_3x'_1+y'_3y'_1)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\\
& +(x'x'_3+y'y'_3+x'_1x'_2+y'_1y'_2)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\
& -(x'y'_1-y'x'_1)\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)\\
& -(x'y'_2-y'x'_2)\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)\\
& -(x'y'_3-y'x'_3)\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)\\
& +(x'_2y'_3-y'_2x'_3)\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\\
& +(x'_3y'_1-y'_3x'_1)\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)\\
& +(x'_1y'_2-y'_1x'_2)\sin\gamma\cos(\alpha-\beta),
\end{aligned}
$$

und diese Gleichung lässt sich endlich, wenn man die Producte der goniometrischen Functionen auf bekannte Weise in Aggregate von Cosinussen und Sinussen verwandelt, auch unter der folgenden Gestalt darstellen:

$$
\begin{aligned}
10.\ 0 = {} & \{(x'-x'_1)(x'_2-x'_3)+(y'-y'_1)(y'_2-y'_3)\}\cos(-\alpha+\beta+\gamma)\\
& +\{(x'-x'_2)(x'_3-x'_1)+(y'-y'_2)(y'_3-y'_1)\}\cos(\alpha-\beta+\gamma)\\
& +\{(x'-x'_3)(x'_1-x'_2)+(y'-y'_3)(y'_1-y'_2)\}\cos(\alpha+\beta-\gamma)\\
& +\{(x'-x'_1)(y'_2-y'_3)-(y'-y'_1)(x'_2-x'_3)\}\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\\
& +\{(x'-x'_2)(y'_3-y'_1)-(y'-y'_2)(x'_3-x'_1)\}\sin(\alpha-\beta+\gamma)\\
& +\{(x'-x'_3)(y'_1-y'_2)-(y'-y'_3)(x'_1-x'_2)\}\sin(\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}
$$

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln lassen sich zwei wichtige geodätische Probleme, die in der Praxis häufig mit Vortheil in Anwendung gebracht werden, auflösen.

Bei der unter dem Namen des **Pothenotschen Problems** bekannten Aufgabe sind drei Punkte ihrer Lage nach gegeben, und die Lage eines vierten Punkts soll bestimmt werden, wenn in diesem Punkte die beiden Winkel gemessen worden sind, welche die drei von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Linien mit einander einschliessen.

Nehmen wir an, dass $A'$, $A'_1$, $A'_2$ die drei gegebenen Punkte sind und $A$ der gesuchte Punkt ist, so sind die im Obigen durch $x'$, $y'$; $x'_1$, $y'_1$; $x'_2$, $y'_2$ bezeichneten Coordinaten und die beiden Winkel $\alpha$, $\beta$ bekannt, und die beiden Coordinaten $x$, $y$ werden gesucht. Weil nun nach 6.

$$
11.\ \operatorname{tang}\varphi = -\frac{x'_1-x'_2-(y'_1-y')\cot\alpha+(y'_2-y')\cot\beta}{y'_1-y'_2+(x'_1-x')\cot\alpha-(x'_2-x')\cot\beta},
$$

ist, so kann der Winkel $\varphi$ aus den gegebenen Grössen gefunden werden. Da man jedoch nur weiss, dass dieser Winkel 360° nicht übersteigt, so frägt es sich, ob man denselben zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat. Eine Entscheidung hierüber kann aber leicht auf folgende Art gegeben werden. Nach 2. hat man die folgenden Gleichungen:

$$
12.\ \begin{cases} x' = x+\varrho\cos\varphi, & y' = y+\varrho\sin\varphi;\\ x'_1 = x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y'_1 = y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);\\ x'_2 = x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y'_2 = y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}
$$

Digitized by Google

aus denen sich die Gleichungen

$$x'-x'_1=\varrho\cos\varphi-\varrho_1\cos(\varphi+\alpha),\quad y'-y'_1=\varrho\sin\varphi-\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);$$
$$x'-x'_2=\varrho\cos\varphi-\varrho_2\cos(\varphi+\beta),\quad y'-y'_2=\varrho\sin\varphi-\varrho_2\sin(\varphi-\beta);$$

und hieraus die beiden folgenden Ausdrücke von $\varrho$ ergeben:

$$13.\begin{cases}\varrho=\dfrac{(x'-x'_1)\sin(\varphi+\alpha)-(y'-y'_1)\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha},\\ \varrho=\dfrac{(x'-x'_2)\sin(\varphi+\beta)-(y'-y'_2)\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}.\end{cases}$$

Da nun die beiden Werthe, welche $\varphi$ haben kann, jederzeit von der Form $\varphi$ und $\varphi+180°$ sind, so sieht man, dass diese beiden Werthe, für $\varphi$ in einen der beiden vorhergehenden Ausdrücke gesetzt, für $\varrho$ jederzeit zwei Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Weil aber $\varrho$ seiner Natur nach positiv ist, so muss man für $\varphi$ immer denjenigen seiner beiden Werthe setzen, welcher für $\varrho$ einen positiven Werth liefert, und kann also auf diese Art immer mit völliger Sicherheit entscheiden, ob man $\varphi$ zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat.

Hat man $\varphi$ und $\varrho$ auf diese Weise gefunden, so ergeben sich die gesuchten Coordinaten $x$, $y$ mittelst der aus 12. fliessenden Formeln

$$14.\quad x=x'-\varrho\cos\varphi,\quad y=y'-\varrho\sin\varphi;$$

und $\varrho_1$ und $\varrho_2$ erhält man nun ferner leicht mittelst der folgenden sich ebenfalls unmittelbar aus 12. ergebenden Formeln:

$$15.\begin{cases}\varrho_1=\dfrac{x'_1-x}{\cos(\varphi+\alpha)}=\dfrac{y'_1-y}{\sin(\varphi+\alpha)},\\ \varrho_2=\dfrac{x'_2-x}{\cos(\varphi+\beta)}=\dfrac{y'_2-y}{\sin(\varphi+\beta)}.\end{cases}$$

Auf diese Art ist jetzt das Pothenotsche Problem vollständig aufgelöst.

Eine andere geodätische Aufgabe, deren Auflösung sich aus den im Obigen entwickelten Gleichungen ableiten lässt, ist das folgende schöne Lambertsche Problem:

Man soll die gegenseitige Lage von acht Punkten $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ und $A'$, $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ bestimmen, wenn in jedem der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ die Winkel gemessen worden sind, welche die von diesen Punkten nach den Punkten $A'$, $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen.

Man nehme den Punkt $A'$ als Anfang der Coordinaten an, und setze also $x'=0$, $y'=0$, so wird die Gleichung 9.

$$\begin{aligned}0=&(x'_2x'_3+y'_2y'_3)\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\\&+(x'_3x'_1+y'_3y'_1)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\\&+(x'_1x'_2+y'_1y'_2)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\&+(x'_2y'_3-y'_2x'_3)\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\\&+(x'_3y'_1-y'_3x'_1)\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)\\&+(x'_1y'_2-y'_1x'_2)\sin\gamma\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Digitized by Google

Setzt man nun, was offenbar verstattet ist, auch noch $y'_1 = 0$; so wird diese Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & (x'_2 x'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (x'_2 y'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 \{x'_3 \sin(\gamma-\alpha) - y'_3 \cos(\gamma-\alpha)\} \sin\beta \\ & + x'_1 \{x'_2 \sin(\alpha-\beta) + y'_2 \cos(\alpha-\beta)\} \sin\gamma, \end{aligned}$$

und folglich, wenn man

$$16. \quad x'_2 = x'_1 + z$$

setzt,

$$\begin{aligned} 0 = {} & (zx'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (zy'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 x'_3 \{\sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + \sin\beta \sin(\gamma-\alpha)\} \\ & + x'_1 y'_3 \{\sin\alpha \cos(\beta-\gamma) - \sin\beta \cos(\gamma-\alpha)\} \\ & + x'_1 \{x'_1 \sin(\alpha-\beta) + z \sin(\alpha-\beta) + y'_2 \cos(\alpha-\beta)\} \sin\gamma, \end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet, weil

$$\begin{aligned} \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + \sin\beta \sin(\gamma-\alpha) &= -\sin\gamma \sin(\alpha-\beta), \\ \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) - \sin\beta \cos(\gamma-\alpha) &= \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned} 17. \quad 0 = {} & (zx'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (zy'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 y'_3 \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) \\ & + x'_1 y'_3 \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \\ & + x'_1 (x'_1 - x'_3 + z) \sin\gamma \sin(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, wenn man der Kürze wegen

$$18. \quad \begin{cases} p = zx'_3 + y'_2 y'_3, & q = zy'_3 - y'_2 x'_3, \\ r = x'_1 y'_2, & s = x'_1 y'_3, & t = x'_1 (x'_1 - x'_3 + z) \end{cases}$$

setzt,

$$\begin{aligned} 19. \quad 0 = {} & p \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + q \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + r \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) \\ & + s \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \\ & + t \sin\gamma \sin(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Ueberlegt man, dass diese Gleichung sich auf den Punkt $A$ bezieht, und dass man für die Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ offenbar ganz ähnliche Gleichungen bilden kann; so erhellet, dass die Data der Aufgabe immer vier Gleichungen des ersten Grades zwischen den fünf unbekannten Grössen $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ von der obigen Form liefern, mittelst welcher man also die Verhältnisse der Grössen $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ unter einander bestimmen kann. Daher wird man

$$p = ks, \quad q = k_1 s, \quad r = k_2 s, \quad t = k_3 s$$

setzen können, wo $k, k_1, k_2, k_3$ bekannte Grössen sind. Setzt man

Digitized by Google

dann noch $x'_1 = 1$, so ist $s = y'_1$, und die Gleichungen 18. erhalten die folgende Form:

$$20.\quad \begin{cases} z x'_2 + y'_2 y'_2 = k y'_2, \\ z y'_2 - y'_2 x'_2 = k_1 y'_2, \\ y'_2 = k_2 y'_2, \\ 1 - x'_2 + z = k_2 y'_2. \end{cases}$$

Dies sind vier Gleichungen mit vier unbekannten Grössen, die sich also mittelst dieser Gleichungen bestimmen lassen. Durch Elimination von $y'_2$, wenn man nämlich den Werth dieser Grösse aus der dritten Gleichung in die beiden ersten Gleichungen einführt, erhält man leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$21.\quad \begin{cases} z x'_2 + k_2 y'_2 y'_2 = k y'_2, \\ z - k_2 x'_2 = k_1, \\ 1 - x'_2 + z = k_2 y'_2; \end{cases}$$

und durch Elimination von $z$ erhält man ferner die beiden Gleichungen

$$22\quad \begin{cases} (1 - k_2) x'_2 = 1 + k_1 - k_2 y'_2, \\ k_2 (x'_2 x'_2 + y'_2 y'_2) = k y'_2 - k_1 x'_2 \end{cases}$$

zwischen den Coordinaten $x'_2$ und $y'_2$. Führt man den Werth von $x'_2$ aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite ein, so erhält man für $y'_2$ die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\begin{aligned} 23.\quad 0 = {} & (1 + k_1)(k_1 + k_2) \\ & - \{k(1 + k_2 k_2) - 2k_2(k - k_1) + k_1 k_2 (1 + k_2)\} y'_2 \\ & + k_2 \{(1 - k_2)^2 + k_2 k_2\} y'_2 y'_2, \end{aligned}$$

und sieht also, dass $y'_2$ im Allgemeinen zwei Werthe hat, die aber auch beide unmöglich werden können. Hat man auf diese Art $y'_2$ gefunden, so ergeben sich $x'_2$, $z$, $x'_2$, $y'_2$ leicht mittelst der Gleichungen 22., 21., 16. und 20., wobei man immer fest zu halten hat, dass $x'_1 = 1$ gesetzt worden ist. Die Coordinaten $x$, $y$ des Punktes $A$ findet man nun ferner ganz auf dieselbe Art wie oben bei der Pothenot'schen Aufgabe gezeigt worden ist, und auf ganz ähnliche Weise ergeben sich auch die Coordinaten der Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$.

Alle unbekannte Grössen sind hier durch die Grösse $x'_1$ als Einheit ausgedrückt worden, und mehr als die Verhältnisse der gesuchten Grössen zu der Grösse $x'_1$ als Einheit lässt sich auch aus den Datis der Aufgabe in der That nicht finden, weil die sämmtlichen Data der Aufgabe nur Winkel sind. Handelte es sich um absolute Grössenbestimmungen, so müsste mindestens noch eine der in der Figur vorkommenden Linien, etwa die Linie $x'_1$, welche unter den oben gemachten Voraussetzungen offenbar die Entfernung der beiden Punkte $A'$ und $A'_1$ von einander ist, gemessen werden.

Digitized by Google

# XV.

## Tafel der pythagoräischen Dreiecke.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

zu Gotha.

---

Dass die in den Schulze'schen Tafeln Bd. II. Seite 308 ff. unter der Aufschrift „rationale Trigonometrie" enthaltene Tafel der pythagoräischen Dreiecke in einzelnen Resultaten bedeutende Fehler enthält, wird allen den Lehrern der Trigonometrie nicht unbekannt sein, die diese Tafel zu Aufgaben für ihre Schüler benutzt haben. Neuerdings hat jedoch Herr Professor Kunze in Weimar *) nachgewiesen, dass die Menge der in jener Tabelle vorkommenden Fehler so bedeutend ist, dass letztere dadurch fast unbrauchbar wird. Da sie nun gleichwohl dem Lehrer eine sehr brauchbare Beispielsammlung für rechtwinkliche und schiefwinkliche Dreiecke darbietet, so habe ich mich der kleinen Mühe unterzogen, sie nochmals zu berechnen und dabei die Winkel bis auf Zehntelsecunden genau zu bestimmen. Da jedes Resultat mittelst der Callet'schen Tafeln doppelt berechnet und die Winkel bis auf Hunderttheile der Secunden gesucht worden sind, wobei die doppelten Werthe höchstens nur um 0,"04 differiren durften, so möchten die erhaltenen Resultate wohl volles Zutrauen verdienen.

Bezeichnen daher $m$ und $n$ relative Primzahlen, von denen immer nur die eine ungerade seyn darf, und man setzt den einen Catheten $a$ eines rechtwinklichen Dreieckes gleich $2mn$, so ist der andere Cathete $b$ gleich $m^2-n^2$, die Hypotenuse $h$ gleich $m^2+n^2$, woraus sich die den Catheten $a$ und $b$ gegenüberliegenden Winkel $A$ und $B$ durch die Gleichungen:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A = \frac{n}{m} \text{ und tang } \tfrac{1}{2} B = \frac{m-n}{m+n}$$

ergeben. Die Tafel selbst ist nun folgende:

---

*) In der Vorrede zu Chr. Gottl. Tröbst Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten etc. Jena 1840 bei Hochhausen. 181 S. 12.

Digitized by Google

| $m$ | $n$ | $a$ | $b$ | $A$ | $\frac{1}{2}ab$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 6 | 53° 7′48″,4 | 36°52′11″,6 |
| 3 | 2 | 12 | 5 | 13 | 30 | 67 22 48, 5 | 22 37 11, 5 |
| 4 | 1 | 8 | 15 | 17 | 60 | 28 4 20, 9 | 61 55 39, 1 |
| | 3 | 24 | 7 | 25 | 84 | 73 44 23, 3 | 16 15 36, 7 |
| 5 | 2 | 20 | 21 | 29 | 210 | 43 36 10, 1 | 46 23 49, 9 |
| | 4 | 40 | 9 | 41 | 180 | 77 19 10, 6 | 12 40 49, 4 |
| 6 | 1 | 12 | 35 | 37 | 210 | 18 55 28, 7 | 71 4 31, 3 |
| | 5 | 60 | 11 | 61 | 330 | 79 36 40, 0 | 10 23 20, 0 |
| 7 | 2 | 28 | 45 | 53 | 630 | 31 53 26, 8 | 58 6 33, 2 |
| | 4 | 56 | 33 | 65 | 924 | 59 29 23, 2 | 30 30 36, 8 |
| | 6 | 84 | 13 | 85 | 546 | 81 12 9, 3 | 8 47 50, 7 |
| 8 | 1 | 16 | 63 | 65 | 504 | 14 15 0, 1 | 75 44 59, 9 |
| | 3 | 48 | 55 | 73 | 1320 | 41 6 43, 5 | 48 53 16, 5 |
| | 5 | 80 | 39 | 89 | 1560 | 64 0 38, 8 | 25 59 21, 2 |
| | 7 | 112 | 15 | 113 | 840 | 82 22 18, 7 | 7 37 41, 3 |
| 9 | 2 | 36 | 77 | 85 | 1386 | 25 3 27, 4 | 64 56 32, 6 |
| | 4 | 72 | 65 | 97 | 2340 | 47 55 29, 9 | 42 4 30, 1 |
| | 8 | 144 | 17 | 145 | 1224 | 83 16 1, 5 | 6 43 58, 5 |
| 10 | 1 | 20 | 99 | 101 | 990 | 11 25 16, 3 | 78 34 43, 7 |
| | 3 | 60 | 91 | 109 | 2730 | 33 23 54, 6 | 56 36 5, 4 |
| | 7 | 140 | 51 | 149 | 3570 | 69 59 2, 5 | 20 0 57, 5 |
| | 9 | 180 | 19 | 181 | 1710 | 83 58 27, 9 | 6 1 32, 1 |
| 11 | 2 | 44 | 117 | 125 | 2574 | 20 36 34, 9 | 69 23 25, 1 |
| | 4 | 88 | 105 | 137 | 4620 | 39 57 58, 4 | 50 2 1, 6 |
| | 6 | 132 | 85 | 157 | 5610 | 57 13 15, 3 | 32 46 44 7 |
| | 8 | 176 | 57 | 185 | 5016 | 72 3 17, 1 | 17 56 42, 9 |
| | 10 | 220 | 21 | 221 | 2310 | 84 32 50, 5 | 5 27 9, 5 |
| 12 | 1 | 24 | 143 | 145 | 1716 | 9 31 38, 2 | 80 28 21, 8 |
| | 5 | 120 | 119 | 169 | 7140 | 45 14 23, 0 | 44 45 37, 0 |
| | 7 | 168 | 95 | 193 | 7980 | 60 30 46, 4 | 29 29 13, 6 |
| | 11 | 264 | 23 | 265 | 3036 | 85 1 15, 3 | 4 58 44, 7 |
| 13 | 2 | 52 | 165 | 173 | 4290 | 17 29 32, 4 | 72 30 27, 6 |
| | 4 | 104 | 153 | 185 | 7956 | 34 12 19, 6 | 55 47 40, 4 |
| | 6 | 156 | 133 | 205 | 10374 | 49 33 1, 0 | 40 26 59, 0 |
| | 8 | 208 | 105 | 233 | 10920 | 63 12 54, 0 | 26 47 6, 0 |
| | 10 | 260 | 69 | 269 | 8970 | 75 8 13, 8 | 14 51 46, 2 |
| | 12 | 312 | 25 | 313 | 3900 | 85 25 7, 6 | 4 34 52, 4 |
| 14 | 1 | 28 | 195 | 197 | 2730 | 8 10 16, 4 | 81 49 43, 6 |
| | 3 | 84 | 187 | 205 | 7854 | 24 11 22, 3 | 65 48 37, 7 |
| | 5 | 140 | 171 | 221 | 11970 | 39 18 27, 5 | 50 41 32, 5 |
| | 9 | 252 | 115 | 277 | 14490 | 65 28 13, 6 | 24 31 46, 4 |
| | 11 | 308 | 75 | 317 | 11550 | 76 18 52, 0 | 13 41 8, 0 |
| | 13 | 364 | 27 | 365 | 4914 | 85 45 28, 1 | 4 14 31, 9 |
| 15 | 2 | 60 | 221 | 229 | 6630 | 15 11 21, 4 | 74 48 38, 6 |
| | 4 | 120 | 209 | 241 | 12540 | 29 51 46, 0 | 60 8 14, 0 |
| | 8 | 240 | 161 | 289 | 19320 | 56 8 41, 9 | 33 51 18, 1 |
| | 14 | 420 | 29 | 421 | 6090 | 86 3 0, 4 | 3 56 59, 6 |
| 16 | 1 | 32 | 255 | 257 | 4080 | 7 9 9, 6 | 82 50 50, 4 |
| | 3 | 96 | 247 | 265 | 11856 | 21 14 21, 5 | 68 45 38, 5 |
| | 5 | 160 | 231 | 281 | 18480 | 34 42 29, 0 | 55 17 31, 0 |
| | 7 | 224 | 207 | 305 | 23184 | 47 15 31, 5 | 42 44 28, 5 |



Digitized by Google

| $m$ | $n$ | $a$ | $b$ | $h$ | $\frac{1}{2}ab$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 19 | 288 | 175 | 337 | 25200 | 58°42′55″,8 | 31°17′ 4″,2 |
| | 11 | 352 | 135 | 377 | 23760 | 69 1 1, 4 | 20 58 58, 6 |
| | 13 | 416 | 87 | 425 | 18096 | 78 11 15, 8 | 11 48 44, 2 |
| | 15 | 480 | 31 | 481 | 7440 | 86 18 17, 2 | 3 41 42, 8 |
| 17 | 2 | 68 | 285 | 293 | 9690 | 13 25 10, 8 | 76 34 49, 2 |
| | 4 | 136 | 273 | 305 | 18564 | 26 28 51, 7 | 63 31 8, 3 |
| | 6 | 204 | 253 | 325 | 25806 | 38 52 48, 3 | 51 7 11, 7 |
| | 8 | 272 | 225 | 353 | 30600 | 50 24 8, 1 | 39 35 51, 9 |
| | 10 | 340 | 189 | 389 | 32130 | 60 55 51, 9 | 29 4 8, 1 |
| | 12 | 408 | 145 | 433 | 29580 | 70 26 6, 7 | 19 33 53, 3 |
| | 14 | 476 | 93 | 485 | 22134 | 78 56 41, 7 | 11 3 18, 3 |
| | 16 | 544 | 33 | 545 | 8976 | 86 31 42, 9 | 3 28 17, 1 |
| 18 | 1 | 36 | 323 | 325 | 5814 | 6 21 34, 8 | 83 38 25, 2 |
| | 5 | 180 | 299 | 349 | 26910 | 31 2 53, 6 | 58 57 6, 4 |
| | 7 | 252 | 275 | 373 | 34650 | 42 30 3, 6 | 47 29 56, 4 |
| | 11 | 396 | 203 | 445 | 40194 | 62 51 32, 9 | 27 8 27, 1 |
| | 13 | 468 | 155 | 493 | 36270 | 71 40 31, 1 | 18 19 28, 9 |
| | 17 | 612 | 35 | 613 | 10710 | 86 43 36, 6 | 3 16 23, 4 |
| 19 | 2 | 76 | 357 | 365 | 13566 | 12 1 4, 9 | 77 58 55, 1 |
| | 4 | 152 | 345 | 377 | 26220 | 23 46 38, 3 | 66 13 21, 7 |
| | 6 | 228 | 323 | 397 | 37050 | 35 3 4, 1 | 54 56 55, 9 |
| | 8 | 304 | 297 | 425 | 45144 | 45 40 2, 3 | 44 19 57, 7 |
| | 10 | 380 | 261 | 461 | 49590 | 55 31 1, 5 | 34 28 58, 5 |
| | 12 | 456 | 217 | 505 | 49476 | 64 33 4, 6 | 25 26 55, 4 |
| | 14 | 532 | 165 | 557 | 43890 | 72 46 7, 3 | 17 13 52, 7 |
| | 16 | 608 | 105 | 617 | 31920 | 80 12 6, 5 | 9 57 53, 5 |
| | 18 | 684 | 37 | 685 | 12654 | 86 54 13, 3 | 3 5 46, 7 |
| 20 | 1 | 40 | 399 | 401 | 7980 | 5 43 29, 3 | 84 16 30, 7 |
| | 3 | 120 | 391 | 409 | 23460 | 17 3 41, 5 | 72 56 18, 5 |
| | 7 | 280 | 351 | 449 | 49140 | 38 34 48, 3 | 51 25 11, 7 |
| | 9 | 360 | 319 | 481 | 57420 | 48 27 19, 7 | 41 32 40, 3 |
| | 11 | 440 | 279 | 521 | 61380 | 57 37 17, 7 | 32 22 42, 3 |
| | 13 | 520 | 231 | 569 | 60060 | 66 2 51, 9 | 23 57 8, 1 |
| | 17 | 680 | 111 | 689 | 37740 | 80 43 44, 6 | 9 16 15, 4 |
| | 19 | 760 | 39 | 761 | 14820 | 87 3 44, 6 | 2 56 15, 4 |
| 21 | 2 | 84 | 437 | 445 | 18354 | 10 52 50, 4 | 79 7 9, 6 |
| | 4 | 168 | 425 | 457 | 35700 | 21 34 6, 9 | 68 25 53, 1 |
| | 8 | 336 | 377 | 505 | 63336 | 41 42 32, 1 | 48 17 27, 9 |
| | 10 | 420 | 341 | 541 | 71610 | 50 55 36, 1 | 39 4 23, 9 |
| | 16 | 672 | 185 | 697 | 62160 | 74 36 28, 4 | 15 23 31, 6 |
| | 20 | 840 | 41 | 841 | 17220 | 87 12 20, 3 | 2 47 39, 7 |
| 22 | 1 | 44 | 483 | 485 | 10626 | 5 12 18, 4 | 84 47 41, 6 |
| | 3 | 132 | 475 | 493 | 31350 | 15 31 49, 2 | 74 28 10, 8 |
| | 5 | 220 | 459 | 509 | 50490 | 25 36 30, 7 | 64 23 29, 3 |
| | 7 | 308 | 435 | 533 | 66990 | 35 18 0, 9 | 54 41 59, 1 |
| | 9 | 396 | 403 | 565 | 79794 | 44 29 53, 0 | 45 30 7, 0 |
| | 13 | 572 | 315 | 653 | 90090 | 61 9 30, 4 | 28 50 29, 6 |
| | 15 | 660 | 259 | 709 | 85470 | 68 34 25, 5 | 21 25 34, 5 |
| | 17 | 748 | 195 | 773 | 72930 | 75 23 18, 5 | 14 36 41, 5 |
| | 19 | 836 | 123 | 845 | 51414 | 81 37 48, 6 | 8 22 11, 4 |
| | 21 | 924 | 43 | 925 | 19866 | 87 20 8, 0 | 2 39 52, 0 |

Digitized by Google

| $m$ | $n$ | $a$ | $b$ | $h$ | $\frac{1}{2}ab$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 92 | 525 | 533 | 24150 | 9°56′22″,1 | 80° 3′37″,9 |
| | 4 | 184 | 513 | 545 | 47196 | 19 43 53, 8 | 70 16 6, 2 |
| | 6 | 276 | 493 | 565 | 68034 | 29 14 30, 3 | 60 45 29, 7 |
| | 8 | 368 | 465 | 593 | 85560 | 38 21 28, 8 | 51 38 31, 2 |
| | 10 | 460 | 429 | 629 | 98670 | 46 59 49, 7 | 43 0 10, 3 |
| | 12 | 552 | 385 | 673 | 106260 | 55 6 20, 2 | 34 53 39, 8 |
| | 14 | 644 | 333 | 725 | 107226 | 62 39 26, 6 | 27 20 33, 4 |
| | 16 | 736 | 273 | 785 | 100464 | 69 38 56, 3 | 20 21 3, 7 |
| | 18 | 828 | 205 | 853 | 84870 | 76 5 38, 7 | 13 54 21, 3 |
| | 20 | 920 | 129 | 929 | 59340 | 82 1 5, 4 | 7 58 54, 6 |
| | 22 | 1012 | 45 | 1013 | 22770 | 87 27 14, 2 | 2 32 45, 8 |
| 24 | 1 | 48 | 575 | 577 | 13800 | 4 46 18, 8 | 85 13 41, 2 |
| | 5 | 240 | 551 | 601 | 66120 | 23 32 11, 7 | 66 27 48, 3 |
| | 7 | 336 | 527 | 625 | 88536 | 32 31 13, 5 | 57 28 46, 5 |
| | 11 | 528 | 455 | 697 | 120120 | 49 14 49, 7 | 40 45 10, 3 |
| | 13 | 624 | 407 | 745 | 126984 | 56 53 9, 1 | 33 6 50, 9 |
| | 17 | 816 | 287 | 865 | 117096 | 70 37 20, 8 | 19 22 39, 2 |
| | 19 | 912 | 215 | 937 | 98040 | 76 44 5, 9 | 13 15 54, 1 |
| | 23 | 1104 | 47 | 1105 | 25944 | 87 33 44, 1 | 2 26 15, 9 |
| 25 | 2 | 100 | 621 | 629 | 31050 | 9 8 52, 3 | 80 51 7, 7 |
| | 4 | 200 | 609 | 641 | 60900 | 18 10 50, 0 | 71 49 10, 0 |
| | 6 | 300 | 589 | 661 | 88350 | 26 59 29, 3 | 63 0 30, 7 |
| | 8 | 400 | 561 | 689 | 112200 | 35 29 21, 6 | 54 30 38, 4 |
| | 12 | 600 | 481 | 769 | 144300 | 51 16 55, 2 | 38 43 4, 8 |
| | 14 | 700 | 429 | 821 | 150150 | 58 29 51, 5 | 31 30 8, 5 |
| | 16 | 800 | 369 | 881 | 147600 | 65 14 18, 6 | 24 45 41, 4 |
| | 18 | 900 | 301 | 949 | 135450 | 71 30 28, 0 | 18 29 32, 0 |
| | 22 | 1100 | 141 | 1109 | 77550 | 82 41 44, 0 | 7 18 16, 0 |
| | 24 | 1200 | 49 | 1201 | 29400 | 87 39 42, 2 | 2 20 17, 8 |

Eine genaue Vergleichung dieser Tafel mit der Schulzeschen zeigt nun allerdings sehr viele und zum Theil bedeutende Rechnungsfehler. Der Verfertiger der Tafel hat unter 200 Dreiecken nicht weniger als 68 Dreiecke doppelt berechnet, weil er verkannt hat, dass die Werthe tang $\frac{1}{2}A = \frac{m}{n}$ und tang $\frac{1}{2}B = \frac{m-n}{m+n}$ zu demselben Dreiecke gehören. Von diesen 68 Dreiecken sind wiederum 23 falsch berechnet, während unter den 64 Dreiecken, welche bloss einmal vorkommen, 9 grösstentheils total falsche sich befinden. Ausserdem sind nicht weniger als 18 Dreiecke vorhanden, in welchen die Winkel gerade um 0,″5 zu gross oder zu klein angegeben sind, so dass demnach auf 132 wirklich von einander verschiedene Dreiecke 32 ganz falsche und 18 ungenaue, zusammen also 50 fehlerhafte kommen. Für diejenigen, welche die Schulzeschen Tafeln besitzen, folgen die nöthigen Verbesserungen im nachstehenden Schema:



Digitized by Google

| anstatt $\omega =$ | muss sein $\omega =$ | anstatt $\omega =$ | muss sein $\omega =$ |
|---|---|---|---|
| 6°43′58″ | 6°43′59″ | 38°21′28″ | 38°21′29″ |
| 12 1 4 | 12 1 5 | 50 41 33 | 50 41 32 |
| 12 40 50 | 12 40 49 | 55 6 2 | 55 6 20 |
| 13 25 10 | 13 25 11 | 61 10 29 | 61 9 30 |
| 15 11 24 | 15 11 21 | 61 55 57 | 61 55 39 |
| 16 16 24 | 16 15 37 | 64 56 32 | 64 56 33 |
| 17 28 35 | 17 29 32 | 68 45 39 | 68 45 38 |
| 17 56 44 | 17 56 43 | 72 56 16 | 72 56 18 |
| 21 13 38 | 21 14 22 | 70 39 21 | 70 37 21 |
| 21 33 55 | 21 34 7 | 74 48 38 | 74 48 39 |
| 23 45 22 | 23 46 38 | 75 45 54 | 75 45 0 |
| 24 32 14 | 24 31 46 | 78 12 44 | 78 11 16 |
| 25 35 25 | 25 36 31 | 79 8 50 | 79 7 10 |
| 26 59 25 | 26 59 29 | 79 35 56 | 79 36 40 |
| 33 23 54 | 33 23 55 | 81 12 2 | 81 12 9 |
| 35 2 44 | 35 3 4 | 81 49 43 | 81 49 44 |

Unter den Dreiecksseiten befinden sich folgende Fehler:

| $\omega =$ | anstatt | | | muss sein | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | perp. | hyp. | bas. | perp. | hyp. | bas. |
| 12° 1′ 4″ | 78 | — | — | 76 | — | — |
| 13 41 8 | — | 308 | 317 | — | 317 | 308 |
| 30 30 37 | 23 | — | — | 33 | — | — |
| 42 44 28 | 203 | — | — | 207 | — | — |
| 60 30 46 | — | 183 | — | — | 193 | — |
| 70 30 28 | — | 929 | — | — | 949 | — |
| 71 40 31 | 476 | — | — | 468 | — | — |

Unter der Rubrik endlich „tang $\frac{1}{2}\omega$ in Decimaltheilen“ sind folgende Fehler gefunden worden:

| | anstatt | muss sein |
|---|---|---|
| tang $\frac{1}{2}\omega =$ | 0,2608691 | 0,2608696 |
| | 0,2941179 | 0,2941176 |
| | 0,3076938 | 0,3076923 |
| | 0,3157363 | 0,3157895 |
| | 0,5909001 | 0,5909091 |
| | 0,6086965 | 0,6086957 |
| | 0,6956526 | 0,6956522 |
| | 0,7058823 | 0,7058824 |
| | 0,7619047 | 0,7619048 |
| | 0,9523809 | 0,9523810 |

In der oben stehenden neu berechneten Tafel ist die zuletzt erwähnte Columne der Schulzeschen Tafel weggelassen und dafür eine Columne für die Flächeninhalte der Pythagoräischen Dreiecke beigefügt worden, da die letzteren dem Lehrer nöthiger sind als der Werth von tang $\frac{1}{2}A$ in Decimaltheilen. Die Einrichtung der Schulzeschen Tafel aber, welche die Dreieckswinkel $A$ und $B$ zu Argumenten hat, ist gänzlich verlassen worden, weil man, wie Herr Professor Kunze sehr richtig bemerkt, bestimmte Dreiecke

Digitized by Google

weniger nach dem Winkel, als vielmehr nach den bestimmten und bestimmenden Verhältnissen von $n : m$ aufzusuchen pflegt. Die Tafel gewährt bei dieser Veränderung zugleich den Vortheil, dass man sie jeden Augenblick weiter fortsetzen kann, ohne sie völlig umordnen zu müssen, was bei der von Schulze getroffenen Einrichtung nicht geschehen kann.

# XVI.

## Ueber die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch.

Von dem

Herrn Doctor J. A. Arndt,

Subrector und Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Torgau.

Das Verfahren selbst ist bekannt, ebenso, dass zuweilen ein gewöhnlicher Bruch sich vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln lasst, zuweilen nur näherungsweise, und dass im letzteren Falle eine Periode entsteht, welche nie mehr Ziffern haben kann, als der Nenner des Bruches Einheiten enthält weniger eine. Hier sollen die Fragen beantwortet werden:

1. Wann entsteht eine Periode, wann nicht?
2. Wann fängt die Periode sogleich nach dem Komma an, wann nicht?

Der in einen Decimalbruch zu verwandelnde gewöhnliche Bruch sei $\frac{r}{p}$; es werde angenommen, er sei auf seine kleinste Benennung gebracht, ebenso, er sei ein ächter Bruch, indem die unächten Brüche sogleich in vermischte Zahlen verwandelt werden, die Ganzen aber sodann unberücksichtigt bleiben können.

Da bei der Verwandlung des Bruches $\frac{r}{p}$ in einen Decimalbruch der Zähler des Bruches nach und nach immer mit 10 multiplicirt und dieses Product dann durch den Nenner dividirt wird, so kann die Division nur dann aufgehen, wenn der Nenner $p$ in 10 oder einer Potenz von 10 aufgeht; nun ist aber 10 oder eine Potenz von 10 nur durch 2 und 5 theilbar, es kann daher der Bruch $\frac{r}{p}$ nur dann vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden, wenn der Nenner keine andern Primfactoren enthält, als 2 und 5. Auch lässt sich durch die Zerlegung

Digitized by Google

des Nenners in seine Primfactoren leicht beurtheilen, wieviel Decimalstellen der Decimalbruch haben werde; $p$ muss nämlich eine von folgenden Formen haben: $2^n$, $5^n$, $2^n.5^m$, $2^m.5^n$,*) wo $m$ immer kleiner oder höchstens $= n$ sein soll.

Von welcher Form der Nenner $p$ aber auch sei, immer wird er in $2^n.5^n = (2.5)^n = 10^n$, nicht aber in einer niedrigeren Potenz von 10 aufgehen. Man muss demnach den Zähler des Bruches mit $10^n$ multipliciren, damit die Division durch den Nenner $p$ aufgehe, woraus unmittelbar folgt, dass der Quotient dieser Division aus $n$ Ziffern bestehen, der Decimalbruch also $n$ Decimalstellen, d. h. so viel Decimalstellen haben müsse, als der höchste der beiden Exponenten, mit welchen nach der Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind, Einheiten enthält.

Hiernach geben die Nenner 2, 5, 10 einen Decimalbruch mit einer Decimalstelle, die Nenner 4, 20, 25, 50, 100 mit zwei Decimalstellen, die Nenner 8, 40, 125, 200, 250, 500, 1000 mit drei Decimalstellen, die Nenner 16, 80, 400, 625, 1250, 2000, 2500, 5000, 10000 mit vier Decimalstellen u. s. w.

Enthält der Nenner des Bruches andere Primfactoren als 2 und 5, so kann, wie aus dem Vorigen erhellet, da diese andern Primfactoren nicht in 10 oder einer Potenz von 10 aufgehen würden, der Bruch nicht vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden, sondern muss einen periodischen geben.

Hierbei lassen sich zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der Nenner $p$ gar keine 2 und 5 unter seinen Primfactoren enthält oder nicht. Im erstern Falle fängt die Periode sogleich nach dem Komma an. Die Form der Rechnung sei diese:

$$
\begin{array}{l|l}
p & r0 \;|\; 0, q q_1 q_2 q_3 \ldots q_k \\
\hline
pq & \\
\hline
r_1 0 & \\
p\,q_1 & \\
\hline
r_2 0 & \\
p\,q_2 & \\
\hline
r_3 0 & \\
\vdots & \\
\hline
r_k 0 & \\
p\,q_k & \\
\hline
r_l &
\end{array}
$$

so dass also $\frac{r}{p} = 0, q q_1 q_2 q_3 \ldots q_k \ldots$ ist.

Es lässt sich nun zeigen, dass unter den Resten $r_1, r_2, r_3, \ldots r_k, r_l$ keiner eher wiederkehren kann, bevor nicht einer gleich dem Zähler geworden ist, dass also $r_l$ weder $= r_1$, noch $= r_2$, noch $= r_3$ u. s. w., noch $= r_k$ sein könne. Nach der Natur der Rechnung ist

*) Setzt man $m = 0$, so hat man als besondere Fälle für die beiden letztern Formen die beiden erstern Formen.

$$r_1 = 10\,r - pq$$
$$r_2 = 10\,r_1 - pq_1$$
$$r_3 = 10\,r_2 - pq_2$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$r_g = 10\,r_f - pq_f$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$r_l = 10\,r_k - pq_k$$

Wäre nun $r_l$ z. B. gleich $r_g$, so müsste auch

$10\,r_f - pq_f = 10\,r_k - pq_k$, also auch

$10\,r_f - 10\,r_k = pq_f - pq_k$ oder

$10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k)$ sein.

Da $p$ nicht in 10 aufgeht und auch nicht in $r_f - r_k$, indem $r_f$ und $r_k$ kleiner als $p$ sind, so kann es auch nicht in $10\,(r_f - r_k)$, d. h. in der linken Seite der Gleichung

$10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k)$ aufgehen, also

$\frac{10\,(r_f - r_k)}{p}$ nicht $= q_f - q_k$ sein, da

$\frac{10\,(r_f - r_k)}{p}$ keine ganze Zahl sein kann, $q_f - q_k$ aber eine ganze Zahl sein muss. Es kann demnach nicht $10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k)$ d. h. $r_l$ nicht gleich $r_g$ sein. Da aber nothwendig eine von den Zahlen $r$, $r_1$, $r_2$ u. s. w. wieder als Rest erscheinen muss, so kann dies nur die erste $r$, d. h. der Zähler des Bruches sein; dann aber kehrt auch der Quotient $q$ und die auf ihn folgenden nach der Reihe wieder. Es fängt also die Periode sogleich nach dem Komma an, wenn der Nenner gar keine 2 oder 5 unter seinen Primfactoren enthält.

Enthalte nun $p$ unter seinen Primfactoren ausser anderen auch 2 und 5 und sei z. B. $p = 2^n \cdot 5^m \cdot t$ oder $= 2^m \cdot 5^n \cdot t$, wo $n$ nicht kleiner als $m$ sein soll und $t$ eine nicht durch 2 oder 5 theilbare Zahl ist; man hat demnach

$\frac{r}{p} = \frac{r \cdot 10^n}{2^n \cdot 5^m \cdot t} : 10^n$ oder im andern Falle $= \frac{r \cdot 10^n}{2^m \cdot 5^n \cdot t} : 10^n$.

Nun ist $10^n$ immer durch $2^n \cdot 5^m$ und durch $2^m \cdot 5^n$ theilbar und der Quotient $\frac{10^n}{2^n \cdot 5^m}$ oder $\frac{10^n}{2^m \cdot 5^n}$ werde durch $v$ bezeichnet; dann ist

$$\frac{r}{p} = \frac{r \cdot v}{t} : 10^n.$$

Der Bruch $\frac{r \cdot v}{t}$ giebt, da $t$ keine 2 und 5 als Primfactoren enthält, einen periodischen Decimalbruch, dessen Periode sogleich nach dem Komma beginnt; nun muss aber $\frac{r \cdot v}{t}$ noch durch $10^n$ dividirt, das Komma also $n$ Ziffern nach der linken Hand hin gerückt wer-

Digitized by Google

den, es wird daher $\frac{r}{p}$ einen Decimalbruch geben, dessen Periode erst nach $n$ Ziffern d. h. nach so viel Ziffern anfängt, als der höchste der beiden Exponenten, mit welchen nach der Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind, Einheiten enthält.

Fasst man Alles zusammen, so hat man folgende Bestimmungen:

1) Ein Bruch lässt sich vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln, wenn der Nenner desselben zu seinen Primfactoren nur 2 und 5 enthält, und zwar ist die Anzahl der Decimalstellen immer dem höchsten der beiden Exponenten gleich, mit welchen nach Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind.

2) Ein Bruch giebt einen periodischen Decimalbruch, wenn der Nenner nicht bloss 2 und 5 zu Primfactoren enthält und zwar

a. die Periode fängt sogleich nach dem Komma an, wenn der Nenner zu Primfactoren gar keine 2 oder 5 enthält.

b. die Periode fängt nicht gleich nach dem Komma an, wenn der Nenner ausser andern Primfactoren auch noch 2 und 5 enthält, und zwar ist dann die Anzahl der der Periode vorhergehenden Ziffern gleich dem höchsten der beiden Exponenten, mit welchem nach Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind.

# XVII.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

(Der Herausgeber bittet um recht vielfache Mittheilung solcher Aufgaben in möglichst grosser Mannigfaltigkeit. Es kann seiner Meinung nach einer solchen Mittheilung nicht unbedingt der Umstand entgegen stehen, dass sich die Aufgaben schon anderwärts gedruckt finden, wenn dieselben nur weniger bekannt sind und in irgend einer Beziehung ein besonderes Interesse darbieten. Auch können späterhin besonders elegante Auflösungen in dem Archive mitgetheilt werden. Die folgenden Aufgaben sollen nur ein Versuch sein, den Artikel: „Uebungsaufgaben für Schüler", bei dessen Ueberschrift man es übrigens mit dem Zusatze für Schüler nicht allzu genau nehmen muss, zu einem stehenden in dem Archive zu machen, und der Herausgeber hofft in dieser Beziehung vorzüglich auch auf Unterstützung durch seine Herrn Mitarbeiter. Die folgenden Lehrsätze sollen natürlich immer bewiesen, die Aufgaben aufgelöst werden, worüber eine besondere Bemerkung späterhin nicht weiter gemacht werden wird.)

1. Wenn zwei gerade Linien sich unter Winkeln von 60° in einem gewissen Punkte $S$ schneiden, so ist der geometrische Ort der Spitzen aller gleichseitigen Dreiecke, deren Grundlinien zwi-

Digitized by Google

schen den Schenkeln der in Rede stehenden Winkel von 60°, und deren Spitzen auf derselben Seite ihrer Grundlinie wie der Punkt $S$ liegen, eine durch den Punkt $S$ gehende und gegen die beiden gegebenen geraden Linien unter Winkeln von 60° geneigte gerade Linie.

Dieser Satz, welcher zu verschiedenen geometrischen Betrachtungen Veranlassung geben kann, soll bewiesen und mittelst desselben dann die folgende Aufgabe aufgelöst werden.

2. Gleichseitige Dreiecke zu beschreiben, deren Spitzen in drei gegebenen durch einen Punkt gehenden geraden Linien liegen.

3. Wenn man ein Rechteck, dessen längere Seite sich zu seiner kürzern wie $\sqrt{2}:1$, d. h. wie die Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite verhält, durch eine mit seinen kürzern Seiten parallele gerade Linie halbirt, die erhaltene Hälfte auf ähnliche Weise wieder halbirt, und diese Operation in's Unendliche fortsetzt, so erhält man eine Reihe von Rechtecken, die sämmtlich einander ähnlich sind, und deren längere Seiten sich wie

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2^2}} : \frac{1}{\sqrt{2^3}} : \frac{1}{\sqrt{2^4}} : \frac{1}{\sqrt{2^5}} : \ldots.$$

zu einander verhalten.

4. Es ist ein Kreis und innerhalb desselben sind zwei Punkte gegeben; man soll durch diese beiden gegebenen Punkte einen Kreis dergestalt beschreiben, dass die gerade Linie, welche seine beiden Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise verbindet, durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht.

5. Ueber zwei gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks als Grundlinien sind zwei einander gleiche Dreiecke construirt, deren Spitzen in denselben Punkt fallen; man soll den geometrischen Ort dieses Punktes bestimmen.

6. Die folgenden goniometrischen Formeln sind zu beweisen.

1°. $\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

2°. $\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$$= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

3°. $\tan g(\alpha+\beta+\gamma)+\tan g(\alpha+\beta-\gamma)+\tan g(\alpha-\beta+\gamma)+\tan g(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$= 2\,\frac{2\sin 2(\alpha+\beta+\gamma)+\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma}{4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma},$$

4°. $4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$= 2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma-\cos 2\alpha^2-\cos 2\beta^2-\cos 2\gamma^2+1,$$

5°. $4\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)\cos(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$= 2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma+\cos 2\alpha^2+\cos 2\beta^2+\cos 2\gamma^2-1,$$

6°. $8\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$
$\sin\frac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

Digitized by Google

$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\delta + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\delta$$
$$- \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta,$$

7°. $8\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$
$$\cos\tfrac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\delta + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\delta$$
$$+ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta,$$

8°. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma) = 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$

9°. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma) = 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)-1,$

10°. $\sin(\alpha-\beta)^2+\sin(\alpha-\gamma)^2+\sin(\beta-\gamma)^2$
$$= 2\{1-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\},$$

11°. $\cos(\alpha-\beta)^2+\cos(\alpha-\gamma)^2+\cos(\beta-\gamma)^2$
$$= 1+2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma),$$

12°. $\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)^2+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)^2+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)^2$
$$+\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$= 2(1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma),$$

13°. $\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)^2$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$= 2(1-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma),$$

14°. $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2+\cos(\alpha+\beta+\gamma)^2$
$$= 2\{1+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\},$$

15°. $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2+\sin(\alpha+\beta+\gamma)^2$
$$= 2\{1-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\}.$$ *)

7. Ein dreiseitiges Prisma mit einer Ebene so zu durchschneiden, dass der Schnitt ein gleichseitiges Dreieck wird.

8. Zu finden, an welchen Tagen des Jahrs die Sonne zweien Oertern, deren Längen und Breiten gegeben sind, in demselben Augenblicke auf- oder untergeht.

---

*) Diese goniometrischen Formeln finden sich nebst noch vielen andern auf einem unter den Papieren des verstorbenen Professors Mollweide befindlichen Blatte verzeichnet. Aus der Handschrift lässt sich jedoch mit völliger Sicherheit erkennen, dass dieselben von dem ebenfalls verstorbenen Professor Buzengeiger in Freiburg herrühren. Der zu frühe Tod dieser beiden trefflichen Männer wird von den Mathematikern mit Recht schmerzlichst empfunden und bedauert. G.

# XVIII.

## Miscellen.

Von dem kürzlich verstorbenen berühmten französischen Mathematiker Poisson erzählt man folgenden Zug. Im Jahre 1802 kam ein Rekrut zu ihm, gab sich für seinen Pathen aus, und ersuchte ihn, ihm eine Summe von 500 Francs aufzuheben; komme er im Kriege um, so solle sie seiner Schwester zugehören; bleibe er aber am Leben, so werde er das Geld selbst wieder abholen. — „Ganz recht, mein Freund" antwortete Poisson „legt es nur dort hin, und lasst mich arbeiten, denn ich habe viel zu thun." Der Rekrut legt den Sack mit den 500 Francs auf ein Büchergestell, und Poisson legt, um ihn vor Besuchenden nicht sehen zu lassen, einen Band des Horaz darauf. Zwanzig Jahre später kommt ein Mann mit sonnverbranntem Gesicht, und verlangt seine 500 Francs zurück. Poisson kann sich nicht erinnern; Jener schwört Stein und Bein, dass er ihm das Geld zugestellt habe. „Wie" fragt endlich Poisson voll Wuth „Ihr hättet mir die Summe in die Hände gelegt?" — „Nein" erwiederte der Soldat „aber auf jenes Büchergestell; Sie selbst haben dieses Buch darauf gelegt." Bei diesen Worten hebt er den Klassiker auf, und findet hinter dem bestaubten Octavband, zu seiner nicht geringen Verwunderung, den Sack mit den 500 Francs so wieder, wie er ihn vor zwanzig Jahren hingelegt hatte.

---

Der berühmte englische Physiker und Chemiker Michael Faraday ist der Sohn eines gewöhnlichen Grobschmiedes, der ihn zu einem kleinen Buchbinder in London in die Lehre that, als er erst neun Jahre alt war, bei dem Faraday bis zu seinem zweiundzwanzigsten Jahre blieb. Die Umstände, welche veranlassten, dass er die Buchbinderwerkstatt mit dem chemischen Laboratorium vertauschte, werden auf folgende Weise erzählt. Ned Magrath, jetzt Sekretair bei dem Athenäum, kam vor etwa fünf und zwanzig Jahren zu dem Buchbinder Ribeau und sah, dass einer der Gesellen eifrig in einem Buche studirte, das er einbinden sollte. Er trat näher und sah, dass es ein Band der Encyclopaedia britannica war, aufgeschlagen bei dem Artikel „Electricität." Er liess sich mit dem eifrigen Buchbindergesellen in ein Gespräch ein und wunderte sich nicht wenig, bei demselben nicht geringe chemische

Digitized by Google

Kenntnisse zu finden. Er gab ihm darauf eine Eintrittskarte zu den Vorlesungen Davy's in der Royal Institution, und hier konnte man nun jeden Tag den Buchbindergesellen dem Vorlesenden gegenüber, mit der gespanntesten Aufmerksamkeit zuhörend oder bisweilen schreibend, sitzen sehen. Die Vorlesungen nahmen ein Ende, aber Faraday's Geist hatte einen neuen Anstoss bekommen, der nur durch die grösste Noth hätte unwirksam gemacht werden können; dies wurde jedoch durch die Bereitwilligkeit verhindert, mit welcher Davy dem verwandten Geiste zu Hülfe kam. Er ernannte Faraday zu seinem Gehülfen in dem Laboratorium, und nach zwei bis drei Jahren konnte er ihn als Sekretair gebrauchen. Jetzt steht der ehemalige Buchbindergesell an der Spitze der Chemiker in England. Diese wenig oder gar nicht bekannten Notizen sind einer Schrift entlehnt, in der man sie nicht suchen sollte, nämlich Arnett's History of book-binding.

---

In der Eloge de Lambert in den Nouveaux Mémoires de l'Academie royale des sciences et belles-lettres. 1778. p. 84. wird bei Gelegenheit der Berufung dieses berühmten Mathematikers nach Berlin der folgende characteristische Zug von demselben erzählt: Le Roi le fit appeler à Potsdam au mois de Mars (1764). C'étoit une conjoncture bien critique pour le sort de M. Lambert; et d'abord elle parut décider pour la négative. Le ton tranchant de ses réponses, l'assurance avec laquelle il répondit sans hésiter à la question: „Que savez vous?" — „Tout, Sire" — et à l'instance „Comment l'avez-vous appris?" — „De moi-même", en frappant des oreilles, peu faites à ce langage, pouvoient faire juger que la plénitude de son cerveau en avoit altéré quelques ressorts. L'entrevue demeura donc infructueuse et paroissoit devoir l'être sans retour; mais le Roi, mis au fait de la singularité de ce caractère, qu'un de nos dignes Confrères, honoré des entretiens journaliers de S.M. Lui assura ressembler à celui de La Fontaine, ne voulut pas priver son Académie d'un Membre dont elle avoit tant à se promettre. Il y fut donc aggrégé avec une pension, et prononça son discours de réception dans l'Assemblée publique du mois de Janvier 1765. Depuis ce tems-là le Roi lui a donné des marques fréquentes et distinguées de son estime, en le plaçant dans la Commission économique de l'Académie, et dans le département des Batimens avec le titre de Conseiller supérieur, et en augmentant considérablement sa pension.

---

Man habe $n$ beliebige Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, ... $A_n$ im Raume. Wenn man diese Punkte in einer beliebigen Ordnung nimmt, und von dem 1sten nach dem 2ten, von dem 2ten nach dem 3ten, von dem 3ten nach dem 4ten, u. s. w. von dem $(n-1)$sten

Digitized by Google

nach dem $n$ten, von dem $n$ten nach dem 1sten gerade Linien zieht, so wollen wir den ganzen auf diese Weise erhaltenen Zug eine Polygonlinie nennen, und man kann nun fragen, durch wie viele verschiedene Polygonlinien die gegebenen $n$ Punkte sich mit einander verbinden lassen. Die Antwort auf diese Frage kann leicht auf folgende Art gegeben werden.

Da die Anzahl der Permutationen der gegebenen $n$ Punkte bekanntlich $1 . 2 . 3 \ldots n$ ist, so giebt es natürlich überhaupt $1 . 2 . 3 \ldots n$ Polygonlinien, und es entsteht jetzt bloss die Frage, ob diese Polygonlinien sämmtlich von einander verschieden sind, oder ob unter denselben sich nicht vielleicht einige identische finden. Um hierüber zur Gewissheit zu kommen, denke man sich eine beliebige, aber bestimmte Permutation der $n$ gegebenen Punkte, z. B. die Permutation

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n.$$

Nun erhellet zunächst auf der Stelle, dass alle aus den folgenden Permutationen der $n$ gegebenen Punkte entspringenden Polygonlinien unter einander identisch sind:

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n$$
$$A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n\ A_1$$
$$A_3\ A_4 \ldots . A_n\ A_1\ A_2$$
$$A_4 \ldots . A_n\ A_1\ A_2\ A_3$$
u. s. w.
$$A_n\ A_1\ A_2\ A_3 \ldots . A_{n-1}.$$

Ferner geben aber offenbar auch alle die Permutationen, welche aus den vorhergehenden entspringen, wenn man die Buchstaben in umgekehrter Ordnung schreibt, ganz dieselbe Polygonlinie wie die vorhergehenden Permutationen, und es erhellet also hieraus nun mit völliger Deutlichkeit, dass unter den $1 . 2 . 3 \ldots n$ Polygonlinien, welche es überhaupt giebt, eine jede nothwendig $2n$ Mal vorkommt, so dass man also, wenn die Anzahl der sämmtlich wirklich von einander verschiedenen Polygonlinien durch $p$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$2np = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

hat, aus der sich

$$p = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{2n} = \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{2}$$

ergiebt. Für $n=3$ ist z. B. $p = \frac{1 . 2}{2} = 1.$

Für $n=4$ ist $p = \frac{1 . 2 . 3}{2} = 3.$

Für $n=5$ ist $p = \frac{1 . 2 . 3 . 4}{2} = 12.$ Von der Richtigkeit dieser Resultate kann man sich leicht auf praktischem Wege überzeugen.

Digitized by Google

Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser wir der Einfachheit wegen der Einheit gleich setzen wollen, sei ein sphärisches Dreieck $A\,B\,C$ beschrieben, dessen Seiten, so wie sie den Winkeln $A$, $B$, $C$ gegenüberstehen, wie gewöhnlich durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. Durch die Punkte $A$, $B$, $C$ ziehe man nun an die Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ sechs Tangenten, bezeichne die Durchschnittspunkte der beiden an die Seiten $a$, $b$, $c$ gezogenen Tangenten respective durch $A_1$, $B_1$, $C_1$, und verbinde diese drei Punkte durch gerade Linien mit einander, so erhält man ein ebenes Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$, dessen drei Seiten, so wie sie den Winkeln $A_1$, $B_1$, $C_1$ gegenüberstehen, respective durch $a_1$, $b_1$, $c_1$ bezeichnet werden sollen. Die Seiten und Winkel dieses ebenen Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ wollen wir nun durch die Seiten des sphärischen Dreiecks $A\,B\,C$ auszudrücken suchen.

Zuvörderst ist nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, wie sogleich erhellet,

$$a_1^2 = \tang\tfrac{1}{2}b^2 + \tang\tfrac{1}{2}c^2 - 2\tang\tfrac{1}{2}b\tang\tfrac{1}{2}c\cos A,$$
$$b_1^2 = \tang\tfrac{1}{2}c^2 + \tang\tfrac{1}{2}a^2 - 2\tang\tfrac{1}{2}c\tang\tfrac{1}{2}a\cos B,$$
$$c_1^2 = \tang\tfrac{1}{2}a^2 + \tang\tfrac{1}{2}b^2 - 2\tang\tfrac{1}{2}a\tang\tfrac{1}{2}b\cos C.$$

Weil nun nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

ist, so ist, wie man leicht findet, wenn man

$$\tan\tfrac{1}{2}b = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b},\quad \tang\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c}$$

und

$$\sin b = 2\sin\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}b,\quad \sin c = 2\sin\tfrac{1}{2}c\,\cos\tfrac{1}{2}c$$

setzt,

$$a_1^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2 + 2\cos\frac{1}{2}b^2\sin\frac{1}{2}c^2 - (\cos a - \cos b\cos c)}{2\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2}.$$

Setzt man nun ferner

$$\cos a - \cos b\cos c = \cos a - (\cos\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2)(\cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2),$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$a_1^2 = \frac{1-\cos a}{2\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}a^2}{\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2},$$

und folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben,

$$a_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\quad b_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a},\quad c_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}.$$

Aus diesen drei Formeln erhält man leicht

Digitized by Google

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

$$b_1 + c_1 - a_1 = \frac{\sin b + \sin c - \sin a}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

$$c_1 + a_1 - b_1 = \frac{\sin c + \sin a - \sin b}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

$$a_1 + b_1 - c_1 = \frac{\sin a + \sin b - \sin c}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Ist $\Delta_1$ der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$, so ist bekanntlich

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a_1+b_1+c_1)\ (b_1+c_1-a_1)\ (c_1+a_1-b_1)\ (a_1+b_1-c_1)},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{(\sin a+\sin b+\sin c)(\sin b+\sin c-\sin a)(\sin c+\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b-\sin c)}}{16 \cos \frac{1}{2}a^2 \cos \frac{1}{2}b^2 \cos \frac{1}{2}c^2}$$

Auch ergiebt sich sogleich die folgende Relation

$$a_1\ b_1\ c_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a^3 \cos \frac{1}{2}b^2 \cos \frac{1}{2}c^2} = \frac{\tang \frac{1}{2}a \tang \frac{1}{2}b \tang \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Nach der ebenen Trigonometrie ist bekanntlich

$$\cos A_1 = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a_1^2}{2b_1\ c_1},$$

und folglich, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke von $a_1$, $b_1$, $c_1$ einführt, nach einigen leichten Verwandlungen, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben,

$$\cos A_1 = \frac{\sin b^2 + \sin c^2 - \sin a^2}{2 \sin b \sin c},$$

$$\cos B_1 = \frac{\sin c^2 + \sin a^2 - \sin b^2}{2 \sin c \sin a},$$

$$\cos C_1 = \frac{\sin a^2 + \sin b^2 - \sin c^2}{2 \sin a \sin b}.$$

Die weitere Verfolgung der Vergleichung der beiden Dreiecke $A\ B\ C$ und $A_1\ B_1\ C_1$ mit einander überlassen wir dem Leser, indem wir diesen Gegenstand als eine, wie es uns scheint, zweckmässige Uebung für Schüler in der ebenen und sphärischen Trigonometrie hier nur haben andeuten wollen.

Digitized by Google

## Berichtigung.

Seite 15, Zeile 9 setze man: — 2,710911 und — 2,710913 für 2,710911 und 2,710913.

Digitized by Google

# XIX.

## Beiträge zur Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Von dem

Herrn Professor Dr. L. Oettinger

zu Freiburg i. Br.

### I.

### Der Werth der Erwartung im Verhältniss zu der Art, die zu wagende Summe auszusetzen.

$A$ will die Summe $ra$ wagen. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist $\frac{m}{m+n}$, die zu verlieren ist $\frac{n}{m+n}$. So oft $A$ gewinnt, erhält er den Einsatz $q$ mal als reinen Gewinn. Es fragt sich: Soll $A$ die Summe $ra$ in einem Versuche, soll er sie in $r$ hintereinander folgenden oder gleichzeitigen Versuchen wagen?

Um die vorliegende Frage zu beantworten, ist der Werth der Erwartung zu bestimmen, die Jemand hat, wenn er die Summe $ra$ in einem Versuche oder die Summe $a$ in $r$ Versuchen aussetzt und die erhaltenen Resultate sind unter sich zu vergleichen.

*a*) Setzt $A$ die Summe in einem Versuche aus, so ergiebt sich bekanntlich der Werth seiner Erwartung durch das Product des Gewinnes in die Wahrscheinlichkeit diesen Gewinn zu erhalten. Der gesuchte Werth ergiebt sich hiernach

$$1)\quad E = qra \cdot \frac{m}{m+n}.$$

*b*) Die genannte Summe wird auf $r$ hintereinander folgende Versuche vertheilt und in jedem die Summe $a$ ausgesetzt.

Folgende Fälle können eintreten: $A$ gewinnt in allen Versuchen, oder in $(r-1)$, oder in $(r-2)$, oder in $(r-3)$, ... oder in 2, oder in einem Versuche. Hiedurch sind alle für den Unternehmer günstigen Fälle erschöpft. Der Gesammt-Werth der Erwartung, der sich hierauf gründet, wird gefunden, wenn derjenige der einzelnen Fälle bestimmt und die Summe aller ermittelt wird.



Digitized by Google

Die Wahrscheinlichkeit, in allen Versuchen zu gewinnen, ist

$$W = \frac{m^r}{(m+n)^r}.$$

In diesem Falle gewinnt $A$ die Summe $q \,.\, ra$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_r = \frac{m^r}{(m+n)^r} \cdot q \,.\, ra.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $(r-1)$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dass $A$ einmal verliere. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse auf die genannte Weise eintreten, ist

$$r \cdot \frac{m^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} \cdot \frac{n}{m+n}.$$

In diesem Falle gewinnt $A$ die Summe $(r-1)qa$. Der Werth der Erwartung ist dann

$$E_{r-1} = \frac{r}{1} \cdot \frac{m^{r-1} \,.\, n}{(m+n)^r} (r-1)qa.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $(r-2)$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dass das entgegengesetzte Ereigniss zweimal eintreten werde. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$\frac{r \,.\, (r-1)}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{m^{r-2}}{(m+n)^{r-2}} \cdot \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

In diesem Falle gewinnt $A$ die Summe $(r-2)\,qa$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_{r-2} = \frac{r\,(r-1)}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{m^{r-2} \,.\, n^2}{(m+n)^r} (r-2) \,.\, qa$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich durch Analyse sämmtlicher für $A$ günstigen Fälle für den Gesammtwerth der Erwartung folgende Darstellung:

$$E = q \,.\, ra \cdot \frac{m}{m+n} \left[ \frac{m^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} + \frac{r-1}{1} \cdot \frac{m^{r-2} \,.\, n}{(m+n)^{r-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(r-1)^2|-1}{1^2|1} \cdot \frac{m^{r-3}\, n^2}{(m+n)^{r-1}} + \ldots + \frac{(r-1)^{r-1}|-1}{1^{r-1}|1} \cdot \frac{n^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} \right]$$
$$= q \,.\, ra \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m+n)^{r-1}}{(m+n)^{r-1}},$$

also

$$2) \quad E = q\, ra \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Das gleiche Resultat, wie unter 2) ergiebt sich, wenn die Versuche gleichzeitig gemacht werden. Die Vergleichung von 1) und 2) führt in Folge der eben angeführten Bemerkung zu folgendem Satze:

3) Der Werth der Erwartung oder der mathematischen Hoffnung bleibt derselbe, man mag eine zu wagende Summe in einem Versuche oder gleichheitlich auf mehrere Versuche aussetzen, vorausgesetzt dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, in allen Fällen gleich gross ist.

Hierher gehört auch folgender Fall, der eine besondere Art von Versuchen in sich begreift, nämlich diejenigen, worin keine

Digitized by Google

Wiederholungen eintreten können, wie sie bei dem eben betrachteten Fall vorausgesetzt wurden.

In einer Urne sind $m$ Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... $m$ bezeichnet sind. Es werden $p$ Kugeln hintereinander gezogen und nach geschehener Ziehung zusammen in die Urne zurückgeworfen. Jede Zahl kann mit einer beliebigen Summe besetzt werden. Erscheint die besetzte Zahl unter den gezogenen, so wird der Einsatz $q$ mal als reiner Gewinn bezahlt. $A$ will die Summe $ra$ wagen. Soll er sie auf eine Zahl setzen, oder auf $r$ Zahlen in einer und derselben Ziehung gleichheitlich vertheilen?

Auch hier beruht die Beantwortung der vorliegenden Frage auf zwei Fällen und es ist der Werth der Erwartung zu bestimmen, wenn die ganze Summe auf eine Zahl gesetzt, oder gleichheitlich auf mehrere Zahlen derselben Ziehung vertheilt wird.

*a*) $A$ setzt die Summe $ra$ auf eine einzige Zahl. In diesem Falle gewinnt er den $q$ fachen Einsatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die besetzte Zahl unter $p$ gezogenen befinden werde, ist

$$W = p \cdot \frac{(m-1)^{p-1\,|-1}}{m^{p\,|-1}} = \frac{p}{m}.$$

Der Werth der Erwartung ist für diesen Fall

4) $$E = \frac{p}{m}\, q \,.\, ra.$$

*b*) Die Ermittelung des Werthes der Erwartung von $A$ für den Fall, dass die Summe $ra$ gleichheitlich auf $r$ Zahlen einer Ziehung vertheilt wird, beruht auf der Untersuchung folgender Fälle. Alle besetzten Zahlen erscheinen; $r-1$, $r-2$, $r-3$, .... 3, 2 oder 1 besetzte Zahl erscheint.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle besetzten Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r\,|-1}}{1^{r\,|\,1}} \cdot \frac{r^{r\,|-1}\,(m-r)^{p-r\,|-1}}{m^{p\,|-1}}.$$

In diesem Falle ist der reine Gewinn $q \,.\, ra$. Der Werth der Erwartung ist sofort

$$E_r = \frac{p^{r\,|-1}\,(m-r)^{p-r\,|-1}}{m^{p\,|-1}}\, q \,.\, ra.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $(r-1)$ von den besetzten Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r-1\,|-1}}{1^{r-1\,|\,1}} \cdot \frac{r^{r-1\,|-1}\,(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p\,|-1}}.$$

In diesem Falle beträgt der Gewinn $(r-1)qa$. Der Werth der Erwartung ist sofort

$$E_{r-1} = \frac{p^{r-1\,|-1} \,.\, r(m-r)^{p-r+1\,|-1}}{m^{p\,|-1}}\,(r-1)\,qa.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $(r-2)$ Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r-2\,|-1}}{1^{r-2\,|\,1}} \cdot \frac{r^{r-2\,|-1} \,.\, (m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p\,|-1}}.$$

Der Gewinn ist in diesem Falle $(r-2)qa$. Hiernach ist der Werth der Erwartung



Digitized by Google

$$E_{r-2} = \frac{p^{r-2\,|-1}\; r^{2\,|-1}\; (m-r)^{p-r+3\,|-1}}{1^{2\,|\,1}\; m^{p\,|-1}} (r-2)\, qa.$$

Werden diese Bemerkungen weiter fortgesetzt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung folgende Darstellung:

$$E = \frac{r\, p^{r\,|-1}\, (m-r)^{p-r\,|-1}}{m^{p\,|-1}} qa + \frac{r^{2\,|-1}\, p^{r-1\,|-1}\, (m-r)^{p-r+1\,|-1}}{m^{p\,|-1}} qa$$
$$+ \frac{r^{3\,|-1}\, p^{r-2\,|-1}\, (m-r)^{p-r+2\,|-1}}{m^{p\,|-1}} qa + \ldots + \frac{r^{2\,|-1}}{1} \cdot \frac{p^{2\,|-1}\, (m-r)^{p-2\,|-1}}{m^{p\,|-1}} qa$$
$$+ \frac{r\,.\,p\;\; (m-r)^{p-1\,|-1}}{m^{p\,|-1}} qa.$$

Werden die jedem Gliede gemeinschaftlichen Grössen, und wird ferner die Fakultät

$$(m-r)^{p-r\,|-1} = (m-r)\;(m-r-1)\;(m-r-2) \ldots (m-p+1)$$

ausgestossen, so geht diese Darstellung in folgende über:

$$E = \frac{p^{(m-r)^{p-r\,|-1}}}{m^{p\,|-1}} q\, r\, a \left[ (p-1)^{r-1\,|-1} + \frac{r-1}{1} (p-1)^{r-2\,|-1} (m-p) \right.$$
$$+ \frac{(r-1)^{2\,|-1}}{1^{2\,|\,1}} (p-1)^{r-3\,|-1} (m-p)^{2\,|-1} + \ldots\ldots$$
$$\left. \ldots + \frac{r-1}{1} (p-1)\, (m-p)^{r-2\,|-1} + (m-p)^{r-1\,|-1} \right].$$

Die in den Klammern eingeschlossene Reihe lässt sich bekanntlich auf den Ausdruck $(m-1)^{r-1\,|-1}$ zurückführen. Hiedurch geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$E = \frac{p\;(m-r)^{p-r\,|-1}}{m^{p\,|-1}} q\, r\, a\; (m-1)^{r-1\,|-1} = \frac{p\, q r a\; (m-1)^{p-1\,|-1}}{m^{p\,|-1}}$$

oder

$$5)\quad E = \frac{p}{m}\; q\,.\,ra.$$

Aus der Vergleichung von 4) und 5) ergiebt sich der Schluss, dass auch unter den eben genannten Bedingungen der Werth der Erwartung in beiden Fällen gleich gross ist.

Die unter 4) und 5) gefundenen Resultate wurden unter der Voraussetzung gewonnen, dass $r$ kleiner oder höchstens so gross als $p$ ist. Sie gelten jedoch auch noch dann, wenn $r$ grösser als $p$ wird, und dann tritt eine Art von Paradoxon ein. Ist nämlich $r$ grösser als die Anzahl der Kugeln, welche in einer Ziehung gezogen werden, so können höchstens $p$ von den besetzten Kugeln gewinnen, und dann kann $A$, wenn er auf $r$ Kugeln je einmal die Summe $a$ setzt, im glücklichsten Fall den Gewinn $p\,.\,qa$ erhalten, während er bei Besetzung einer einzigen Zahl im glücklichen Fall die Summe $r\,.\,qa$ erhalten kann. Doch dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass der Werth der Erwartung den mittleren oder Durchschnitts-Werth für alle mögliche Gewinnste angiebt, und dass dieser Durchschnittswerth einer bestimmten Summe gleichkommen kann, ohne dass die einzelnen Gewinnste, wodurch er bedingt ist, zu einer solchen Höhe anwachsen, als diess in einem andern Falle statt finden kann.

Untersucht man nun die möglichen Fälle, worin $A$ gewinnen

Digitized by Google

kann, wenn $r > p$ ist, so ergeben sich folgende: Von den besetzten Zahlen gewinnen $p$, oder $p-1$, $p-2$, .... 3, 2, 1. Wird der Werth der Erwartung für jeden einzelnen Fall nach der vorhin angegebenen Methode bestimmt, so ergiebt sich folgende Darstellung für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$E = \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot r^{p|-1}\, p \,.\, qa + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{r^{p-1|-1}\,(m-r)}{m^{p|-1}} (p-1)\, qa$$

$$+ \frac{p^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{r^{p-2|-1}\,(m-r)^{2|-1}}{m^{p|-1}} (p-2)\, qa + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p^{2|-1}}{2^{2|1}} \cdot \frac{r^{2|-1}\,(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} 2qa + \frac{p\,(m-r)^{p-1|-1}\,.\,r}{m^{p|-1}}\, qa$$

$$= \frac{p\,.\,r\,qa}{m^{p|-1}} \Big[ (r-1)^{p-1|-1} + \frac{p-1}{1} (r-1)^{p-2|-1} (m-r)$$

$$+ \frac{(p-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} (r-1)^{p-3|-1} (m-r)^{2|-1} + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{p-1}{1} (r-1)\, (m-r)^{p-2|-1} + (m-r)^{p-1|-1} \Big]$$

Wird die in Klammern eingeschlossene Reihe wie vorhin behandelt, so ergiebt sich

6) $E = \frac{p}{m}\, r\, qa.$

Der Calcul kennt also zwischen 4, 5, 6 keinen Unterschied. Der unter 2 aufgestellte Satz ist bekannt. Er findet sich unter andern in Lacroix's Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (übersetzt v. Unger) §. 75. bewiesen. Die unter 4, 5 und 6 aufgestellten Sätze sind, wie man sieht, eine Erweiterung dieses Satzes. Sie werden hier eine Stelle um so eher finden, weil sie nicht gekannt zu sein scheinen und sogar Gauthier d'Hauteserve in seinem Traité sur les probab. Probl. XVII. P. 77. derbe Verstösse dagegen gemacht hat.

Dort findet sich nämlich folgende Aufgabe: *A* will mit 3 Fr. im Lotto spielen. Soll er sie auf eine Nummer, oder auf drei Nummern als Auszüge in einer und derselben Ziehung oder endlich auf je eine Nummer in drei verschiedenen Ziehungen setzen?

Gauthier findet als Werth der Erwartung, wenn er 3 Fr. auf eine Nummer setzt, wobei er den Satz 14 mal als reinen Gewinn erhält, 2,3333 ... Fr.; dagegen bei einer Vertheilung auf drei Nummern einer und derselben Ziehung 2,5464 ... Fr.; für den Fall, dass er sie hintereinander in drei verschiedenen Ziehungen vertheilt 2,601. Die letzte Methode wäre demnach die Vortheilhafteste.

Hätte Hr. G. d'Hauteserve richtige Schlüsse gemacht, so hätte er nach der Gleichung 4, 2 und 5 immer nur ein und dasselbe Resultat erhalten, nämlich 2,333 ... Fr. Zu dem scheint sich in das im angeführten Buche mitgetheilte Resultat 2,5464 ... ein Druck- oder Rechnungsfehler eingeschlichen zu haben.

Die Unrichtigkeit der von Hrn. G. d'Hauteserve gemachten Schlüsse tritt ganz besonders auffallend im dritten Falle hervor. Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, gerade einmal in drei Ziehungen zu gewinnen, $3 \,.\, \frac{5}{56}$, wie Hr. G. meint, so wäre hiernach die Wahrscheinlichkeit in 18 Ziehungen einmal zu gewinnen, $18 \,.\, \frac{5}{56} = 1$

Digitized by Google

und jeder, der 18 mal auf eine Nummer in den verschiedenen auf einander folgenden Ziehungen des Lottos setzte, müsste nach der Ansicht des Hrn. G. gewinnen, was offenbar falsch ist.

Wir schliessen mit der Bemerkung, dass die oben unter 1 bis 6 aufgestellten Sätze nur von dem objectiven Werthe der Erwartung, nicht aber von dem subjectiven oder individuellen Werth derselben gelten. Um letztern zu ermitteln sind andere Schlüsse zu machen.

---

## II.

### Verhältniss der Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Spiele gelangen, zum Werthe der Erwartung.

In einer Urne sind $n$ Loose enthalten, und darunter zwei Treffer und $n-2$ Nieten. Der eine Treffer gewinnt die Summe $a$, der andere die Summe $b$. Die beiden Gewinnste sollen unter $n$ Personen $A_1$, $A_2$, $A_3$ .... $A_n$ durchs Loos vertheilt werden. Jede Person kommt in der genannten Ordnung zum Loosen und zieht dann ein Loos aus der Urne. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jede einzelne Person vor dem Anfange der Ziehung?

Um die vorliegende Frage zu beantworten, ist zu beachten, dass die beiden Gewinnste in der angegebenen oder in der umgekehrten Ordnung erscheinen können. Erscheinen sie in der angegebenen, so können folgende Fälle eintreten:

$\alpha$) d. Gewinnst. fall. a. d. 1te u. 2te, 1te u. 3te, 1te u. 4te .... 1te u. $n$te Pers.
$\beta$) – – – – – 2te – 3te, 2te – 4te, 2te – 5te .... 2te – $n$te –
$\gamma$) – – – – – 3te – 4te, 3te – 5te, 3te – 6te .... 3te – $n$te –
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$\nu$) die Gewinnste fallen auf die $(n-1)$te und $n$te Person.

Diese Zusammenstellung umfasst alle möglichen Fälle. Sie stimmen mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in $n$ Fächer überein und sind deswegen ihrer Zahl nach (s. m. Comb. Lehre *)) $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Jeder Theilnehmer hat die Aussicht, dass sich das Loos in $(n-1)$ Fällen günstig für ihn entscheide. Für jeden einzelnen Fall muss der Werth der Erwartung bestimmt und sämmtliche Werthe müssen zusammengezählt werden. Die Wahrscheinlichkeit ist für jeden einzelnen Fall veränderlich.

Geht man zur Werthbestimmung der einzelnen Fälle über, so setzt die Natur des unter $\alpha$) aufgezählten Falles voraus, dass $A_1$ und $A_2$ gewinne, oder dass $A_1$ und $A_3$ gewinne, also für $A_2$ eine Niete erscheine, dass $A_1$ und $A_4$ gewinne, also für $A_2$ und $A_3$ eine Niete erscheine u. s. w. Diese Bemerkungen führen zu folgender Darstellung:

---

*) Die Lehre von den Combinationen nach einem neuen Systeme bearbeitet und erweitert von Dr. L. Oettinger. Freiburg, 1837. 8. Seite 94. G.

Digitized by Google

$$1)\ \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Wendet man die eben gemachten Bemerkungen auch auf die unter *b*) aufgeführten Fälle an, so gewinnt man folgende Zusammenstellung:

$$2)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Für die unter *c*) angeführten Fälle ergiebt sich:

$$3)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{b}{n-5} = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

u. s. w. Der letzte Fall giebt folgende Bestimmung:

$$4)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Erscheinen die Gewinnste in umgekehrter Ordnung, so treten auch dafür die oben unter *a*, *b*, *c*, *d* .... *n* aufgeführten Fälle wieder

Digitized by Google

ein. Sie führen nach den beigefügten Bemerkungen zu folgenden Darstellungen:

5) $\frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

$\frac{b}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

$\frac{b}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{a}{n-3} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

$\frac{b}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{a}{n-4} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$\frac{b}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}.$

6) $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{a}{n-3} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{a}{n-4} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}$

u. s. w. Endlich

7) $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots\cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot a = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1}.$

Die Hoffnung für $A_1$ den Gewinn $a$ zu erhalten ist in 1) angegeben. $(n-1)$ Fälle sind für ihn günstig, die sämmtlich einander gleich sind. Ihre Summe ist hiernach

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} (n-1) = \frac{a}{n} \cdot b.$$

Nun hat $A_1$ offenbar nur auf einen Gewinn, und in diesem Fall auf den Gewinn $a$ Anspruch. Der Gewinn $b$ fällt sofort einem der übrigen Theilnehmer zu. Dieser Gewinn ist von dem vorstehenden Resultate zu trennen. Der Werth der Erwartung für $A_1$ hinsichtlich des Gewinnstes $a$ ist hiernach

$$a_1 = \frac{a}{n}.$$

In 5) ist der Werth der Erwartung für $A_1$ in Beziehung auf den Gewinn $b$ angegeben. Die Wiederholung der gemachten Bemerkungen hinsichtlich des Gewinnstes $b$ giebt hiernach für $A_1$

$$\beta_1 = \frac{b}{n}.$$

Der Gesammtwerth seiner Erwartung ist sofort

$$E_1 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Auf ganz ähnliche Weise bestimmt sich der Werth der Erwartung für $A_2$. Nach 2) giebt es für ihn $(n-2)$ günstige Fälle, den Gewinn $a$ zu erhalten, während ein späterer Theilnehmer den Gewinn $b$ erhält. Nach 5) hat er noch einmal Hoffnung auf denselben Gewinn, während $A_1$ den Gewinn $b$ erhält. Hiernach ist der Werth seiner Erwartung in Beziehung auf $a$:

$$\alpha_2 = \frac{a}{n}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich der Werth seiner Erwartung in Beziehung auf den Gewinn $b$. Er ist

$$\beta_2 = \frac{b}{n}.$$

Der Gesammtwerth seiner Erwartung ist also

$$E_2 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Wird diese Entwicklungsweise weiter fortgeführt, so ergiebt sich der Werth der Erwartung für $A_3$

$$E_3 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n},$$

und allgemein der Werth der Erwartung für den Theilnehmer $A_k$

$$8)\ E_k = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Diess führt zu dem Schlusse:

9) Sollen zwei Gewinnste $a$ und $b$ durch das Loos unter $n$ Theilnehmer, die in einer vorgeschriebenen Ordnung zum Loosen gelangen, auf die oben bezeichnete Weise vertheilt werden, so ist der Werth der Erwartung für jeden Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung gleich.

Geht man von der oben vorgeschriebenen Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ab und legt eine andere zu Grund, so bemerkt man leicht, dass sich die oben gemachten Schlüsse durchaus nicht ändern, und sich leicht auf die neu gewählte Ordnung übertragen lassen, dass sofort der Werth der Erwartung vor dem Beginne der Verloosung für jeden Theilnehmer unverändert bleibt. Hiernach rechtfertigt sich der Schluss:

10) Sollen zwei Gewinnste $a$ und $b$ durch das Loos unter $n$ Theilnehmer auf die oben angegebene Weise vertheilt werden, so ist die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig und der Werth der Erwartung ist vor dem Beginne der Verloosung für alle Theilnehmer gleich.

Alles bleibt wie oben. $k$ Nieten sind gezogen worden. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jeden einzelnen der übrigen Theilnehmer?

Digitized by Google

Sind $k$ Loose gezogen, so sind auch $k$ Theilnehmer ausgetreten und noch $(n-k)$ Loose in der Urne nebst den Gewinnsten $a$ und $b$ zurück, worauf $n-k$ Personen Anspruch haben. Der vorliegende Fall ist ganz nach der vorhin angegebenen Weise zu behandeln. Die verminderte Anzahl der Loose ändert die Schlussfolge nicht: Der Werth der Erwartung für jeden einzelnen der noch übrigen Theilnehmer ist

$$9)\quad E=\frac{a}{n-k}+\frac{b}{n-k}.$$

Ist schon ein Gewinn, etwa $a$, gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$10)\quad E=\frac{b}{n-k}.$$

Wir kehren zu der oben aufgestellten Frage zurück und verallgemeinern.

In einer Urne, die $n$ Loose enthält, befinden sich drei Treffer und $(n-3)$ Nieten. Sie sollen unter $n$ Personen $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ durchs Loos so vertheilt werden, dass diese in der genannten Ordnung zum Loosen gelangen. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jede Person vor dem Beginne der Verloosung?

Die Gewinnste können in folgender Ordnung erscheinen:

$a, b, c$
$b, a, c$
$a, c, b$
$c, a, b$
$b, c, a$
$c, b, a$

Für jede Ordnung können folgende Fälle eintreten.

Die Gewinnste fallen zu:

$a$) dem 1t., 2t. u. 3t.; 1t., 2t. u. 4t.; 1t., 2t. u. 5t. ..... 1t., $(n-1)$t. u. $n$t. Theil-
$b$) – 2t., 3t. u. 4t.; 2t., 3t. u. 5t.; 2t., 3t. u. 6t. ..... 2t., $(n-1)$t. u. $n$t. nehmer
$c$) – 3t., 4t. u. 5t.; 3t., 4t. u. 6t.; 3t., 4t. u. 7t. ..... 3t., $(n-1)$t. u. $n$t. –
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

$n$) dem $(n-2)$ten, $(n-1)$ten und $n$ten Theilnehmer.

Dieses Schema fällt mit den Zerstreuungen von drei Elementen in $n$ Fächer zusammen. Es gilt für jede einzelne Gewinnvertheilung. Hiernach ist die Zahl aller möglichen Fälle

$$1\,.\,2\,.\,3\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}=n\,(n-1)\,(n-2).$$

Unter diesen Fällen sind $1\,.\,2\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$, worin jeder Theilnehmer in Beziehung auf jeden einzelnen Gewinn ein für sich günstiges Resultat erwarten darf.

Die Werthe der Erwartung, die für das eben aufgestellte Schema zu bestimmen sind, ergeben sich aus folgenden Darstellungen und zwar der Reihe nach für die Fälle $a, b, c \ldots\ldots n$:

Digitized by Google

11) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{c}{n-3} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{c}{n-4} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

$\frac{a}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot c = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

12) $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2} \cdot \frac{c}{n-3} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

$\frac{n-3}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{c}{n-4} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

$\frac{n-3}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \frac{c}{n-5} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

$\frac{n-3}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot c = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

u. s. w.

13) $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-2} \cdot \frac{n-6}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot c = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{c}{n-2}$

Wird eine andere Ordnung im Erscheinen der Gewinnste $a$, $b$, $c$ gewählt, so ist in 11, 12, und 13 die veränderte Ordnung hinsichtlich der Buchstaben $a$, $b$, $c$ einzuführen. Die übrigen Gebilde bleiben unverändert.

Um nun den Werth der Erwartung für $A_1$ hinsichtlich des Gewinnstes $a$ zu ermitteln, ist zu bemerken, dass er ihn in $1 \cdot 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Fällen erhalten kann, worin jedoch ausser ihm noch zwei andere Theilnehmer sich in die Gewinnste $b$ und $c$ theilen. Diess führt zu der Bestimmung

$$\alpha_1 = \frac{a}{n}.$$

Auf gleiche Weise bestimmt sich der Werth der Erwartung von $A_1$ in Beziehung auf den Gewinn $b$. Er ist

$$\beta_1 = \frac{b}{n}.$$

Eben so in Beziehung auf den Gewinn $c$. Er ist

$$\gamma_1 = \frac{c}{n}.$$

Digitized by Google

Hiernach ist der Werth der Erwartung für $A_1$ in Beziehung auf alle Gewinnste

$$E_1 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Die nämlichen Bemerkungen führen zur Bestimmung des Werthes der Erwartung für $A_2$:

$$E_2 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Hieraus folgt endlich der Werth der Erwartung für $A_k$:

$$14)\ E_k = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Man ist sofort zu dem Schlusse gelangt, dass auch in dem vorliegenden Falle der Werth der Erwartung für alle Theilnehmer, die in der vorgeschriebenen Ordnung zum Loosen gelangen, gleich ist. Hieran knüpft sich nun die weitere Folgerung leicht, dass zugleich die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig ist, da die Darstellungen 11, 12, 13 für jede andere Ordnung des oben aufgestellten Schema's gelten.

Die hier angegebene Entwicklungsweise hat, wie sich deutlich zeigt, einen allgemeinen Charakter. Sie bleibt dieselbe, wenn die Vertheilung von vier und mehr Gewinnsten unter $n$ Personen in Frage kommt.

Sind nun die Gewinnste $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ unter $n$ Personen auf die oben angegebene Weise durchs Loos zu vertheilen, und fragt man nach dem Werthe der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung, so ergiebt sich für jeden ohne Unterschied

$$15)\ E = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_r}{n}.$$

Hier gilt die Bedingungsgleichung, dass

$$r \gtreqless n.$$

Die Gleichung 15) gilt eigentlich unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Theilnehmer in der bestimmten Ordnung $A_1, A_2, \ldots A_n$ zum Loosen gelangen. Es liegt aber deutlich vor Augen, dass sie nach den oben angeführten Bemerkungen noch immer gilt, wenn irgend eine andere Ordnung, worin die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gewählt wird. Diess rechtfertigt folgenden Satz:

16) Wenn $r$ Gewinnste unter $n$ Personen durchs Loos vertheilt werden sollen, so ist der Werth der Erwartung vor dem Beginne der Verlosung für alle Theilnehmer gleich, und die Ordnung, worin die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig.

Die gleichen Gesetze gelten bei Vertheilung der Lasten durch das Loos. Diess beweist, dass das Verfahren, welches gewöhnlich bei Vertheilung der Gewinnste oder Lasten durch das Loos angewendet wird, ganz im Rechte begründet ist. Man ist gewissermassen einem instinctartigen, natürlichen Gefühle gefolgt, und hat recht gehandelt, ohne sich der Gründe dafür bewusst zu sein. Nirgends ist nämlich der vorstehende Satz, so viel mir bekannt ist,

Digitized by Google

mit Hülfe der Mathematik begründet worden, und doch bildet er einen der ersten Elementarsätze in der Lehre von dem Werthe der Erwartung oder der mathematischen Hoffnung, wenn dieser Ausdruck der „moralischen Hoffnung" zur Seite gestellt werden darf. Selbst die Berechnung der durchschnittlichen Werthe von zu hoffenden Vortheilen, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so häufig vorkommen, gründet sich auf den Satz 16, denn es ist nicht möglich den Erwartungswerth für irgend einen Theilnehmer zu bestimmen, wenn nicht eine bestimmte Ordnung gilt, oder nicht, wie hier, vorher nachgewiesen ist, dass die Ordnung in welcher die Verloosung nach der angegebenen Art vor sich geht, gleichgültig ist.

Sind mehrere von den zu vertheilenden Gewinnsten einander gleich, so ändert diess die obigen Bestimmungen nicht. Die Gleichung 16) geht dann in folgende über:

$$17)\quad E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots p_r a_r}{n},$$

wobei $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_r \leqq n$ ist.

Sind $k$ Nieten gezogen, ohne dass ein Gewinn erschienen ist, so ändert sich natürlich der Werth der Erwartung und es ist aus 17)

$$18)\quad E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots p_r a_r}{n-k}.$$

Hier muss

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_r \leqq n - k$$

sein. Die Art, wie die Verloosung auszuführen ist, gehört nicht hierher.

Sind die Bedingungen der Verloosung anders, so werden auch die Resultate geändert. Weitere hieher gehörige Untersuchungen habe ich in den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Baierschen Akademie der Wissenschaften 2. Bd. München, 1837. p. 243 mitgetheilt.

Digitized by Google

# XX.

## Ableitung der Sätze von Rolle, Fourier und Descartes über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung aus der Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen. Als Fortsetzung zu der Abhandlung No. V. in diesem Theile *).

Vom

Herausgeber.

---

§. 1.

Das Theorem von Rolle kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

Die Anzahl der zwischen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist nie grösser als die um eine Einheit vermehrte Anzahl der zwischen denselben Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$.

Um diesen merkwürdigen Satz zu beweisen, wollen wir die beiden gegebenen Gränzen durch $a$, $b$ bezeichnen, und wollen, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass $a<b$ sei. Der den Gränzen $a$, $b$ entsprechende Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sei $E$, und die Anzahl der zwischen den Gränzen $a$, $b$ liegenden von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sei $m$; so ist nach dem in V. §. 30. bewiesenen Satze $m=E$. Ist nun $E'$ der den Gränzen $a$, $b$ entsprechende Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$; so ist nach dem in V. §. 23. bewiesenen Satze

$$E+E'=\varepsilon \text{ oder } E=-E'+\varepsilon,$$

wo entweder $\varepsilon=0$ oder $\varepsilon=\pm 1$ sein kann, und es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$m=-E'+\varepsilon.$$

---

*) Man vergl. die Note auf S. 43.

Digitized by Google

Nach dem aus V. §. 21. bekannten allgemeinen Begriffe des gewissen gegebenen Gränzen entsprechenden Excesses einer gebrochenen rationalen algebraischen Function ist nun, wenn, indem $x$ sich von $a$ bis $b$ stetig ändert, die Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$ $n$ Mal unendlich wird und dabei von dem Negativen zum Positiven übergeht, und $n'$ Mal unendlich wird und dabei von dem Positiven zum Negativen übergeht, $E' = n - n'$ oder $-E' = n' - n$, und folglich nach dem Obigen

$$m = n' - n + \varepsilon.$$

Wird nun die Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ überhaupt $m'$ Mal unendlich und ändert ihr Zeichen, so ist $m' = n' + n$, und folglich offenbar immer $m' \gtreqless n' - n$, also $m' + \varepsilon \gtreqless n' - n + \varepsilon$, d. i. nach dem Obigen $m' + \varepsilon \gtreqless m$ oder $m \lesseqgtr m' + \varepsilon$.

Bezeichnet jetzt $m''$ die Anzahl der zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegenden reellen von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, welche nicht zugleich auch Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind; so ist offenbar immer $m' \lesseqgtr m''$, also $m' + \varepsilon \lesseqgtr m'' + \varepsilon$, und folglich nach dem Vorhergehenden immer

$$m \lesseqgtr m'' + \varepsilon.$$

Liegen aber zwischen den Gränzen $a$ und $b$ noch $m'''$ reelle von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, welche zugleich auch Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, so ist $m'' + m''' = m_1$ die Anzahl aller zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegenden reellen von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und folglich $m'' = m_1 - m'''$, also nach dem Obigen immer

$$m \lesseqgtr m_1 - m''' + \varepsilon.$$

Bevor wir jetzt in dieser Betrachtung weiter fortschreiten, wollen wir zuvörderst völliger Deutlichkeit wegen den folgenden Satz von den Gleichungen in der Kürze beweisen:

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als $k$ Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind; so hat die Gleichung $f'(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als $k - 1$ Wurzeln, die sämmtlich $= a$ sind, wobei sich von selbst versteht, dass $k$ nicht $= 0$ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als $k$ Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind, so kann

$$f(x) = (x - a)^k \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine für $x = a$ nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function von $x$ bezeichnet, gesetzt werden. Nimmt man nun nach V. §. 7. und §. 10. auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung die derivirten Functionen; so erhält man

Digitized by Google

$$f'(x) = (x-a)^k\ \varphi'(x) + k(x-a)^{k-1}\ \varphi(x)$$

oder

$$f'(x) = (x-a)^{k-1}\ \{(x-a)\ \varphi'(x) + k\ \varphi(x)\},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Gleichung $f'(x) = 0$ jederzeit $k-1$ Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind. Dass aber diese Gleichung auch nicht mehr als $k-1$ Wurzeln haben kann, die sämmtlich $= a$ sind, erhellet eben so leicht. Sollte dieselbe nämlich $k$ Wurzeln haben, deren jede $= a$ ist; so müsste $x-a$ offenbar in der ganzen rationalen algebraischen Function

$$(x-a)\ \varphi'(x) + k\ \varphi(x)$$

aufgehen, und diese Function also für $x = a$ verschwinden, welches nicht möglich ist, da dieselbe für diesen Werth der Grösse $x$ den Werth $k\varphi(a)$ erhält, und nach dem Obigen weder $k = 0$, noch $\varphi(a) = 0$ ist, wodurch nun unser obiger eingeschalteter Satz, der sich offenbar auch umkehren lässt, bewiesen ist.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_\lambda,$$

von welchen Grössen eine jede grösser als die Einheit sein soll, reelle Wurzeln habe, die sämmtlich respective den Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_\lambda$$

gleich sind; so hat nach dem so eben bewiesenen Satze die Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$

$$k_1 - 1,\ k_2 - 1,\ k_3 - 1,\ k_4 - 1,\ \ldots\ k_\lambda - 1$$

reelle Wurzeln, die sämmtlich respective den Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_\lambda$$

gleich sind, und andere einander gleiche Wurzeln kann diese Gleichung nach dem in Rede stehenden Satze offenbar nicht haben. Da nun nach dem Obigen $m$ die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ ist; so ist, wenn $\mu$ die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ bezeichnet, offenbar

$$\mu = m + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_\lambda - 1)$$

oder

$$m = \mu - (k_1 - 1) - (k_2 - 1) - (k_3 - 1) - \ldots - (k_\lambda - 1).$$

Weil ferner nach dem Obigen $m_1$ die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ ist; so ist, wenn $\mu_1$ die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ bezeichnet, wie eben so leicht erhellen wird,

$$\mu_1 = m_1 + (k_1 - 2) + (k_2 - 2) + (k_3 - 2) + \ldots + (k_\lambda - 2)$$

oder

$$m_1 = \mu_1 - (k_1 - 2) - (k_2 - 2) - (k_3 - 2) - \ldots - (k_\lambda - 2).$$

Weil nun nach dem Obigen

Digitized by Google

$$m \leqq m_1 - m''' + \varepsilon$$

ist, so ist

$$\mu - (k_1 - 1) - (k_2 - 1) - (k_3 - 1) - \ldots - (k_\lambda - 1)$$
$$\leqq \mu_1 - (k_1 - 2) - (k_2 - 2) - (k_3 - 2) - \ldots - (k_\lambda - 2) - m''' + \varepsilon,$$

und folglich, wie sich hieraus sogleich ergiebt,

$$\mu \leqq \mu_1 + \lambda - m''' + \varepsilon.$$

Nach dem Obigen ist $m'''$ die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$, welche zugleich Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind. Ueberlegt man nun, dass nach dem vorher bewiesenen Satze jede Wurzel, welche die Gleichung $f(x) = 0$ nur ein Mal enthält, nicht auch eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ sein kann; so wird auf der Stelle erhellen, dass immer $m''' = \lambda$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\mu \leqq \mu_1 + \varepsilon$$

sein muss. Weil ferner nach dem Obigen immer

$$m \leqq m_1 - m''' + \varepsilon$$

ist, so ist um so mehr immer

$$m \leqq m_1 + \varepsilon.$$

Weil nun, wie wir oben gesehen haben, $+1$ der grösste Werth ist, welchen $\varepsilon$ haben kann, so ist immer

$$\mu \leqq \mu_1 + 1 \text{ und } m \leqq m_1 + 1,$$

woraus man sieht, dass das Theorem von Rolle nicht bloss von allen zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$, sondern auch von allen zwischen diesen Gränzen liegenden sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der beiden in Rede stehenden Gleichungen gilt.

Wenn

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_\varrho$$

die sämmtlichen von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und diese Wurzeln nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet sind; so liegt zwischen $-\infty$ und $a_1$ keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also nach dem vorhergehenden Satze höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Zwischen $a_1$ und $a_2$ liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also nach dem vorigen Satze höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Zwischen $a_\varrho$ und $+\infty$ liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Hieraus sieht man folglich, dass es höchstens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, welche kleiner als $a_1$, höchstens eine reelle Wurzel



Digitized by Google

dieser Gleichung geben kann, welche grösser als $a_\varrho$ ist. Ferner kann nur eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen $a_1$ und $a_2$, nur eine reelle Wurzel dieser Gleichung zwischen $a_2$ und $a_3$, u. s. w., nur eine reelle Wurzel derselben Gleichung zwischen $a_{\varrho-1}$ und $a_\varrho$ liegen.

## §. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $x$ sei, und wollen durch successive Entwickelung der derivirten Functionen nach den aus V. A. bekannten Regeln die Reihe

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

bilden. Setzen wir in dieser Reihe für $x$ die Grössen $a$ und $b$, wo wieder $a < b$ sein soll; so erhalten wir die beiden Reihen

$$(1)\ \ldots\ldots\ f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots.\ f^{(n)}(a);$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ f'''(b),\ \ldots.\ f^{(n)}(b);$$

in denen, wie wir jetzt annehmen wollen, kein Glied verschwinden soll. Ferner wollen wir annehmen, dass zwischen den Gränzen $a$ und $b$

$$\mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots\ \mu_n$$

reelle Wurzeln der Gleichungen

$$f(x) = 0,\ f'(x) = 0,\ f''(x) = 0,\ f'''(x) = 0,\ \ldots f^{(n)}(x) = 0$$

liegen, und wollen überhaupt in Bezug auf die Functionen

$$f(x) \text{ und } f'(x),$$
$$f'(x) \text{ und } f''(x),$$
$$f''(x) \text{ und } f'''(x),$$
u. s. w.
$$f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x)$$

durch

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_{n-1}$$

Dasselbe bezeichnen, was im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ durch $\varepsilon$ bezeichnet worden ist; so ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben,

$$\mu \leqq \mu_1 + \varepsilon,$$

$$\mu_1 \leqq \mu_2 + \varepsilon_1,$$

$$\mu_2 \leqq \mu_3 + \varepsilon_2,$$

u. s. w.

$$\mu_{n-1} = \mu_n + \varepsilon_{n-1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$\mu \leqq \mu_n + \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

Digitized by Google

Da aber nach der Voraussetzung $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades, also nach V. §. 12. bekanntlich $f^{(n)}(x)$ ein constante nicht verschwindende Grösse ist; so sind die Grössen $f^{(n)}(a)$ und $f^{(n)}(b)$ einander gleich und verschwinden nicht, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass zwischen den Gränzen $a$ und $b$ keine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(n)}(x)=0$ liegen kann, folglich $\mu_n=0$, und daher nach dem Obigen jederzeit

$$\mu \leqq \varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots.+\varepsilon_{n-1}$$

ist.

Nach V. §. 24. ist

$$\varepsilon=0, \text{ oder } \varepsilon=+1, \text{ oder } \varepsilon=-1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ und $f(b)$, $f'(b)$ zugleich eine Folge oder zugleich einen Wechsel bilden; wenn die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $f(b)$, $f'(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $f(b)$, $f'(b)$ einen Wechsel bilden; und etwas ganz Aehnliches gilt von den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-1}$.

Seien nun $w$ und $f$ die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (1), $w'$ und $f'$ die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (2). Die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $k$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $k'$; die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $k''$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $k'''$; so ist nach Vorhergehenden offenbar

$$\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}=k-k'.$$

Ferner ist aber, wie sogleich erhellet,

$$w=k+k'', \quad f=k'+k'''$$

und

$$w'=k'+k'', \quad f'=k+k''';$$

also

$$w-w'=k-k', \quad f'-f=k-k',$$

und folglich nach dem Obigen

$$\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}=w-w'=f'-f.$$

Weil nun immer

$$\mu \leqq \varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}$$

war, so ist immer

$$\mu \leqq w-w' \text{ oder } \mu \leqq f'-f.$$

## §. 3.

Im Vorhergehenden haben wir angenommen, dass kein Glied der beiden Reihen

$$f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots. f^{(n)}(a);$$
$$f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \ldots. f^{(n)}(b)$$



Digitized by Google

verschwindet. Indem wir nun zu dem Falle übergehen wollen, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, müssen wir zuvörderst die folgenden Betrachtungen vorausschicken.

Wir wollen überhaupt die Reihe

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha),\ f'''(\alpha),\ \ldots\ f^{(n)}(\alpha),$$

welche die Functionenreihe genannt werden soll, betrachten. Die Reihe der Vorzeichen der einzelnen Glieder derselben mag die Zeichenreihe genannt und der Kürze wegen durch $(\alpha)$ bezeichnet werden, wobei wir zugleich bemerken, dass in derselben, wenn ein Glied der Functionenreihe verschwindet, an die entsprechende Stelle jederzeit 0 geschrieben werden soll. Durch $i$ soll im Folgenden immer eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet werden, und wir wollen nun zeigen, wie aus der Zeichenreihe $(\alpha)$ immer die derselben auf beiden Seiten nächst benachbarten Zeichenreihen $(\alpha - i)$ und $(\alpha + i)$ abgeleitet oder gebildet werden können.

Zu dem Ende wollen wir zuvörderst annehmen, dass ein beliebiges Glied $f^{(k)}(\alpha)$ der Functionenreihe nicht verschwindet, also auch das diesem Gliede entsprechende Glied der Zeichenreihe $(\alpha)$ nicht 0, sondern $\pm$ ist. Nach V. §. 12. ist

$$f^{(k)}(\alpha \pm i) = f^{(k)}(\alpha) \pm \frac{i}{1}\, f^{(k+1)}(\alpha) + \ldots + \frac{(\pm i)^{n-k}}{1\ldots(n-k)} f^{(n-k)}(\alpha),$$

und nach V. §. 18. lässt sich $i$ immer so klein annehmen, dass das Vorzeichen von $f^{(k)}(\alpha \pm i)$ mit dem Vorzeichen des ersten nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Gliedes $f^{(k)}(\alpha)$ der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung einerlei ist, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass, wenn $\pm$ das dem Gliede $f^{(k)}(\alpha)$ der Functionenreihe entsprechende Glied der Zeichenreihe $(\alpha)$ ist, dann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer auch $\pm$ sowohl das entsprechende Glied der Zeichenreihe $(\alpha - i)$, als auch das entsprechende Glied der Zeichenreihe $(\alpha + i)$ ist. Also hat man bei der Bildung oder Ableitung der Zeichenreihen $(\alpha - i)$ und $(\alpha + i)$ aus der Zeichenreihe $(\alpha)$ für jedes nicht verschwindende Glied der letztern das sich in demselben findende Zeichen unverändert beizubehalten und in die beiden erstern gesuchten Zeichenreihen einzuführen.

Ferner wollen wir jetzt annehmen, dass die den Gliedern

$$f^{(k)}(\alpha),\ f^{(k+1)}(\alpha),\ f^{(k+2)}(\alpha),\ \ldots\ f^{(k+p-1)}(\alpha),\ f^{(k+p)}(\alpha)$$

der Functionenreihe entsprechenden Glieder der Zeichenreihe $(\alpha)$

$$0\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \pm$$

sind; so lässt sich nach V. §. 12. und V. §. 18. die Grösse $i$ immer so klein annehmen, dass die Grössen

$$f^{(k)}(\alpha \pm i),\ f^{(k+1)}(\alpha \pm i),\ f^{(k+2)}(\alpha \pm i),\ \ldots\ f^{(k+p-1)}(\alpha \pm i)$$

respective mit den Grössen

$$\frac{(\pm i)^p}{1\ldots p} f^{(k+p)}(\alpha),\ \frac{(\pm i)^{p-1}}{1\ldots(p-1)} f^{(k+p)}(\alpha),\ \frac{(\pm i)^{p-2}}{1\ldots(p-2)} f^{(k+p)}(\alpha),\ \ldots\ \frac{\pm i}{1} f^{(k+p)}(\alpha)$$

einerlei Vorzeichen haben.

Hieraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt sich nun aber unmittelbar Folgendes.

Digitized by Google

Die den Gliedern

$$0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\pm$$

der Zeichenreihe $(\alpha)$ entsprechenden Glieder der Zeichenreihe $(\alpha-i)$ sind jederzeit

$$\pm(-)^p,\ \pm(-)^{p-1},\ \pm(-)^{p-2},\ \ldots\ \pm(-),\ \pm$$

oder

$$\pm(-)^p,\ \mp(-)^p,\ \pm(-)^p,\ \ldots\ \mp,\ \pm;$$

so dass nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe $(\alpha-i)$ die Glieder vom ersten bis zum letzten Gliede, welches mit dem entsprechenden Gliede der Zeichenreihe $(\alpha)$ einerlei ist, fortwährend abwechseln.

Die den Gliedern

$$0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\pm$$

der Zeichenreihe $(\alpha)$ entsprechenden Glieder der Zeichenreihe $(\alpha+i)$ sind jederzeit

$$\pm\ \pm\ \pm\ \ldots\ \pm\ \pm,$$

so dass nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe $(\alpha+i)$ alle Glieder vom ersten bis zum letzten Gliede, welches mit dem entsprechenden Gliede der Zeichenreihe $(\alpha)$ einerlei ist, einander gleich sind.

Aus dem Vorhergehenden, wobei es nicht überflüssig ist, noch zu bemerken, dass, weil nach der Voraussetzung $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $x$ ist, $f^{(n)}(\alpha)$ niemals verschwinden kann, ergiebt sich nun unmittelbar die folgende Regel zur Ableitung der beiden Zeichenreihen $(\alpha-i)$ und $(\alpha+i)$ aus der Zeichenreihe $(\alpha)$, bei deren Anwendung wir die Zeichenreihe $(\alpha-i)$ über, die Zeichenreihe $(\alpha+i)$ unter die Zeichenreihe $(\alpha)$ schreiben wollen:

Ueber und unter jedes Glied der Zeichenreihe $(\alpha)$, welches nicht 0 ist, schreibe man dasselbe Zeichen, wobei man jederzeit bei dem letzten niemals verschwindenden Gliede anfängt. Dagegen schreibe man über jedes Glied der Reihe $(\alpha)$, welches 0 ist, das entgegengesetzte Zeichen von dem, welches in der Reihe $(\alpha-i)$ nach der rechten Seite hin unmittelbar folgt; unter jedes Glied der Reihe $(\alpha)$, welches 0 ist, schreibe man aber ein dem in der Reihe $(\alpha+i)$ nach der rechten Seite hin unmittelbar folgenden gleiches Zeichen.

Das folgende Beispiel wird zur bessern Erläuterung dieser Regel dienen, wobei wir noch bemerken, dass man der Kürze wegen die Zeichenreihen $(\alpha-i)$ und $(\alpha+i)$ ganz zweckmässig gewöhnlich bloss respective durch $(<\alpha)$ und $(>\alpha)$ zu bezeichnen pflegt:

$$(<\alpha)\ldots+--+-+-+-+-+++-+-+-+-+-+$$
$$(\alpha)\ldots+-0\ 0\ 0\ 0\ 0+0+-+0\ 0\ 0-0\ 0\ 0\ 0+-+$$
$$(>\alpha)\ldots+-+++++++++++---+++++-+$$

Aus einer nähern Betrachtung dieser Regel geht hervor, dass die Zeichenreihen $(\alpha)$ und $(\alpha+i)$ immer eine völlig gleiche Anzahl von Wechseln enthalten, wenn man nämlich bei dem Zählen der

Digitized by Google

Wechsel der Reihe $(a)$ die verschwindenden Glieder ganz ausser Acht lässt und als gar nicht vorhanden betrachtet.

Nehmen wir nun an, dass die Reihen

$$(1) \ldots f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n)}(a);$$
$$(2) \ldots f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \ldots f^{(n)}(b)$$

beliebig viele verschwindende Glieder enthalten, und bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass man bei dem Zählen der in diesen Reihen vorkommenden Wechsel die verschwindenden Glieder ganz ausser Acht lässt und als gar nicht vorhanden betrachtet, die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1) durch $w$, die Anzahl der Wechsel in der Reihe (2) durch $w'$; so ist nach dem Vorhergehenden $w$ auch die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(a+i)$, und $w'$ die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(b+i)$. Bezeichnet jetzt $\mu$ die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$; so ist, unter der Voraussetzung, dass $b$ nicht selbst eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, also $f(b)$ nicht verschwindet, offenbar $\mu$ auch die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen $a+i$ und $b+i$, wo $i$ immer die ihm oben beigelegte Bedeutung hat, liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, und folglich nach dem vorigen Paragraphen jederzeit

$$\mu \leqq w - w'.$$

Hiernach lässt sich jetzt das Theorem von Fourier auf folgende Art aussprechen:

Wenn $a<b$ und $b$ keine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, also $f(b)$ nicht verschwindet, und $\mu$ die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ bezeichnet; so ist, wenn man die Anzahl der in der Reihe

$$f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n)}(a)$$

vorkommenden Zeichenwechsel durch $w$, die Anzahl der in der Reihe

$$f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \ldots f^{(n)}(b)$$

vorkommenden Zeichenwechsel durch $w'$ bezeichnet, wo bei der Zählung der Wechsel in den beiden vorstehenden Reihen alle in denselben vorkommende verschwindende Glieder ganz ausser Acht gelassen und als gar nicht vorhanden betrachtet werden, jederzeit

$$\mu \leqq w - w'.$$

## §. 4.

Um nun auch noch das berühmte Theorem von Descartes aus dem Vorhergehenden abzuleiten, wollen wir überhaupt die Gleichung des $n$ten Grades

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n = 0$$

betrachten, wollen aber jetzt annehmen, dass keiner der Coefficienten

Digitized by Google

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots .\ A_n$$

verschwinde und der Coefficient $A_n$ des höchsten Gliedes der Function $f(x)$ positiv sei, welches Letztere offenbar immer verstattet ist. Entwickelt man jetzt die derivirten Functionen von $f(x)$, und setzt sowohl in denselben, als auch in der Function $f(x)$ selbst $x=0$; so findet man, dass die Grössen

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0),\ \ldots .\ f^{(n)}(0)$$

respective mit den Coefficienten

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots .\ A_n$$

gleiche Vorzeichen haben.

Lassen wir nun den Ausdruck

$$(0)=A\ A_1\ A_2\ A_3\ \ldots .\ A_n$$

im Folgenden bloss bedeuten, dass die Glieder der Zeichenreihe (0) mit den Vorzeichen der Coefficienten $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$ einerlei sind; so haben wir, wie unmittelbar aus dem in V. §. 19. bewiesenen Satze und den leicht zu entwickelnden derivirten Functionen von $f(x)$ folgt, die folgenden Zeichenreihen:

$$(-\infty)=\pm\mp\pm\mp\ldots-+$$
$$(0)=A\ A_1\ A_2\ A_3\ldots A_{n-1}\ A_n$$
$$(+\infty)=+++++\ldots++$$

Die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(-\infty)$ ist offenbar $n$, und die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(+\infty)$ ist 0. Die Anzahl der Wechsel in der Reihe 0 sei $w$, und die Anzahl der in dieser Reihe vorkommenden Folgen sei $f$. Die Anzahl der negativen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sei $m$, die Anzahl der positiven reellen Wurzeln dieser Gleichung sei $p$. Weil die sämmtlichen negativen reellen Wurzeln zwischen $-\infty$ und 0 liegen, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$m \leqq n-w.$$

Nun ist aber offenbar $w+f=n$, und folglich $n-w=f$, also nach dem Vorhergehenden

$$m \leqq f.$$

Da ferner die sämmtlichen positiven reellen Wurzeln zwischen 0 und $+\infty$ liegen, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$p \leqq w-0,\ \text{d. i. } p \leqq w,$$

und es ist also jederzeit

$$p \leqq w,\ m \leqq f.$$

Hat die Gleichung $f(x)=0$ lauter reelle Wurzeln, so ist

$$p+m=n,\ w+f=n,$$

und folglich

$$p+m=w+f.$$

Digitized by Google

Wäre nun $p < w$, so wäre wegen dieser Gleichung $m > f$, welches gegen das Obige, da nämlich immer $m \gtreqless f$ ist, streitet. Also kann nicht $p < w$ sein, und es muss folglich, da immer $p \gtreqless w$ ist, $p = w$ sein, woraus dann wegen der Gleichung $p + m = w + f$ unmittelbar $m = f$ folgt. Wenn also die Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so ist immer

$$p = w, \; m = f.$$

In den vorhergehenden Ausdrücken ist das hinreichend schon aus den Elementen der Algebra bekannte Theorem von Descartes oder Harriot in dem Falle, wenn kein Coefficient der Gleichung verschwindet, offenbar enthalten. Der Ausdruck, auf welchen Gauss dieses Theorem in dem allgemeinern Falle, wenn beliebig viele Coefficienten der Gleichung verschwinden, gebracht hat, und der schöne von Gauss gegebene Beweis können hier als völlig bekannt vorausgesetzt werden. Unsere Absicht war hier vorzugsweise, die Fruchtbarkeit der Lehre von dem Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen zu zeigen.

# XXI.

## Ueber eine geometrische Aufgabe.

Vom

Herausgeber.

In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie, wenigstens in den mir bekannten, fehlt bis jetzt noch die folgende Aufgabe, für welche ich daher, weil sie mir in mehrfacher Beziehung von Interesse und mancher Anwendungen fähig zu sein scheint, in diesem Aufsatze eine Auflösung zu geben versuchen werde.

### Aufgabe.

Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet.

### Auflösung.

Die Gleichungen der vier gegebenen geraden Linien im Raume seien

Digitized by Google

$$1.\quad \begin{cases} x = a_1 z + b_1, & y = \alpha_1 z + \beta_1; \\ x = a_2 z + b_2, & y = \alpha_2 z + \beta_2; \\ x = a_3 z + b_3, & y = \alpha_3 z + \beta_3; \\ x = a_4 z + b_4, & y = \alpha_4 z + \beta_4; \end{cases}$$

und

$$2.\quad x = Az + B,\ y = \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}$$

seien die Gleichungen der gesuchten geraden Linie, von welcher die vier gegebenen geraden Linien geschnitten werden sollen, wo also die Grössen $A$, $B$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zu bestimmen sind.

Zu dem Ende bezeichne man die Coordinaten der Punkte, in denen die vier gegebenen geraden Linien von der gesuchten geraden Linie geschnitten werden, respective durch $x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$; $x_3$, $y_3$, $z_3$; $x_4$, $y_4$, $z_4$; so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung dieser zwölf Grössen und der vier Grössen $A$, $B$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die sechzehn folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} x_1 = a_1 z_1 + b_1, & y_1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1; \\ x_2 = a_2 z_2 + b_2, & y_2 = \alpha_2 z_2 + \beta_2; \\ x_3 = a_3 z_3 + b_3, & y_3 = \alpha_3 z_3 + \beta_3; \\ x_4 = a_4 z_4 + b_4, & y_4 = \alpha_4 z_4 + \beta_4; \\ x_1 = Az_1 + B, & y_1 = \mathfrak{A}z_1 + \mathfrak{B}; \\ x_2 = Az_2 + B, & y_2 = \mathfrak{A}z_2 + \mathfrak{B}; \\ x_3 = Az_3 + B, & y_3 = \mathfrak{A}z_3 + \mathfrak{B}; \\ x_4 = Az_4 + B, & y_4 = \mathfrak{A}z_4 + \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Durch Elimination von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ und $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ erhält man aus diesen Gleichungen ohne alle Schwierigkeit die acht folgenden Gleichungen:

$$4.\quad \begin{cases} 0 = (a_1 - A)z_1 + b_1 - B, & 0 = (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1 + \beta_1 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_2 - A)z_2 + b_2 - B, & 0 = (\alpha_2 - \mathfrak{A})z_2 + \beta_2 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_3 - A)z_3 + b_3 - B, & 0 = (\alpha_3 - \mathfrak{A})z_3 + \beta_3 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_4 - A)z_4 + b_4 - B, & 0 = (\alpha_4 - \mathfrak{A})z_4 + \beta_4 - \mathfrak{B}; \end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ die vier folgenden Gleichungen ergeben:

$$5.\quad \begin{cases} (a_1 - A)\ (\beta_1 - \mathfrak{B}) = (\alpha_1 - \mathfrak{A})\ (b_1 - B), \\ (a_2 - A)\ (\beta_2 - \mathfrak{B}) = (\alpha_2 - \mathfrak{A})\ (b_2 - B), \\ (a_3 - A)\ (\beta_3 - \mathfrak{B}) = (\alpha_3 - \mathfrak{A})\ (b_3 - B), \\ (a_4 - A)\ (\beta_4 - \mathfrak{B}) = (\alpha_4 - \mathfrak{A})\ (b_4 - B); \end{cases}$$

aus denen nun die vier unbekannten Grössen $A$, $B$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmt werden müssten. Wir wollen jedoch die weitere Verfolgung dieses Wegs, obgleich derselbe zu nicht uneleganten Resultaten führt, dem Leser überlassen, und wollen hier ein anderes Verfahren in Anwendung bringen, durch welches wir zu einer einfachern Auflösung gelangen werden.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen 4. ergeben sich nämlich durch Elimination der Grössen $B$ und $\mathfrak{B}$ leicht die folgenden Gleichungen:

$$6.\quad \begin{cases} b_1+(a_1-A)z_1 = b_2+(a_2-A)z_2 = b_3+(a_3-A)z_3 \\ \qquad\qquad = b_4+(a_4-A)z_4, \\ \beta_1+(\alpha_1-\mathfrak{A})z_1 = \beta_2+(\alpha_2-\mathfrak{A})z_2 = \beta_3+(\alpha_3-\mathfrak{A})z_3 \\ \qquad\qquad = \beta_4+(\alpha_4-\mathfrak{A})z_4; \end{cases}$$

aus denen man durch Elimination von $z_2$, $z_3$, $z_4$ ferner ohne Schwierigkeit

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{b_1-b_2+(a_1-A)z_1}{\beta_1-\beta_2+(\alpha_1-\mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_2-A}{\alpha_2-\mathfrak{A}}, \\ \dfrac{b_1-b_3+(a_1-A)z_1}{\beta_1-\beta_3+(\alpha_1-\mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_3-A}{\alpha_3-\mathfrak{A}}, \\ \dfrac{b_1-b_4+(a_1-A)z_1}{\beta_1-\beta_4+(\alpha_1-\mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_4-A}{\alpha_4-\mathfrak{A}}; \end{cases}$$

und hieraus

$$8.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{(b_1-b_2)\ (\alpha_2-\mathfrak{A})-(\beta_1-\beta_2)\ (a_2-A)}{(\alpha_1-\mathfrak{A})\ (a_2-A)-(\alpha_2-\mathfrak{A})\ (a_1-A)}, \\ z_1 = \dfrac{(b_1-b_3)\ (\alpha_3-\mathfrak{A})-(\beta_1-\beta_3)\ (a_3-A)}{(\alpha_1-\mathfrak{A})\ (a_3-A)-(\alpha_3-\mathfrak{A})\ (a_1-A)}, \\ z_1 = \dfrac{(b_1-b_4)\ (\alpha_4-\mathfrak{A})-(\beta_1-\beta_4)\ (a_4-A)}{(\alpha_1-\mathfrak{A})\ (a_4-A)-(\alpha_4-\mathfrak{A})\ (a_1-A)}; \end{cases}$$

oder

$$9.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha_2(b_1-b_2)-a_2(\beta_1-\beta_2)-(b_1-b_2)\mathfrak{A}+(\beta_1-\beta_2)A}{\alpha_1a_2-a_1\alpha_2+(a_1-a_2)\mathfrak{A}-(\alpha_1-\alpha_2)A}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha_3(b_1-b_3)-a_3(\beta_1-\beta_3)-(b_1-b_3)\mathfrak{A}+(\beta_1-\beta_3)A}{\alpha_1a_3-a_1\alpha_3+(a_1-a_3)\mathfrak{A}-(\alpha_1-\alpha_3)A}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha_4(b_1-b_4)-a_4(\beta_1-\beta_4)-(b_1-b_4)\mathfrak{A}+(\beta_1-\beta_4)A}{\alpha_1a_4-a_1\alpha_4+(a_1-a_4)\mathfrak{A}-(\alpha_1-\alpha_4)A}; \end{cases}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$10.\quad \begin{cases} k_1=\alpha_2(b_1-b_2)-a_2(\beta_1-\beta_2),\ \lambda_1=-(b_1-b_2),\ \mu_1=\beta_1-\beta_2; \\ k_2=\alpha_3(b_1-b_3)-a_3(\beta_1-\beta_3),\ \lambda_2=-(b_1-b_3),\ \mu_2=\beta_1-\beta_3; \\ k_3=\alpha_4(b_1-b_4)-a_4(\beta_1-\beta_4),\ \lambda_3=-(b_1-b_4),\ \mu_3=\beta_1-\beta_4; \end{cases}$$

und

$$11.\quad \begin{cases} \gamma_1=\alpha_1a_2-a_1\alpha_2,\ \delta_1=a_1-a_2,\ \varepsilon_1=-(\alpha_1-\alpha_2); \\ \gamma_2=\alpha_1a_3-a_1\alpha_3,\ \delta_2=a_1-a_3,\ \varepsilon_2=-(\alpha_1-\alpha_3); \\ \gamma_3=\alpha_1a_4-a_1\alpha_4,\ \delta_3=a_1-a_4,\ \varepsilon_3=-(\alpha_1-\alpha_4); \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$12.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{k_1+\lambda_1\mathfrak{A}+\mu_1A}{\gamma_1+\delta_1\mathfrak{A}+\varepsilon_1A}, \\ z_1 = \dfrac{k_2+\lambda_2\mathfrak{A}+\mu_2A}{\gamma_2+\delta_2\mathfrak{A}+\varepsilon_2A}, \\ z_1 = \dfrac{k_3+\lambda_3\mathfrak{A}+\mu_3A}{\gamma_3+\delta_3\mathfrak{A}+\varepsilon_3A}, \end{cases}$$

erhält.

Digitized by Google

Diese drei Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$13.\quad \begin{cases} 0 = k_1 - \gamma_1 z_1 + (\lambda_1 - \delta_1 z_1)\mathfrak{A} + (\mu_1 - \varepsilon_1 z_1)A, \\ 0 = k_2 - \gamma_2 z_1 + (\lambda_2 - \delta_2 z_1)\mathfrak{A} + (\mu_2 - \varepsilon_2 z_1)A, \\ 0 = k_3 - \gamma_3 z_1 + (\lambda_3 - \delta_3 z_1)\mathfrak{A} + (\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)A; \end{cases}$$

und wird nun, wenn man aus denselben die Grössen $A$ und $\mathfrak{A}$ eliminirt, die bloss die eine unbekannte Grösse $z_1$ enthaltende Endgleichung erhalten.

Um diese Elimination mit möglichster Leichtigkeit auszuführen, wollen wir die drei vorhergehenden Gleichungen nach der Reihe mit den drei unbestimmten Faktoren $F_1$, $F_2$, $F_3$ multipliciren, und dieselben dann zu einander addiren, wodurch wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & (k_1 - \gamma_1 z_1)F_1 + (k_2 - \gamma_2 z_1)F_2 + (k_3 - \gamma_3 z_1)F_3 \\ & + \{(\lambda_1 - \delta_1 z_1)F_1 + (\lambda_2 - \delta_2 z_1)F_2 + (\lambda_3 - \delta_3 z_1)F_3\}\mathfrak{A} \\ & + \{(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1)F_1 + (\mu_2 - \varepsilon_2 z_1)F_2 + (\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)F_3\}A \end{aligned}$$

erhalten, und wollen nun die unbestimmten Faktoren $F_1$, $F_2$, $F_3$ so bestimmen, dass sie den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \delta_1 z_1)F_1 + (\lambda_2 - \delta_2 z_1)F_2 + (\lambda_3 - \delta_3 z_1)F_3 &= 0, \\ (\mu_1 - \varepsilon_1 z_1)F_1 + (\mu_2 - \varepsilon_2 z_1)F_2 + (\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)F_3 &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Eliminirt man zuerst $F_3$, dann $F_2$; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} & \{(\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1) - (\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1)\}F_1 \\ = {} & \{(\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1) - (\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1)\}F_2, \\ & \{(\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1) - (\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)\}F_1 \\ = {} & \{(\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1) - (\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)\}F_3; \end{aligned}$$

und kann also offenbar

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1) - (\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1), \\ F_2 &= (\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1) - (\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1), \\ F_3 &= (\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1) - (\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1) \end{aligned}$$

setzen, wodurch man nun in Verbindung mit dem Obigen unmittelbar zu der folgenden, bloss die eine unbekannte Grösse $z_1$ enthaltenden Gleichung gelangt;

$$\begin{aligned} 14.\quad 0 = {} & (k_1 - \gamma_1 z_1)\{(\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1) - (\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1)\} \\ & + (k_2 - \gamma_2 z_1)\{(\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_3 - \varepsilon_3 z_1) - (\lambda_3 - \delta_3 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1)\} \\ & + (k_3 - \gamma_3 z_1)\{(\lambda_2 - \delta_2 z_1)(\mu_1 - \varepsilon_1 z_1) - (\lambda_1 - \delta_1 z_1)(\mu_2 - \varepsilon_2 z_1)\}, \end{aligned}$$

mit deren weiterer Entwickelung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Zuerst erhält man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 0 = {} & (k_1 - \gamma_1 z_1)\left\{\begin{matrix} \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 \\ -[(\lambda_2\varepsilon_3 - \lambda_3\varepsilon_2) + (\delta_2\mu_3 - \delta_3\mu_2)]z_1 + (\delta_2\varepsilon_3 - \delta_3\varepsilon_2)z_1^2 \end{matrix}\right\} \\ & + (k_2 - \gamma_2 z_1)\left\{\begin{matrix} \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 \\ -[(\lambda_1\varepsilon_3 - \lambda_3\varepsilon_1) + (\delta_1\mu_3 - \delta_3\mu_1)]z_1 + (\delta_1\varepsilon_3 - \delta_3\varepsilon_1)z_1^2 \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+(k_3-\gamma_3 z_1)\left\{\begin{matrix}\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2\\ -[(\lambda_2\varepsilon_1-\lambda_1\varepsilon_2)+(\delta_2\mu_1-\delta_1\mu_2)]z_1+(\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_2)z_1^2\end{matrix}\right\},$$

welches offenbar eine Gleichung des dritten Grades ist, in der $z_1^3$ den Coefficienten

$$-\gamma_1(\delta_3\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_3)-\gamma_2(\delta_1\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_1)-\gamma_3(\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_2)$$

oder

$$\gamma_1(\delta_2\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_2)+\gamma_2(\delta_3\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_3)+\gamma_3(\delta_1\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_1)$$

hat. Diesen Coefficienten wollen wir nun etwas näher betrachten, nachdem wir ihn zuvörderst auf die Form

$$\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)$$

gebracht haben. Nach 11. ist

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)\\ =&-(\alpha_1-\alpha_2)\{(\alpha_1\alpha_3-\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-(\alpha_1\alpha_4-\alpha_1\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)\}\\ &-(\alpha_1-\alpha_3)\{(\alpha_1\alpha_4-\alpha_1\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)\}\\ &-(\alpha_1-\alpha_4)\{(\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_1\alpha_3-\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)\}\\ =&-\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\{\alpha_1(\alpha_4-\alpha_3)+\alpha_3(\alpha_1-\alpha_4)+\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)\}\\ &-\alpha_1(\alpha_1-\alpha_3)\{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)+\alpha_2(\alpha_4-\alpha_1)+\alpha_4(\alpha_1-\alpha_2)\}\\ &-\alpha_1(\alpha_1-\alpha_4)\{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)+\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)+\alpha_3(\alpha_2-\alpha_1)\}\\ =&-\alpha_1\alpha_1\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)+(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)+(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_2)\},\end{aligned}$$

wo man nun durch leichte Rechnung findet, dass die letzte Grösse verschwindet, und folglich, wenn man zugleich den hier betrachteten Coefficienten noch auf andere Weise ausdrückt,

$$\begin{aligned}&\gamma_1(\delta_2\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_2)+\gamma_2(\delta_3\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_3)+\gamma_3(\delta_1\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_1)=0,\\ &\delta_1(\varepsilon_2\gamma_3-\varepsilon_3\gamma_2)+\delta_2(\varepsilon_3\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_3)+\delta_3(\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1)=0,\\ &\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)=0\end{aligned}$$

ist.

Hieraus ergiebt sich also das wichtige Resultat, dass die oben gefundene, nur die eine unbekannte Grösse $z_1$ enthaltende Endgleichung nicht vom dritten, sondern bloss vom zweiten Grade ist. Entwickelt man nun diese Gleichung gehörig, so erhält dieselbe, wenn der Kürze wegen

$$15.\quad\begin{cases}f_1=\lambda_3\mu_2-\lambda_2\mu_3,\ g_1=\delta_3\mu_2-\delta_2\mu_3;\\ f_2=\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1,\ g_2=\delta_1\mu_3-\delta_3\mu_1;\\ f_3=\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2,\ g_3=\delta_2\mu_1-\delta_1\mu_2;\\ h_1=\lambda_3\varepsilon_2-\lambda_2\varepsilon_3,\ i_1=\delta_3\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_3;\\ h_2=\lambda_1\varepsilon_3-\lambda_3\varepsilon_1,\ i_2=\delta_1\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_1;\\ h_3=\lambda_2\varepsilon_1-\lambda_1\varepsilon_2,\ i_3=\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_2\end{cases}$$

gesetzt wird, die folgende Gestalt:

Digitized by Google

16. $$0 = f_1k_1 + f_2k_2 + f_3k_3 - \{f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + f_3\gamma_3 + (g_1 + h_1)k_1 + (g_2 + h_2)k_2 + (g_3 + h_3)k_3\}z_1 + \{i_1k_1 + i_2k_2 + i_3k_3 + (g_1 + h_1)\gamma_1 + (g_2 + h_2)\gamma_2 + (g_3 + h_3)\gamma_3\}z_1^2.$$

Bezeichnen wir die drei Coefficienten dieser Gleichung durch $L$, $M$, $N$, und setzen also

17. $$0 = L - Mz_1 + Nz_1^2,$$

so erhalten wir nach der in dem Aufsatze III. S. 12. entwickelten Auflösungsmethode der quadratischen Gleichungen zur Bestimmung der beiden Wurzeln der obigen Gleichung die folgenden Formeln:

18. $$\cot(\chi+\chi_1) = \frac{N-L}{M}, \cos(\chi-\chi_1) = \frac{N+L}{M} \sin(\chi+\chi_1), \; z_1 = \begin{cases} \operatorname{tang}\chi \\ \operatorname{tang}\chi_1 \end{cases}.$$

Findet sich mittelst der zweiten dieser Formeln der absolute Werth von $\cos(\chi-\chi_1)$ grösser als die Einheit, so hat die Gleichung 17. zwei imaginäre Wurzeln, und die Aufgabe ist also unmöglich; in jedem andern Falle hat die in Rede stehende Gleichung zwei reelle Wurzeln, und die Aufgabe ist im Allgemeinen zweier Auflösungen fähig.

Hat man $z_1$ gefunden, so ergeben sich $A$ und $\mathfrak{A}$ mittelst der folgenden, leicht aus den Gleichungen 13. zu erhaltenden Ausdrücke:

19. $$\begin{cases} A = \dfrac{(k_1-\gamma_1z_1)(\lambda_2-\delta_2z_1) - (k_2-\gamma_2z_1)(\lambda_1-\delta_1z_1)}{(\lambda_1-\delta_1z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1) - (\lambda_2-\delta_2z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}, \\ A = \dfrac{(k_2-\gamma_2z_1)(\lambda_3-\delta_3z_1) - (k_3-\gamma_3z_1)(\lambda_2-\delta_2z_1)}{(\lambda_2-\delta_2z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1) - (\lambda_3-\delta_3z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}, \\ A = \dfrac{(k_3-\gamma_3z_1)(\lambda_1-\delta_1z_1) - (k_1-\gamma_1z_1)(\lambda_3-\delta_3z_1)}{(\lambda_3-\delta_3z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1) - (\lambda_1-\delta_1z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1)}, \end{cases}$$

und

20. $$\begin{cases} \mathfrak{A} = -\dfrac{(k_1-\gamma_1z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1) - (k_2-\gamma_2z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}{(\lambda_1-\delta_1z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1) - (\lambda_2-\delta_2z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}, \\ \mathfrak{A} = -\dfrac{(k_2-\gamma_2z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1) - (k_3-\gamma_3z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}{(\lambda_2-\delta_2z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1) - (\lambda_3-\delta_3z_1)(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}, \\ \mathfrak{A} = -\dfrac{(k_3-\gamma_3z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1) - (k_1-\gamma_1z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1)}{(\lambda_3-\delta_3z_1)(\mu_1-\varepsilon_1z_1) - (\lambda_1-\delta_1z_1)(\mu_3-\varepsilon_3z_1)}. \end{cases}$$

Die Grössen $B$ und $\mathfrak{B}$ erhält man dann endlich mittelst der Formeln

21. $$B = b_1 + (a_1 - A)z_1, \; \mathfrak{B} = \beta_1 + (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1.$$

Die Coordinaten $z_2$, $z_3$, $z_4$ erhält man mittelst der Formeln

22. $$\begin{cases} z_2 = -\dfrac{b_2-B}{a_2-A} = -\dfrac{\beta_2-\mathfrak{B}}{\alpha_2-\mathfrak{A}}, \\ z_3 = -\dfrac{b_3-B}{a_3-A} = -\dfrac{\beta_3-\mathfrak{B}}{\alpha_3-\mathfrak{A}}, \\ z_4 = -\dfrac{b_4-B}{a_4-A} = -\dfrac{\beta_4-\mathfrak{B}}{\alpha_4-\mathfrak{A}}; \end{cases}$$

Digitized by Google

und die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ und $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ werden mittelst der Gleichungen 3. gefunden.

Hierdurch ist nun unsere Aufgabe vollständig aufgelöst. Dass dieselbe unbestimmt werden muss, wenn die vier gegebenen geraden Linien in einer Ebene liegen, fällt sogleich in die Augen.

Man kann von dieser Aufgabe eine Anwendung zur annähernden Bestimmung der Cometenbahnen machen, worüber wir nur ganz in der Kürze Folgendes bemerken wollen.

Den Mittelpunkt der Sonne wollen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x$, $y$, $z$ annehmen. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der $xy$, und der positive Theil der Axe der $x$ soll vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Frühlingspunkte hingerichtet sein; den positiven Theil der Axe der $y$ nehmen wir so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ an durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, ganz nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der $x$ an die heliocentrischen Längen genommen werden; den positiven Theil der Axe der $z$ nehmen wir endlich auf der nördlichen Seite der Ebene der Elliptik d. i. der Ebene der $xy$ an. Ferner legen wir zu einer bestimmten Zeit durch den Mittelpunkt der Erde ein dem Systeme der $xyz$ paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$. Bezeichnen dann für diese Zeit $\alpha$, $\beta$ und $\varrho$ respective die geocentrische Länge und Breite eines Cometen und dessen sogenannte curtirte Entfernung vom Mittelpunkte der Erde; so sind offenbar in völliger Allgemeinheit $\varrho \cos \alpha$, $\varrho \sin \alpha$, $\varrho \operatorname{tang} \beta$ die Coordinaten des Cometen in dem Systeme der $x_1y_1z_1$. Die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1y_1z_1$ haben die Form

$$x_1 = Az_1,\ y_1 = Bz_1,$$

und es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$\varrho \cos \alpha = A\varrho \operatorname{tang} \beta,\ \varrho \sin \alpha = B\varrho \operatorname{tang} \beta,$$

also

$$A = \cos \alpha \cot \beta,\ B = \sin \alpha \cot \beta.$$

Folglich sind die Gleichungen der vom Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1y_1z_1$

$$23.\quad x_1 = z_1 \cos \alpha \cot \beta,\ y_1 = z_1 \sin \alpha \cot \beta.$$

Bezeichnet $\Theta$ die geocentrische Länge der Sonne und $R$ deren Entfernung von der Erde zu der in Rede stehenden Zeit, so sind offenbar in völliger Allgemeinheit $R \cos \Theta$, $R \sin \Theta$ die Coordinaten der Sonne im Systeme der $x_1y_1z_1$, wobei sich von selbst versteht, dass die dritte Coordinate der Null gleich gesetzt wird. Also hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten eines und desselben Punktes in den Systemen der $xyz$ und $x_1y_1z_1$ die Gleichungen

$$x_1 = R \cos \Theta + x,\ y_1 = R \sin \Theta + y,\ z_1 = z$$

oder

$$x = x_1 - R \cos \Theta,\ y = y_1 - R \sin \Theta,\ z = z_1,$$

und die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem

Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der $xyz$ sind also nach dem Vorhergehenden

$$x + R\cos\Theta = z\cos\alpha\cot\beta,\quad y + R\sin\Theta = z\sin\alpha\cot\beta$$

oder

$$24.\quad x = z\cos\alpha\cot\beta - R\cos\Theta,\quad y = z\sin\alpha\cot\beta - R\sin\Theta.$$

Hat man nun vier aus Beobachtungen abgeleitete geocentrische Längen und Breiten $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ und $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, $\beta'''$ eines Cometen; so kennt man die Lage von vier von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linien, deren Gleichungen, wenn die entsprechenden geocentrischen Längen und Entfernungen der Sonne von der Erde durch $\Theta$, $\Theta'$, $\Theta''$, $\Theta'''$ und $R$, $R'$, $R''$, $R'''$ bezeichnet werden, nach 24.

$$25.\quad \begin{cases} x = z\cos\alpha\cot\beta - R\cos\Theta, & y = z\sin\alpha\cot\beta - R\sin\Theta; \\ x = z\cos\alpha'\cot\beta' - R'\cos\Theta', & y = z\sin\alpha'\cot\beta' - R'\sin\Theta'; \\ x = z\cos\alpha''\cot\beta'' - R''\cos\Theta'', & y = z\sin\alpha''\cot\beta'' - R''\sin\Theta''; \\ x = z\cos\alpha'''\cot\beta''' - R'''\cos\Theta''', & y = z\sin\alpha'''\cot\beta''' - R'''\sin\Theta''' \end{cases}$$

sind. Wenn nun die Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen nur klein sind, so kann man das Stück der Cometenbahn, auf welches sich dieselben beziehen, näherungsweise als eine gerade Linie betrachten, und wird seine Lage offenbar nach der oben aufgelösten Aufgabe bestimmen können, wenn man

$$26.\quad \begin{cases} a_1 = \cos\alpha\cot\beta, & b_1 = -R\cos\Theta; \\ a_2 = \cos\alpha'\cot\beta', & b_2 = -R'\cos\Theta'; \\ a_3 = \cos\alpha''\cot\beta'', & b_3 = -R''\cos\Theta''; \\ a_4 = \cos\alpha'''\cot\beta''', & b_4 = -R'''\cos\Theta'''; \end{cases}$$

und

$$27.\quad \begin{cases} \alpha_1 = \sin\alpha\cot\beta, & \beta_1 = -R\sin\Theta; \\ \alpha_2 = \sin\alpha'\cot\beta', & \beta_2 = -R'\sin\Theta'; \\ \alpha_3 = \sin\alpha''\cot\beta'', & \beta_3 = -R''\sin\Theta''; \\ \alpha_4 = \sin\alpha'''\cot\beta''', & \beta_4 = -R'''\sin\Theta''' \end{cases}$$

setzt. Freilich aber wird in jedem Falle eine besondere Beurtheilung nöthig sein, welche Wurzel der quadratischen Gleichung, auf welche die obige Aufgabe führt, man zu nehmen hat. Weil die Ebene der Cometenbahn durch den Mittelpunkt der Sonne geht, so wird man nun offenbar auch deren Lage bestimmen, und hieraus ferner die sämmtlichen Elemente der Cometenbahn finden können, wie in der Astronomie ausführlich gezeigt wird.

Olbers urtheilt in seiner Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. Weimar. 1797. S. 27 über die vorige Methode, die Cometenbahnen zu berechnen, auf folgende Art: „Wenn die vier gegebenen geraden Linien nicht in einer Ebene liegen, so ist die Lage einer fünften, die von allen vieren geschnitten werden soll, an sich bestimmt, ohne auf die Verhältnisse der Abschnitte zu sehen. Man könnte also bloss mit

Digitized by Google

der Voraussetzung, dass das Stück der Cometenbahn zwischen den vier Beobachtungen gerade sei, ausreichen, ohne auch die gleichförmige Geschwindigkeit anzunehmen, wenn man die Breiten mit in Betrachtung ziehen wollte. Die Lage dieser fünften geraden Linie wird indess nicht durch eine linearische, sondern durch eine Gleichung des achten Grades und eine ziemlich verwickelte Formel gefunden werden. Auch würden bei dieser Aufgabe ähnliche Einschränkungen wie bei der Bouguerschen Statt finden, ob man gleich sonst viel weiter damit reichen würde. Denn die Geschwindigkeit des Cometen ist gerade dann am ungleichförmigsten, wenn seine Bewegung sich am mehrsten der geraden Linie nähert, und umgekehrt." Wie Olbers zu der Meinung kommt, dass die gerade Linie, welche die vier von der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linien schneidet, durch eine Gleichung des achten Grades bestimmt werde, ist nicht abzusehen, indem wir vielmehr aus dem Obigen wissen, dass die Lage dieser geraden Linie bloss durch eine Gleichung vom zweiten Grade bestimmt wird.

---

# XXII.

## Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppen-Problems, aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt.

Von

dem Herausgeber.

(Diese Abhandlung hat, wie schon ihr Titel andeutet, den Zweck, die verschiedenen Ansichten, nach denen man bis jetzt das Sternschnuppen-Problem behandelt hat, den Lesern des Archivs in einem zusammenhängenden und systematischen Ganzen vor die Augen zu führen und unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte darzustellen. Späterhin werden ausführliche und vollständige Relationen über die neuesten wichtigen Arbeiten von Bessel, Erman und andern Mathematikern und Physikern nachfolgen, um in dem Archive Alles aufzubewahren, was über den in Rede stehenden wichtigen und interessanten Gegenstand der Physik in theoretischer Rücksicht gearbeitet worden ist und noch gearbeitet werden wird.)

### §. 1.

Es liegt in dem Zwecke dieser Zeitschrift, auch vollständige Darstellungen der verschiedenen Auflösungen oder Beweise, welche

Digitized by Google

für besonders wichtige Probleme oder Theoreme gegeben worden sind, zu liefern. Da nun zu den Problemen der mathematischen Physik, welche das Interesse der Gegenwart ganz vorzüglich in Anspruch nehmen, mit Recht das Sternschnuppen-Problem gehört, so glaube ich den Lesern dieser Zeitschrift einen angenehmen Dienst zu leisten, wenn ich versuche, in diesem Aufsatze eine vollständige Darstellung der verschiedenen Auflösungen, welche für dieses wichtige und interessante Problem gegeben worden sind, in der Art zu liefern, dass ich mich bemühen werde, alle diese Auflösungen aus einigen allgemeinen Grundformeln abzuleiten.

Ueber die Art, wie Sternschnuppen beobachtet werden, schicke ich, um das Verstehen der analytischen Entwickelungen, welche den Hauptgegenstand dieses Aufsatzes ausmachen, zu erleichtern, hier die folgenden kurzen Bemerkungen voraus. Jeder Beobachter ist mit einer nach der Zeit seines Beobachtungsorts gehenden Uhr und mit einer Sternkarte versehen. An der Uhr beobachtet er die Zeit des Erscheinens einer Sternschnuppe, wo möglich die beiden genauen Zeitmomente des Entstehens und Erlöschens derselben, und auf der Sternkarte zeichnet er mit einem Bleistifte so genau als irgend möglich den ganzen Weg der Sternschnuppe von seinem Anfangspunkte bis zu seinem Endpunkte, indem er zugleich durch einen Pfeil oder ein anderes passendes Zeichen die Richtung angiebt, nach welcher sich die Sternschnuppe bewegte. Aus der Sternkarte kann man nachher die wahren, d. h. auf den Mittelpunkt der Erde bezogenen Rectascensionen und Declinationen der Punkte des Himmels nehmen, in denen die Sternschnuppe dem Beobachter zu entstehen und zu erlöschen schien, und hat auf diese Weise nun, wie im Folgenden gezeigt werden wird, alle Data, welche nöthig sind, um durch Combination an mehreren Orten, deren geographische Positionen bekannt sind, angestellter Beobachtungen dieser Art die Bahnen der Sternschnuppen bestimmen zu können, insofern es nämlich verstattet ist, dieselben während der in allen Fällen immer nur sehr kurzen Dauer der Sichtbarkeit der Sternschnuppen als gerade Linien zu betrachten.

## §. 2.

Zuerst wollen wir jetzt die Gleichungen der von einem Beobachtungsorte nach einem beobachteten Punkte der Bahn einer Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie entwickeln.

Zu dem Ende nehmen wir, um die grösste Allgemeinheit zu erreichen, den Mittelpunkt der Sonne als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$ an. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der $xy$. Die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem Frühlingspunkte gezogene gerade Linie sei der positive Theil der Axe der $x$. Der positive Theil der Axe der $y$ werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe $x$ durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der $x$ an die heliocentrischen Längen von 0 bis 360° gezählt werden. Der positive Theil der Axe der $z$ liege auf der Seite der Ebene der $xy$, auf welcher die positiven heliocentrischen Breiten genommen werden.

Ferner nehmen wir den Mittelpunkt der Erde als den Anfang



Digitized by Google

eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1\ y_1\ z_1$ an. Die Ebene des Aequators sei die Ebene der $x_1 y_1$. Der positive Theil der Axe der $x_1$ sei von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet. Der positive Theil der Axe der $y_1$ werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x_1$ durch den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_1$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der $x_1$ an die Rectascensionen von 0 bis 360° gezählt werden. Der positive Theil der Axe der $z_1$ liege auf der Seite der Ebene der $x_1 y_1$, auf welcher die positiven Declinationen genommen werden.

Endlich lege man durch den Mittelpunkt der Erde ein dem Systeme der $xyz$ paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta\zeta$.

Die dem Moment der Beobachtung entsprechende geocentrische Länge der Sonne und deren Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, welche aus den astronomischen Tafeln oder den Ephemeriden zu nehmen sind, seien $\lambda$ und $\varrho$; so erhellet mittelst einer sehr einfachen Betrachtung, dass allgemein $\lambda \pm 180°$ die dem Moment der Beobachtung entsprechende heliocentrische Länge der Erde ist, und folglich

$$\varrho \cos(\lambda \pm 180°),\ \varrho \sin(\lambda \pm 180°),\ 0$$

oder

$$-\varrho \cos\lambda,\ -\varrho \sin\lambda,\ 0$$

die dem Moment der Beobachtung entsprechenden Coordinaten des Mittelpunkts der Erde in dem Systeme der $xyz$ sind.

Daher hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der beiden Systeme der $xyz$ und $\xi\eta\zeta$ die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1.\quad x = -\varrho \cos\lambda + \xi,\ y = -\varrho \sin\lambda + \eta,\ z = \zeta$$

oder

$$2.\quad \xi = \varrho \cos\lambda + x,\ \eta = \varrho \sin\lambda + y,\ \zeta = z.$$

Bezeichnen wir nun die Schiefe der Ekliptik durch $\Theta$; so ist, wie leicht erhellen wird, allgemein

$$\begin{aligned}
&(\xi x_1) = 0, \quad (\xi y_1) = 90°, && (\xi z_1) = 90°;\\
&(\eta x_1) = 90°, \ (\eta y_1) = \Theta, && (\eta z_1) = 90° - \Theta;\\
&(\zeta x_1) = 90°, \ (\zeta y_1) = 90° + \Theta, && (\zeta z_1) = \Theta;
\end{aligned}$$

und nach den bekannten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man also zwischen den Coordinaten der Systeme der $x_1 y_1 z_1$ und $\xi\eta\zeta$ die folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} \xi = x_1, \\ \eta = y_1 \cos\Theta + z_1 \sin\Theta, \\ \zeta = -y_1 \sin\Theta + z_1 \cos\Theta; \end{cases}$$

oder umgekehrt

$$4.\quad \begin{cases} x_1 = \xi, \\ y_1 = \eta \cos\Theta - \zeta \sin\Theta, \\ z_1 = \eta \sin\Theta + \zeta \cos\Theta. \end{cases}$$

Digitized by Google

Also hat man nach 1. und 3. zwischen den Coordinaten der Systeme der $xyz$ und $x_1y_1z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$5.\quad \begin{cases} x = -\varrho\cos\lambda + x_1, \\ y = -\varrho\sin\lambda + y_1\cos\Theta + z_1\sin\Theta, \\ z = -y_1\sin\Theta + z_1\cos\Theta; \end{cases}$$

oder, wie man hieraus leicht findet, umgekehrt:

$$6.\quad \begin{cases} x_1 = \varrho\cos\lambda + x, \\ y_1 = \varrho\sin\lambda\cos\Theta + y\cos\Theta - z\sin\Theta, \\ z_1 = \varrho\sin\lambda\sin\Theta + y\sin\Theta + z\cos\Theta. \end{cases}$$

Der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdradius und die geocentrische Breite des Beobachtungsorts seien $r$ und $\varphi$, und $T$ sei die Sternzeit der Beobachtung; so sind

$$r\cos\varphi\cos 15\ T,$$
$$r\cos\varphi\sin 15\ T,$$
$$r\sin\varphi$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Moment der Beobachtung in dem Systeme der $x_1y_1z_1$. Also sind nach 5.

$$-\varrho\cos\lambda + r\cos\varphi\cos 15\ T,$$
$$-\varrho\sin\lambda + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\ T)$$
$$r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\ T)$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Moment der Beobachtung im Systeme der $xyz$.

Durch den Beobachtungsort legen wir nun ein dem Systeme der $x_1y_1z_1$ paralleles Coordinatensystem der $x_2y_2z_2$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$7.\quad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos 15\ T + x_2, \\ y_1 = r\cos\varphi\sin 15\ T + y_2, \\ z_1 = r\sin\varphi + z_2. \end{cases}$$

Die Rectascension und Declination des beobachteten Punktes der Bahn der Sternschnuppe seien $\alpha$ und $\delta$; so ist, wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2y_2z_2$ durch $m$, $n$, $k$, und die Entfernung dieses Punktes von dem Beobachtungsorte durch $i$ bezeichnen,

$$m = i\cos\alpha\cos\delta,$$
$$n = i\sin\alpha\cos\delta,$$
$$k = i\sin\delta;$$

wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die in Rede stehende Gesichtslinie und die vom Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte, in welchem die Sternschnuppe dem Beobachter am Himmel erschien, als parallel zu betrachten sind. Sind nun

$$x_2 = Mz_2,\ y_2 = Nz_2$$



Digitized by Google

die Gleichungen der in Rede stehenden Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2 y_2 z_2$; so ist

$$i \cos \alpha \cos \delta = i M \sin \delta, \; i \sin \alpha \cos \delta = i N \sin \delta,$$

und folglich

$$M = \cos \alpha \cot \delta, \; N = \sin \alpha \cot \delta.$$

Also sind

$$8. \quad x_2 = z_2 \cos \alpha \cot \delta, \; y_2 = z_2 \sin \alpha \cot \delta$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2 y_2 z_2$, und mittelst der Gleichungen 7. ergiebt sich nun ferner leicht, dass

$$9. \begin{cases} x_1 - r \cos \varphi \cos 15 \, T = (z_1 - r \sin \varphi) \cos \alpha \cot \delta, \\ y_1 - r \cos \varphi \sin 15 \, T = (z_1 - r \sin \varphi) \sin \alpha \cot \delta \end{cases}$$

oder

$$10. \begin{cases} x_1 = z_1 \cos \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \cos 15 \, T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi), \\ y_1 = z_1 \sin \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \sin 15 \, T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi) \end{cases}$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ sind.

Nach 6. und 9. sind

$$11. \begin{cases} \varrho \cos \lambda - r \cos \varphi \cos 15 \, T + x \\ \quad = (\varrho \sin \lambda \sin \Theta - r \sin \varphi + y \sin \Theta + z \cos \Theta) \cos \alpha \cot \delta, \\ \varrho \sin \lambda \cos \Theta - r \cos \varphi \sin 15 \, T + y \cos \Theta - z \sin \Theta \\ \quad = (\varrho \sin \lambda \sin \Theta - r \sin \varphi + y \sin \Theta + z \cos \Theta) \sin \alpha \cot \delta \end{cases}$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $xyz$.

Um diese Gleichungen noch anders auszudrücken, seien $f$, $g$, $h$ und $f_1$, $g_1$, $h_1$ die Coordinaten des Beobachtungsortes und des beobachteten Punktes in der Bahn der Sternschnuppe in dem Systeme der $xyz$, und

$$y = Ax + B, \; z = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$$

seien die Gleichungen der durch die beiden in Rede stehenden Punkte bestimmten Gesichtslinie; so ist

$$g = Af + B, \; h = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}; \; g_1 = Af_1 + B, \; h_1 = \mathfrak{A}f_1 + \mathfrak{B};$$

und folglich

$$y - g = A(x - f), \; z - h = \mathfrak{A}(x - f)$$

und

$$g - g_1 = A(f - f_1), \; h - h_1 = \mathfrak{A}(f - f_1),$$

also

$$y - g = \frac{g - g_1}{f - f_1}(x - f), \; z - h = \frac{h - h_1}{f - f_1}(x - f).$$

Digitized by Google

Nach dem Obigen ist

$$f = -\varrho \cos\lambda + r\cos\varphi\cos 15\,T,$$
$$g = -\varrho\sin\lambda + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T),$$
$$h = r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T).$$

Ferner ist, wenn jetzt wieder $i$ die Entfernung des beobachteten Punktes der Bahn der Sternschnuppe von dem Beobachtungsorte bezeichnet, nach 5. und 7.

$$f_1 = -\varrho\cos\lambda + r\cos\varphi\cos 15\,T + i\cos\alpha\cos\delta,$$
$$g_1 = -\varrho\sin\lambda + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) + i(\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta),$$
$$h_1 = r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) + i(\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta);$$

d. i.

$$f_1 = f + i\cos\alpha\cos\delta,$$
$$g_1 = g + i\,(\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta),$$
$$h_1 = h + i\,(\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta).$$

Folglich sind nach dem Obigen

$$12.\quad \begin{cases} y + \varrho\sin\lambda - r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ = \dfrac{\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta}\,(x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T), \\ z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ = \dfrac{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta}\,(x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T) \end{cases}$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $xyz$.

Diese Gleichungen sind auch

$$x - f = \frac{f - f_1}{h - h_1}\,(z - h),\quad y - g = \frac{g - g_1}{h - h_1}\,(z - h),$$

und folglich nach dem Obigen

$$13.\quad \begin{cases} x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T \\ = \dfrac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}\,\{z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)\} \\ y + \varrho\sin\lambda - r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ = \dfrac{\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}\,\{z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)\}. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$14.\quad \begin{cases} A = \cos\alpha\cos\delta, \\ B = \sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta, \\ C = \cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta, \\ A_1 = \cos\varphi\cos 15\,T, \\ B_1 = \sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T, \\ C_1 = \cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T, \end{cases}$$

Digitized by Google

so werden die Gleichungen 13.

$$15.\quad \begin{cases} x = \frac{A}{C}\,z - \frac{AC_1}{C}\,r + A_1\,r - \varrho\,\cos\lambda, \\ y = \frac{B}{C}\,z - \frac{BC_1}{C}\,r + B_1\,r - \varrho\,\sin\lambda; \end{cases}$$

und wenn man die Hülfswinkel $\psi$, $\psi_1$ mittelst der Formeln

$$16.\quad \text{tang}\,\psi = \sin\alpha\,\cot\delta,\ \text{tang}\,\psi_1 = \sin 15\,T\,\cot\varphi$$

berechnet; so hat man für die Grössen $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ die folgenden Ausdrücke:

$$17.\quad \begin{cases} A = \cos\alpha\,\cos\delta, \\ B = \frac{\sin\delta\,\sin(\Theta+\psi)}{\cos\psi}, \\ C = \frac{\sin\delta\,\cos(\Theta+\psi)}{\cos\psi}, \\ A_1 = \cos\varphi\,\cos 15\,T, \\ B_1 = \frac{\sin\varphi\,\sin(\Theta+\psi_1)}{\cos\psi_1}, \\ C_1 = \frac{\sin\varphi\,\cos(\Theta+\psi_1)}{\cos\psi_1}, \end{cases}$$

## §. 3.

Wir wollen jetzt die Bedingungsgleichung aufsuchen, welche erfüllt sein muss, wenn zwei aus verschiedenenen Beobachtungsorten nach beobachteten Sternschnuppen gezogene Gesichtslinien sich schneiden sollen.

Nach den Gleichungen 11. im vorigen Paragraphen haben die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Gesichtslinien im Allgemeinen die folgende Form:

$$\varrho\,\cos\lambda - r\,\cos\varphi\,\cos 15\,T + x = (\varrho\,\sin\lambda\,\sin\Theta - r\,\sin\varphi + y\,\sin\Theta + z\,\cos\Theta)\,\cos\alpha\,\cot\delta,$$

$$\varrho\,\sin\lambda\,\cos\Theta - r\,\cos\varphi\,\sin 15\,T + y\,\cos\Theta - z\,\sin\Theta = (\varrho\,\sin\lambda\,\sin\Theta - r\,\sin\varphi + y\,\sin\Theta + z\,\cos\Theta)\,\sin\alpha\,\cot\delta$$

und

$$\varrho_1\,\cos\lambda_1 - r_1\,\cos\varphi_1\,\cos 15\,T_1 + x = (\varrho_1\,\sin\lambda_1\,\sin\Theta - r_1\,\sin\varphi_1 + y\,\sin\Theta + z\,\cos\Theta)\,\cos\alpha_1\,\cot\delta_1,$$

$$\varrho_1\,\sin\lambda_1\,\cos\Theta - r_1\,\cos\varphi_1\,\sin 15\,T_1 + y\,\cos\Theta - z\,\sin\Theta = (\varrho_1\,\sin\lambda_1\,\sin\Theta - r_1\,\sin\varphi_1 + y\,\sin\Theta + z\,\cos\Theta)\,\sin\alpha_1\,\cot\delta_1.$$

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen $x$, $y$, $z$, so wird man offenbar die gesuchte Bedingungsgleichung erhalten. Zieht man aber die dritte Gleichung von der ersten, die vierte von der zweiten ab, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die beiden folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1-(r\cos\varphi\cos 15\,T-r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1)$$
$$-(\varrho\sin\lambda\sin\Theta-r\sin\varphi)\cos\alpha\cot\delta$$
$$+(\varrho_1\sin\lambda_1\sin\Theta-r_1\sin\varphi_1)\cos\alpha_1\cot\delta_1$$
$$=(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)\,(y\sin\Theta+z\cos\Theta),$$
$$(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\cos\Theta-(r\cos\varphi\sin 15\,T-r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1)$$
$$-(\varrho\sin\lambda\sin\Theta-r\sin\varphi)\sin\alpha\cot\delta$$
$$+(\varrho_1\sin\lambda_1\sin\Theta-r_1\sin\varphi_1)\sin\alpha_1\cot\delta_1$$
$$=(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)\,(y\sin\Theta+z\cos\Theta).$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun sehr leicht die Grösse $y\sin\Theta+z\cos\Theta$ eliminiren, und erhält nach einigen leichten Reductionen die folgende Gleichung:

18. $$0=\{(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\sin\Theta-(r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1)\}\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1$$
$$-\{(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)\sin\alpha-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\cos\alpha\cos\Theta$$
$$-r\cos\varphi\sin(\alpha-15\,T)+r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15\,T_1)\}\cot\delta$$
$$+\{(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)\sin\alpha_1-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\cos\alpha_1\cos\Theta$$
$$-r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15\,T)+r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15\,T_1)\}\cot\delta_1,$$

welche die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Bringt man alle die geocentrischen Breiten $\varphi$ und $\varphi_1$ der beiden Beobachtungsorte enthaltenden Glieder auf eine Seite, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Gestalt an:

19. $$(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)$$
$$-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\{\cos\Theta(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)$$
$$+\sin\Theta_1\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}$$
$$=r\cos\varphi\{\sin(\alpha-15\,T)\cot\delta-\sin(\alpha_1-15\,T)\cot\delta_1\}$$
$$-r_1\cos\varphi_1\{\sin(\alpha-15\,T_1)\cot\delta-\sin(\alpha_1-15\,T_1)\cot\delta_1\}$$
$$-(r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1)\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1.$$

Noch etwas einfacher kann man die beiden vorhergehenden Gleichungen unter der folgenden Gestalt darstellen:

20. $$0=\{(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\sin\Theta-(r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1)\}\sin(\alpha-\alpha_1)$$
$$-\{(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)\sin\alpha-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\cos\alpha\cos\Theta$$
$$-r\cos\varphi\sin(\alpha-15\,T)+r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15\,T_1)\}\operatorname{tang}\delta_1$$
$$+\{(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)\sin\alpha_1-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\cos\alpha_1\cos\Theta$$
$$-r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15\,T)+r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15\,T_1)\}\operatorname{tang}\delta$$

und

21. $$(\varrho\cos\lambda-\varrho_1\cos\lambda_1)(\sin\alpha\operatorname{tang}\delta_1-\sin\alpha_1\operatorname{tang}\delta)$$
$$-(\varrho\sin\lambda-\varrho_1\sin\lambda_1)\{\sin\Theta\sin(\alpha-\alpha_1)+\cos\Theta(\cos\alpha\operatorname{tg}\delta_1-\cos\alpha_1\operatorname{tg}\delta)\}$$
$$=r\cos\varphi\{\sin(\alpha-15\,T)\operatorname{tang}\delta_1-\sin(\alpha_1-15\,T)\operatorname{tang}\delta\}$$
$$-r_1\cos\varphi_1\{\sin(\alpha-15\,T_1)\operatorname{tang}\delta_1-\sin(\alpha_1-15\,T_1)\operatorname{tang}\delta\}$$
$$-(r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1)\sin(\alpha-\alpha_1).$$

Digitized by Google

Diese letzte Gleichung kann auch auf folgende Art geschrieben werden:

22. $(\varrho \cos \lambda - \varrho_1 \cos \lambda_1)(\sin \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)$
$-(\varrho \sin \lambda - \varrho_1 \sin \lambda_1)\{\sin \Theta \sin(\alpha - \alpha_1) + \cos \Theta (\cos \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)\}$
$= (\sin \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(r \cos \varphi \cos 15T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1)$
$-(\cos \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(r \cos \varphi \sin 15T - r_1 \cos \varphi_1 \sin 15T_1)$
$-(r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin(\alpha - \alpha_1)$.

Sind $L$, $L_1$ die geographischen Längen der beiden Beobachtungsorte, so hat man, wie man durch eine einfache Betrachtung findet, für die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen die Bedingungsgleichung

$$(L - L_1) - 15(T - T_1) = 0$$

oder

$$(L - L_1) - 15(T - T_1) = \pm 360°,$$

jenachdem die Grössen $L - L_1$ und $T - T_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, wobei zugleich zu bemerken ist, dass in der zweiten der beiden vorstehenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $L - L_1$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

Für gleichzeitige Beobachtungen ist aber $\varrho = \varrho_1$, $\lambda = \lambda_1$, also

$$\varrho \cos \lambda - \varrho_1 \cos \lambda_1 = 0, \quad \varrho \sin \lambda - \varrho_1 \sin \lambda_1 = 0,$$

und die Gleichungen 21. und 22. werden also in diesem Falle

23. $(r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin(\alpha - \alpha_1)$
$= r \cos \varphi \{\sin(\alpha - 15T) \operatorname{tang} \delta_1 - \sin(\alpha_1 - 15T) \operatorname{tang} \delta\}$
$-r_1 \cos \varphi_1 \{\sin(\alpha - 15T_1) \operatorname{tang} \delta_1 - \sin(\alpha_1 - 15T_1) \operatorname{tang} \delta\}$

und

24. $(r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin(\alpha - \alpha_1)$
$= (\sin \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(r \cos \varphi \cos 15T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1)$
$-(\cos \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(r \cos \varphi \sin 15T - r_1 \cos \varphi_1 \sin 15T_1)$.

Für $r = r_1$, d. h. wenn man auf die sphäroidische Gestalt der Erde keine Rücksicht nimmt, können diese Gleichungen auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

25. $2 \sin(\alpha - \alpha_1) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$
$= \{\cos \varphi \sin(\alpha - 15T) - \cos \varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1)\} \operatorname{tang} \delta_1$
$-\{\cos \varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \cos \varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)\} \operatorname{tang} \delta$

und

26. $2 \sin(\alpha - \alpha_1) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$
$= (\sin \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(\cos \varphi \cos 15T - \cos \varphi_1 \cos 15T_1)$
$-(\cos \alpha \operatorname{tang} \delta_1 - \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \delta)(\cos \varphi \sin 15T - \cos \varphi_1 \sin 15T_1)$.

Die Gleichung 23. oder 24. kann noch auf einen andern bemerkenswerthen Ausdruck gebracht werden. Die Gleichungen der die

Digitized by Google

beiden Beobachtungsorte mit einander verbindenden geraden Linie in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ seien

$$x_1 = Kz_1 + L,\ y_1 = Mz_1 + N;$$

so ist nach §. 2.

$r\cos\varphi\cos 15\,T = K\,r\sin\varphi + L$, $r\cos\varphi\sin 15\,T = M\,r\sin\varphi + N$;

$r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1 = Kr_1\sin\varphi_1 + L$, $r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1 = Mr_1\sin\varphi_1 + N$;

und die Gleichungen der in Rede stehenden Linie sind also offenbar

$$27.\quad \begin{cases} x_1 - r\cos\varphi\cos 15\,T = \dfrac{r\cos\varphi\cos 15\,T - r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}(z_1 - r\sin\varphi), \\ y_1 - r\cos\varphi\sin 15\,T = \dfrac{r\cos\varphi\sin 15\,T - r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}(z_1 - r\sin\varphi). \end{cases}$$

Also sind

$$28.\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r\cos\varphi\cos 15\,T - r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}\,z_1, \\ y_1 = \dfrac{r\cos\varphi\sin 15\,T - r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}\,z_1 \end{cases}$$

die Gleichungen der mit der in Rede stehenden geraden Linie durch den Anfang der Coordinaten, d. i. durch den Mittelpunkt der Erde, parallel gezogenen geraden Linie. Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Axe der $x_1$ liegende Theil der Projection der in Rede stehenden geraden Linie auf der Ebene der $x_1 y_1$ mit dem positiven Theile der Axe der $x_1$ einschliesst, durch $A$, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$29.\quad \text{tang}\,A = \frac{r\cos\varphi\sin 15\,T - r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1}{r\cos\varphi\cos 15\,T - r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1},$$

weil nach 28.

$$30.\quad y_1 = \frac{r\cos\varphi\sin 15\,T - r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1}{r\cos\varphi\cos 15\,T - r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1}\,x_1$$

die Gleichung der in Rede stehenden Projection ist.

Ferner sei $D$ die Declination des Punktes der Sphäre, in welchem dieselbe von dem Theile der durch den Mittelpunkt der Erde mit der die beiden Beobachtungsorte verbindenden geraden Linie parallel gezogenen geraden Linie, dessen Projection auf der Ebene der $x_1 y_1$ auf der positiven Seiten der Axe der $x_1$ liegt, geschnitten wird; so ist, wenn $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes in diesem Theile der in Rede stehenden durch den Mittelpunkt der Erde mit der die beiden Beobachtungsorte mit einander verbindenden geraden Linie parallel gezogenen geraden Linie sind, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\text{tang}\,D = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\text{tang}\,A = \frac{y_1}{x_1}$$

ist,

Digitized by Google

$$\text{tang } D = \pm \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

das Zeichen so genommen, dass tang $D$ mit $z_1$ einerlei Vorzeichen erhält. Nun überzeugt man sich aber durch eine ganz einfache Betrachtung sehr leicht, dass unter den gemachten Voraussetzungen $x_1$ und cos $A$ immer gleiche Vorzeichen haben, und folglich in völliger Allgemeinheit

$$\text{tang } D = \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

also nach 28.

$$31.\quad \text{tang } D = \frac{r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1}{r \cos\varphi \cos 15T - r_1 \cos\varphi_1 \cos 15T_1} \cos A$$

zu setzen ist.

Nach 29. und 31. ist nun

$$r \cos\varphi \sin 15T - r_1 \cos\varphi_1 \sin 15T_1$$
$$= (r \cos\varphi \cos 15T - r_1 \cos\varphi_1 \cos 15T_1) \text{ tang } A,$$

$$r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1 = (r \cos\varphi \cos 15T - r_1 \cos\varphi_1 \cos 15T_1) \sec A \text{ tang } D;$$

und folglich nach 24.

$$\sin(\alpha - \alpha_1) \sec A \text{ tang } D = \sin\alpha \text{ tang } \delta_1 - \sin\alpha_1 \text{ tang } \delta$$
$$- (\cos\alpha \text{ tang } \delta_1 - \cos\alpha_1 \text{ tang } \delta) \text{ tang } A,$$

oder, wie man hieraus leicht findet,

$$32.\quad \sin(\alpha - \alpha_1) \text{ tang } D = \sin(\alpha - A) \text{ tang } \delta_1 - \sin(\alpha_1 - A) \text{ tang } \delta$$

oder

$$33.\quad \sin(\alpha_1 - A) \text{ tang } \delta - \sin(\alpha - A) \text{ tang } \delta_1 + \sin(\alpha - \alpha_1) \text{ tang } D = 0.$$

Auf diesen Ausdruck hat zuerst Bessel die Bedingungsgleichung für das Schneiden zweier Gesichtslinien gebracht.

## §. 4.

Wenn die Beobachtungen für zwei Beobachtungsorte gleichzeitig sind und die Bedingungsgleichung 23. erfüllt ist, so wird man die Beobachtungen als einem und demselben Punkte der Bahn einer und derselben Sternschnuppe entsprechend betrachten können, und sich nun die Aufgabe vorlegen, die Lage dieses Punktes im Raume zu bestimmen, welches die Ansicht ist, von welcher Olbers *) bei seiner Auflösung des Sternschnuppen-Problems ausgegangen ist, und die auch wir, weil sie in der That die einfachste ist, von welcher man ausgehen kann, hier zuerst verfolgen wollen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir unter den gemachten Voraussetzungen das System der $x_1 y_1 z_1$ zum Grunde legen können. Bezeichnen nun $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn; so haben wir nach 10. zwischen denselben die folgenden Gleichungen:

---

*) Benzenberg über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen. Hamburg. 1802. — Gehler physikalisches Wörterbuch. Neue Ausg. Art. Feuerkugel. S. 211.

Digitized by Google

$$x_1 = z_1 \cos\alpha \cot\delta + r(\cos\varphi \cos 15T - \cos\alpha \cot\delta \sin\varphi),$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha \cot\delta + r(\cos\varphi \sin 15T - \sin\alpha \cot\delta \sin\varphi)$$

und

$$x_1 = z_1 \cos\alpha_1 \cot\delta_1 + r_1(\cos\varphi_1 \cos 15T_1 - \cos\alpha_1 \cot\delta_1 \sin\varphi_1),$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha_1 \cot\delta_1 + r_1(\cos\varphi_1 \sin 15T_1 - \sin\alpha_1 \cot\delta_1 \sin\varphi_1);$$

wobei wohl kaum besonders bemerkt zu werden braucht, dass sich das eine dieser beiden Systeme von Gleichungen auf den einen, das andere auf den andern der beiden Beobachtungsorte bezieht.

Aus der ersten und zweiten und aus der dritten und vierten dieser vier Gleichungen erhält man durch Elimination von $z_1$

$$x_1 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha = r\cos\varphi \sin(\alpha - 15T),$$
$$x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1 = r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1);$$

und folglich

$$x_1 \sin(\alpha - \alpha_1) = r\cos\varphi\cos\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1),$$
$$y_1 \sin(\alpha - \alpha_1) = r\cos\varphi\sin\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1);$$

also

$$34.\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r\cos\varphi\cos\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}, \\ y_1 = \dfrac{r\cos\varphi\sin\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}. \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten und aus der zweiten und vierten Gleichung erhält man durch Elimination von $x_1$ und $y_1$ für $z_1$ sehr leicht die beiden folgenden Ausdrücke:

$$35.\quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{r(\cos\varphi\cos 15T - \cos\alpha\cot\delta\sin\varphi) - r_1(\cos\varphi_1\cos 15T_1 - \cos\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1)}{\cos\alpha\cot\delta - \cos\alpha_1\cot\delta_1}, \\ z_1 = -\dfrac{r(\cos\varphi\sin 15T - \sin\alpha\cot\delta\sin\varphi) - r_1(\cos\varphi_1\sin 15T_1 - \sin\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1)}{\sin\alpha\cot\delta - \sin\alpha_1\cot\delta_1}. \end{cases}$$

Man kann aber für $z_1$ noch andere Ausdrücke finden. Aus der ersten und zweiten, und aus der dritten und vierten Gleichung erhält man nämlich leicht

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = z_1\cot\delta + r\{\cos\varphi\cos(\alpha - 15T) - \sin\varphi\cot\delta\},$$
$$x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 = z_1\cot\delta_1 + r_1\{\cos\varphi_1\cos(\alpha_1 - 15T_1) - \sin\varphi_1\cot\delta_1\}$$

oder

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = (z_1 - r\sin\varphi)\cot\delta + r\cos\varphi\cos(\alpha - 15T),$$
$$x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 = (z_1 - r_1\sin\varphi_1)\cot\delta_1 + r_1\cos\varphi_1\cos(\alpha_1 - 15T_1).$$

Nach 34. ist aber, wie man leicht findet,

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = \frac{r\cos\varphi\cos(\alpha - \alpha_1)\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 = \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\cos(\alpha - \alpha_1)\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)};$$

und folglich nach dem Obigen

Digitized by Google

$$36.\quad \begin{cases} x_1 = r\sin\varphi + \dfrac{r\cos\varphi\,\sin(\alpha_1 - 15T) - r_1\cos\varphi_1\,\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\vartheta}, \\ z_1 = r_1\sin\varphi_1 + \dfrac{r\cos\varphi\,\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\,\sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\vartheta_1}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die dem Moment der Beobachtungen entsprechende Sternzeit des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem beobachteten Punkte der Sternschnuppen-Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch $T'$, und setzen der Kürze wegen $A = 15T'$, so ist, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$37.\quad \text{tang}\, A = \frac{y_1}{x_1},$$

mit der Bestimmung, dass in dem Falle, wo $x_1$ und $y_1$ gleiche Vorzeichen haben, $A$ zwischen 0 und 90° oder zwischen 180° und 270° genommen werden muss, jenachdem die Grössen $x_1$, $y_1$ beide positiv oder beide negativ sind; dass dagegen in dem Falle, wo $x_1$ und $y_1$ ungleiche Vorzeichen haben, $A$ zwischen 90° und 180° oder zwischen 270° und 360° genommen werden muss, jenachdem $x_1$ negativ und $y_1$ positiv, oder $x_1$ positiv und $y_1$ negativ ist.

Bezeichnen wir die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche in Bezug auf den einen der beiden Beobachtungsorte, welchem die Sternzeit $T$ entsprechen mag, als Anfang der Längen durch $L'$; so ist offenbar

$$L' = 15(T' - T) \text{ oder } L' = 360° + 15(T' - T),$$

jenachdem $T' - T$ positiv oder negativ ist, und die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche ist nun, wenn $L$ die geographische Länge des Beobachtungsortes, welchem die Sternzeit $T$ entspricht, bezeichnet,

$$L + L' \text{ oder } L + L' - 360°,$$

jenachdem $L + L'$ kleiner oder grösser als 360° ist. Dass man hier an die Stelle des Beobachtungsorts, welchem die Sternzeit $T$ entspricht, auch den Beobachtungsort, welchem die Sternzeit $T_1$ entspricht, setzen kann, versteht sich von selbst.

Nach 34. und 37. ist

$$38.\quad \text{tang}\, A = \frac{r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1 - 15T_1)},$$

woraus leicht die Gleichung

$$39.\quad r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T)\sin(\alpha_1 - A) = r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)\sin(\alpha - A)$$

oder

$$40.\quad \begin{cases} \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{\cos\varphi_1\,\sin(\alpha_1 - 15T_1)\,\sin(\alpha - A)}{\cos\varphi\,\sin(\alpha - 15T)\,\sin(\alpha_1 - A)}, \\ \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{\cos\varphi\,\sin(\alpha - 15T)\,\sin(\alpha_1 - A)}{\cos\varphi_1\,\sin(\alpha_1 - 15T_1)\,\sin(\alpha - A)} \end{cases}$$

erhalten wird. Also ist

Digitized by Google

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r}\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)$$
$$= \cos\varphi \frac{\sin(\alpha_1 - 15T)\sin(\alpha - A) - \sin(\alpha - 15T)\sin(\alpha_1 - A)}{\sin(\alpha - A)},$$

$$\frac{r}{r_1}\cos\varphi \sin(\alpha - 15T) - \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1)$$
$$= \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha_1 - 15T_1)\sin(\alpha - A) - \sin(\alpha - 15T_1)\sin(\alpha_1 - A)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

oder, wie man leicht findet,

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r}\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1) = \cos\varphi \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)\sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)},$$

$$\frac{r}{r_1}\cos\varphi \sin(\alpha - 15T) - \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1) = \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)\sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

und folglich nach 36.

$$40. \begin{cases} z_1 = r \dfrac{\sin\varphi \sin(\alpha - A) + \cos\varphi \operatorname{tang}\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \\ z_1 = r_1 \dfrac{\sin\varphi_1 \sin(\alpha_1 - A) + \cos\varphi_1 \operatorname{tang}\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)}. \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel $\psi$ und $\psi_1$ mittelst der Formeln

$$42. \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad \operatorname{tang}\psi_1 = \frac{\operatorname{tang}\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

so ist

$$43. \quad z_1 = r \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}, \quad z_1 = r_1 \frac{\sin(\varphi_1 + \psi_1)}{\cos\psi_1}.$$

Mittelst der Gleichungen 34. und 40. erhält man auch leicht

$$44. \quad x_1 = r \frac{\cos\varphi \cos A \sin(\alpha - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad x_1 = r_1 \frac{\cos\varphi_1 \cos A \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)}$$

und

$$45. \quad y_1 = r \frac{\cos\varphi \sin A \sin(\alpha - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad y_1 = r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin A \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

also

$$46. \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2 \frac{\cos\varphi^2 \sin(\alpha - 15T)^2}{\sin(\alpha - A)^2} = r_1^2 \frac{\cos\varphi_1^2 \sin(\alpha_1 - 15T_1)^2}{\sin(\alpha_1 - A)^2}.$$

Bezeichnen wir die geocentrische Breite des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem beobachteten Punkte der Sternschnuppen-Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch $B$; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$47. \quad \operatorname{tang} B = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

d. i. nach 41. und 46.

$$48. \begin{cases} \operatorname{tang} B = \pm \dfrac{\operatorname{tang}\varphi \sin(\alpha - A) + \operatorname{tang}\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - 15T)}, \\ \operatorname{tang} B = \pm \dfrac{\operatorname{tang}\varphi_1 \sin(\alpha_1 - A) + \operatorname{tang}\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - 15T_1)}; \end{cases}$$

Digitized by Google

das Zeichen jederzeit so genommen, dass tang $B$ mit $z_1$ einerlei Vorzeichen erhält, d. h. so, dass tang $B$ positiv oder negativ wird, jenachdem die Grössen

$\sin(\alpha-A)$ und $\sin\varphi\,\sin(\alpha-A)+\cos\varphi\,\tang\delta\,\sin(A-15T)$

oder

$\sin(\alpha_1-A)$ und $\sin\varphi_1\,\sin(\alpha_1-A)+\cos\varphi_1\,\tang\delta_1\,\sin(A-15T_1)$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Auch ist

$$\tang B=\pm\frac{z_1}{x_1\sqrt{1+\tang A^2}}=\pm\frac{z_1}{x_1}\cos A,$$

das Zeichen so genommen, dass tang $B$ mit $z_1$ einerlei Vorzeichen erhält. Nun erhellet aber leicht, dass $x_1$ und $\cos A$ jederzeit gleiche Vorzeichen haben. Folglich ist in völliger Allgemeinheit

$$49.\quad \tang B=\frac{z_1}{x_1}\cos A.$$

Bezeichnet man durch $E$ und $E_1$ die Entfernungen des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn von den beiden Beobachtungsorten; so ist

$$E=\sqrt{(x_1-r\cos\varphi\cos 15T)^2+(y_1-r\cos\varphi\sin 15T)^2+(z_1-r\sin\varphi)^2},$$
$$E_1=\sqrt{(x_1-r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1)^2+(y_1-r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1)^2+(z_1-r_1\sin\varphi_1)^2};$$

und folglich, weil nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$x_1-r\cos\varphi\cos 15T=\cos\alpha\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$
$$y_1-r\cos\varphi\sin 15T=\sin\alpha\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$
$$z_1-r\sin\varphi=\tang\delta\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)}$$

und

$$x_1-r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1=\cos\alpha_1\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$
$$y_1-r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1=\sin\alpha_1\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$
$$z_1-r_1\sin\varphi_1=\tang\delta_1\,\frac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)}$$

ist,

$$50.\quad\begin{cases}E=\pm\dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cos\delta},\\[2ex] E_1=\pm\dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T)-r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cos\delta_1};\end{cases}$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden. Mittelst dieser Formeln erhält man ferner, weil nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r}\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1) = \cos\varphi \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)},$$

$$\frac{r}{r_1}\cos\varphi \sin(\alpha-15T) - \cos\varphi_1 \sin(\alpha-15T_1) = \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)}$$

ist, leicht

51. $$E = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(A-15T)}{\cos\delta \sin(\alpha-A)},\quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(A-15T_1)}{\cos\delta_1 \sin(\alpha_1-A)},$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Bezeichnen wir die Entfernung des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn vom Mittelpunkte der Erde durch $R$; so ist offenbar

$$R\cos B = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\quad R = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\cos B},$$

und folglich nach 46.

52. $$R = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(\alpha-15T)}{\cos B \sin(\alpha-A)},\quad R = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1-15T_1)}{\cos B \sin(\alpha_1-A)},$$

die Vorzeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Man hat also jetzt zur Berechnung aller auf die Lage des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn im Raume Bezug habenden Grössen die folgenden Formeln:

$$\text{tang } A = \frac{r\cos\varphi \sin\alpha_1 \sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1 \sin\alpha \sin(\alpha_1-15T_1)}{r\cos\varphi \cos\alpha_1 \sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1 \cos\alpha \sin(\alpha_1-15T_1)},$$

$$x_1 = r\frac{\cos\varphi \cos A \sin(\alpha-15T)}{\sin(\alpha-A)} = r_1\frac{\cos\varphi_1 \cos A \sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$y_1 = r\frac{\cos\varphi \sin A \sin(\alpha-15T)}{\sin(\alpha-A)} = r_1\frac{\cos\varphi_1 \sin A \sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$\text{tang } \psi = \frac{\text{tang}\,\delta \sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)},\quad \text{tang } \psi_1 = \frac{\text{tang}\,\delta_1 \sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$z_1 = r\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = r_1\frac{\sin(\varphi_1+\psi_1)}{\cos\psi_1},$$

$$\text{tang } B = \frac{z_1}{x_1}\cos A,$$

$$E = \pm r\frac{\cos\varphi \sin(A-15T)}{\cos\delta \sin(\alpha-A)},\quad E_1 = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1 \sin(A-15T_1)}{\cos\delta_1 \sin(\alpha_1-A)},$$

$$R = \pm r\frac{\cos\varphi \sin(\alpha-15T)}{\cos B \sin(\alpha-A)} = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1-15T_1)}{\cos B \sin(\alpha_1-A)};$$

in den Ausdrücken für $E$, $E_1$, $R$ die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Den Ausdrücken von $E$ und $E_1$ kann man auch die folgende Gestalt geben:

Digitized by Google

$$E = \pm r \frac{\cos\varphi \operatorname{tang}\psi}{\sin\delta}, \quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \operatorname{tang}\psi_1}{\sin\delta_1}.$$

Verlangt man die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ nicht zu kennen, so stellt man die Formeln am besten unter der folgenden Gestalt dar:

$$\operatorname{tang} A = \frac{r\cos\varphi \sin\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1 \cos\varphi_1 \sin\alpha \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{r\cos\varphi \cos\alpha_1 \sin(\alpha - 15T) - r_1 \cos\varphi_1 \cos\alpha \sin(\alpha_1 - 15T_1)},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad \operatorname{tang}\psi_1 = \frac{\operatorname{tang}\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)},$$

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{\sin(\alpha - A)\sin(\varphi + \psi)}{\cos\varphi \cos\psi \sin(\alpha - 15T)} = \pm \frac{\sin(\alpha_1 - A)\sin(\varphi_1 + \psi_1)}{\cos\varphi_1 \cos\psi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)},$$

$$E = \pm r \frac{\cos\varphi \operatorname{tang}\psi}{\sin\delta}, \quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \operatorname{tang}\psi_1}{\sin\delta_1},$$

$$R = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(\alpha - 15T)}{\cos B \sin(\alpha - A)} = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\cos B \sin(\alpha_1 - A)}.$$

In den Ausdrücken von tang $B$ müssen die Zeichen so genommen werden, dass tang $B$ positiv oder negativ wird, jenachdem die Grössen cos $\psi$, sin $(\varphi + \psi)$ oder cos $\psi_1$, sin $(\varphi_1 + \psi_1)$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Ohne Schwierigkeit kann man auch nach den folgenden sich leicht aus dem Obigen ergebenden Formeln rechnen:

$$n = \frac{r\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$x_1 = n\cos\alpha + r\cos\varphi\cos 15T,$$

$$y_1 = n\sin\alpha + r\cos\varphi\sin 15T,$$

$$z_1 = n\operatorname{tang}\delta + r\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{z_1}{x_1}\cos A,$$

$$E = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(A - 15T)}{\cos\delta \sin(\alpha - A)},$$

$$E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(A - 15T_1)}{\cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - A)},$$

$$R = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(\alpha - 15T)}{\cos B \sin(\alpha - A)};$$

oder auch nach den folgenden Formeln:

$$n_1 = \frac{r\cos\varphi \sin(\alpha - 15T) - r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$x_1 = n_1\cos\alpha_1 + r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1,$$

$$y_1 = n_1\sin\alpha_1 + r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1,$$

$$z_1 = n_1\operatorname{tang}\delta_1 + r_1\sin\varphi_1,$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{y_1}{x_1},$$

Digitized by Google

$$\text{tang } B = \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

$$E = \pm r \frac{\cos \varphi \sin (A - 15T)}{\cos \delta \sin (\alpha - A)},$$

$$E_1 = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (A - 15T_1)}{\cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - A)},$$

$$R = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (\alpha_1 - 15T_1)}{\cos B \sin (\alpha_1 - A)}.$$

Die Vorzeichen in den Ausdrücken von $E$, $E_1$, $R$ müssen immer so genommen werden, dass die in Rede stehenden Grössen positiv werden.

## §. 5.

Auch bei Beobachtungen, die sich als gleichzeitig erwiesen haben, wird wohl fast nie der Fall eintreten, dass die Bedingungsgleichung 23. genau erfüllt ist, sondern dies wird immer nur näherungsweise Statt finden. Dadurch ist Brandes *) veranlasst worden, bei der Auflösung unserer Aufgabe von einer andern Ansicht auszugehen, indem er nämlich auf den beiden Gesichtslinien die beiden Punkte bestimmt, deren Entfernung von einander ein Minimum ist, und in der Grösse dieser Entfernung zugleich ein Kriterium für die Genauigkeit der Beobachtungen findet.

Die Gleichungen der beiden Gesichtslinien in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$, welches wir hier wieder zum Grunde legen können, sind nach 10.

$$x_1 = z_1 \cos \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \cos 15T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$
$$y_1 = z_1 \sin \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \sin 15T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi)$$

und

$$x_1 = z_1 \cos \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$
$$y_1 = z_1 \sin \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1).$$

Die Coordinaten der beiden Punkte dieser Linien, deren Abstand von einander ein Minimum ist, seien respective $X$, $Y$, $Z$ und $X'$, $Y'$, $Z'$, und der Abstand dieser beiden Punkte von einander sei $S$; so hat man die folgenden fünf Gleichungen:

$$53. \begin{cases} X = Z \cos \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \cos 15T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi), \\ Y = Z \sin \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \sin 15T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi); \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} X' = Z' \cos \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1), \\ Y' = Z' \sin \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1); \end{cases}$$

$$55. \quad S^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2.$$

*) Brandes Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie. Leipzig, 1826. Heft 1. Die von mir im Folgenden entwickelten Formeln dürften übrigens vor den von Brandes gegebenen Formeln wesentliche Vorzüge haben, so wie denn überhaupt die von mir angewandte Analysis von der sich im Geiste der ältern geometrischen Analysis haltenden Methode von Brandes ganz verschieden ist.



Digitized by Google

Nach den Bedingungen der Aufgabe müssen $X$, $Y$, $Z$ und $X'$, $Y'$, $Z'$ so bestimmt worden, dass $S$ ein Minimum wird. Man kann aber offenbar $S$ als eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $Z$ und $Z'$ betrachten, und hat also nach den Principien der Differentialrechnung die beiden folgenden Gleichungen:

$$56. \quad \left(\frac{dS}{dZ}\right)=0, \quad \left(\frac{dS}{dZ'}\right)=0,$$

wo die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind. Aus der Gleichung 55. erhält man aber, indem man nur überlegt, dass $X$ und $Y$ bloss von $Z$, $X'$ und $Y'$ bloss von $Z'$ abhängen, sogleich

$$S\left(\frac{dS}{dZ}\right)=(X-X')\frac{dX}{dZ}+(Y-Y')\frac{dY}{dZ}+Z-Z',$$

$$-S\left(\frac{dS}{dZ'}\right)=(X-X')\frac{dX'}{dZ'}+(Y-Y')\frac{dY'}{dZ'}+Z-Z';$$

und hat also nach 56. die beiden folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(X-X')\frac{dX}{dZ}+(Y-Y')\frac{dY}{dZ}+Z-Z'=0,$$

$$(X-X')\frac{dX'}{dZ'}+(Y-Y')\frac{dY'}{dZ'}+Z-Z'=0.$$

Nach 53. und 54. ist aber

$$\frac{dX}{dZ}=\cos\alpha\cot\delta,\ \frac{dY}{dZ}=\sin\alpha\cot\delta;$$

$$\frac{dX'}{dZ'}=\cos\alpha_1\cot\delta_1,\ \frac{dY'}{dZ'}=\sin\alpha_1\cot\delta_1;$$

und folglich

$$57. \begin{cases}(X-X')\cos\alpha\cot\delta+(Y-Y')\sin\alpha\cot\delta+Z-Z'=0,\\ (X-X')\cos\alpha_1\cot\delta_1+(Y-Y')\sin\alpha_1\cot\delta_1+Z-Z'=0;\end{cases}$$

oder

$$58. \begin{cases}(X-X')\cos\alpha+(Y-Y')\sin\alpha+(Z-Z')\operatorname{tang}\delta=0,\\ (X-X')\cos\alpha_1+(Y-Y')\sin\alpha_1+(Z-Z')\operatorname{tang}\delta_1=0.\end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und den vier Gleichungen 53. und 54. sind die sechs Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ und $X'$, $Y'$, $Z'$ zu bestimmen.

Aus den Gleichungen 57. erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$(X-X')(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)+(Y-Y')(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)=0$$

und

$$(X-X')\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1+(Z-Z')(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)=0,$$

$$(Y-Y')\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1-(Z-Z')(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)=0;$$

also

Digitized by Google

59. $$\frac{Y-Y'}{X-X'}=-\frac{\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1}{\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1}=-\frac{\cos\alpha\tang\delta_1-\cos\alpha_1\tang\delta}{\sin\alpha\tang\delta_1-\sin\alpha_1\tang\delta}$$

und

60. $$\begin{cases} X-X'=-\dfrac{\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1}(Z-Z'), \\ Y-Y'=\dfrac{\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1}(Z-Z') \end{cases}$$

oder

61. $$\begin{cases} X-X'=-\dfrac{\sin\alpha\tang\delta_1-\sin\alpha_1\tang\delta}{\sin(\alpha-\alpha_1)}(Z-Z'), \\ Y-Y'=\dfrac{\cos\alpha\tang\delta_1-\cos\alpha_1\tang\delta}{\sin(\alpha-\alpha_1)}(Z-Z'). \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen

62. $$\begin{cases} A=r(\cos\varphi\cos 15T-\cos\alpha\cot\delta\sin\varphi), \\ A_1=r_1(\cos\varphi_1\cos 15T_1-\cos\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1) \end{cases}$$

und

63. $$\begin{cases} B=r(\cos\varphi\sin 15T-\sin\alpha\cot\delta\sin\varphi) \\ B_1=r_1(\cos\varphi_1\sin 15T_1-\sin\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1); \end{cases}$$

so ist nach 53. und 54.

64. $X=Z\cos\alpha\cot\delta+A$, $Y=Z\sin\alpha\cot\delta+B$,

65. $X'=Z'\cos\alpha_1\cot\delta_1+A_1$, $Y'=Z'\sin\alpha_1\cot\delta_1+B_1$

und folglich

$$X-X'=A-A_1+Z\cos\alpha\cot\delta-Z'\cos\alpha_1\cot\delta_1,$$
$$Y-Y'=B-B_1+Z\sin\alpha\cot\delta-Z'\sin\alpha_1\cot\delta_1.$$

Führt man dies in die Gleichungen 57. ein, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen zwischen $Z$ und $Z'$:

$$\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}\cot\delta+Z\operatorname{cosec}\delta^2 - Z'\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}=0,$$
$$\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}\cot\delta_1-Z'\operatorname{cosec}\delta_1^2 + Z\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}=0;$$

aus denen sich auf dem Wege der gewöhnlichen Elimination ferner die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

66. $$\cot\delta\operatorname{cosec}\delta_1^2\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\} -\cot\delta_1\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\} =-Z\{\operatorname{cosec}\delta^2\operatorname{cosec}\delta_1^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\},$$

67. $$\cot\delta_1\operatorname{cosec}\delta^2\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\} -\cot\delta\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\} =Z'\{\operatorname{cosec}\delta^2\operatorname{cosec}\delta_1^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Addition und Subtraction



Digitized by Google

68. $\cot\delta\cot\delta_1\{\cot\delta_1-\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$
$+\cot\delta\cot\delta_1\{\cot\delta-\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$
$=-(Z-Z')\ \{\operatorname{cosec}\delta^2\ \operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\ \cot\delta\ \cot\delta_1)^2\}$,

69. $\cot\delta\ \{1+\operatorname{cosec}\delta_1{}^2+\cos(\alpha-\alpha_1)\ \cot\delta\ \cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha$
$+(B-B_1)\sin\alpha\}$
$-\cot\delta_1\ \{1+\operatorname{cosec}\delta^2+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1$
$+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$
$=-(Z+Z')\ \{\operatorname{cosec}\delta^2\ \operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\}$;

oder, wenn man auf beiden Seiten der vorhergehenden und dieser Gleichungen mit $\sin\delta^2\sin\delta_1{}^2$ multiplicirt:

70. $-Z\ \{1-(\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$
$=\sin\delta\cos\delta\ \{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$
$-\sin\delta\cos\delta_1\ \{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1$
$+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$,

71. $Z'\ \{1-(\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$
$=\sin\delta_1\cos\delta_1\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$
$-\cos\delta\sin\delta_1\ \{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha$
$+(B-B_1)\sin\alpha\}$

und

72. $-(Z-Z')\ \{1-(\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$
$=\cos\delta\cos\delta_1\ \{\sin\delta\cos\delta_1-\cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha$
$+(B-B_1)\sin\alpha\}$
$+\cos\delta\cos\delta_1\ \{\cos\delta\sin\delta_1-\sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1$
$+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$,

73. $-(Z+Z')\ \{1-(\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$
$=\cos\delta\ \{\sin\delta+\sin\delta_1\ (\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))\}$
$\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$
$-\cos\delta_1\ \{\sin\delta_1+\sin\delta\ (\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1))\}$
$\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$.

Nach 61. ist

$$(X-X')^2+(Y-Y')^2=\frac{\operatorname{tang}\delta^2+\operatorname{tang}\delta_1{}^2-2\operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)^2}(Z-Z')^2,$$

und folglich nach 55., wie man leicht findet,

$$S^2=\frac{1-\{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}^2}{\cos\delta^2\cos\delta_1{}^2\sin(\alpha-\alpha_1)^2}(Z-Z')^2,$$

oder

74. $$S=\pm(Z-Z')\frac{\sqrt{1-\{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}^2}}{\cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)},$$

das Zeichen immer so genommen, dass $S$ positiv wird.

Wir haben nun alle zur Berechnung von $X$, $Y$, $Z$ und

Digitized by Google

$X'$, $Y'$, $Z'$ und $S$ nöthigen Formeln. Durch Einführung zweier Hülfswinkel kann man sich jedoch die Rechnung noch bedeutend erleichtern. Weil nämlich

$$\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)$$
$$=\sin\delta\{\sin\delta_1+\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\}$$

ist; so ist, wenn man

$$75.\quad \cot\xi=\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta$$

setzt,

$$76.\quad \sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)=\frac{\sin\delta}{\sin\xi}\cos(\delta_1-\xi).$$

Auf folgende Art kann aber leicht gezeigt werden, dass überhaupt der absolute Werth von

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

nie grösser als die Einheit ist, was auch $a$, $b$, $C$ sein mögen.

Sowohl der absolute Werth von $\cos a\cos b$, als auch der absolute Werth von $\sin a\sin b\cos C$ ist niemals grösser als die Einheit.

Haben also die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ entgegengesetzte Vorzeichen, so ist offenbar der absolute Werth von

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

nicht grösser als die Einheit.

Haben aber die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ gleiche Vorzeichen, so seien dieselben zuerst beide positiv. Dann ist offenbar, wenn $\sin a\sin b$ positiv ist,

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\leqq\cos a\cos b+\sin a\sin b,$$

d. i.

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\leqq\cos(a-b),$$

woraus das zu Beweisende folgt. Wenn aber $\sin a\sin b$ negativ ist, so ist offenbar

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\leqq\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

d. i.

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\leqq\cos(a+b),$$

woraus wieder das zu Beweisende folgt.

Wenn ferner die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ beide negativ sind; so sind die Grössen $\cos(180°+a)\cos b$ und $\sin(180°+a)\sin b\cos C$ beide positiv, und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\cos(180°+a)\cos b+\sin(180°+a)\sin b\cos C\leqq 1,$$

d. i.

$$-\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos C\leqq 1.$$

Es ist aber

Digitized by Google

$$-\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C$$

der absolute Werth von

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

und hierdurch folglich auch in diesem Falle unser Satz bewiesen, so dass derselbe also jetzt allgemein bewiesen ist.

Dass auch der absolute Werth von

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C$$

niemals grösser als die Einheit ist, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, wenn man, was verstattet ist, $-a$ für $a$ setzt.

Dass auch der absolute Werth von

$$\sin a \sin b \pm \cos a \cos b \cos C$$

niemals grösser als die Einheit ist, folgt aus dem Vorhergehenden sogleich, wenn man für $a$ und $b$ respective $90° - a$ und $90° - b$ setzt.

Weil also hiernach der absolute Werth von

$$\sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) = \frac{\sin \delta}{\sin \xi} \cos (\delta_1 - \xi)$$

nicht grösser als die Einheit ist, so kann man den Hülfswinkel $\psi$ mittelst der Formel

$$77. \quad \cos \psi = \frac{\sin \delta}{\sin \xi} \cos (\delta_1 - \xi)$$

berechnen.

Alles dieses vorausgesetzt, haben wir nur zur Berechnung der gesuchten Grössen die folgenden aus dem Obigen sich leicht ergebenden Formeln:

$$A = r (\cos \varphi \cos 15T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$
$$B = r (\cos \varphi \sin 15T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$
$$A_1 = r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$
$$B_1 = r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$
$$K = (A - A_1) \cos \alpha + (B - B_1) \sin \alpha,$$
$$K_1 = (A - A_1) \cos \alpha_1 + (B - B_1) \sin \alpha_1,$$
$$-Z \sin \psi^2 = \sin \delta (K \cos \delta - K_1 \cos \delta_1 \cos \psi),$$
$$Z' \sin \psi^2 = \sin \delta_1 (K_1 \cos \delta_1 - K \cos \delta \cos \psi),$$
$$X = A + Z \cos \alpha \cot \delta, \quad Y = B + Z \sin \alpha \cot \delta;$$
$$X' = A_1 + Z' \cos \alpha_1 \cot \delta_1, \quad Y' = B_1 + Z' \sin \alpha_1 \cot \delta_1;$$
$$S = \pm \frac{(Z - Z') \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1)};$$

wo in der letzten Formel das Zeichen immer so genommen werden muss, dass $S$ positiv wird.

Was man nun noch zu wissen verlangt, lässt sich mittelst der durch die vorhergehenden Formeln bekannt gewordenen Grössen mit Hülfe der bekannten Formeln der analytischen Geometrie immer ohne Schwierigkeit finden. Bezeichnen wir nämlich z. B. durch $L$ und $L'$ die geocentrischen Breiten der Punkte der Erd-

Digitized by Google

oberfläche, in denen dieselbe von den von dem Mittelpunkte der Erde nach den Punkten $(XYZ)$ und $X'Y'Z'$) gezogenen geraden Linien geschnitten wird, und durch $R$ und $R'$ die Entfernungen der Punkte $(XYZ)$ und $(X'Y'Z')$ vom Mittelpunkte der Erde; so ist

$$78.\quad \text{tang } L = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}},\ \text{tang } L' = \frac{Z'}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}$$

und

$$79.\quad R = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos L},\ R' = \frac{\sqrt{X'^2+Y'^2}}{\cos L'},$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$80.\quad R = \frac{Z}{\sin L},\ R' = \frac{Z'}{\sin L'}.$$

Um sich die Berechnung von $L$ und $L'$ mittelst der Formeln 78. zu erleichtern, berechne man zwei Hülfswinkel $\Theta$ und $\Theta'$ mittelst der Formeln

$$81.\quad \text{tang } \Theta = \frac{Y}{X},\ \text{tang } \Theta' = \frac{Y'}{X'};$$

dann ist

$$82.\quad \text{tang } L = \pm\frac{Z}{X}\cos\Theta,\ \text{tang } L' = \pm\frac{Z'}{X'}\cos\Theta',$$

wo die Zeichen immer so zu nehmen sind, dass tang $L$ und tang $L'$ respective mit $Z$ und $Z'$ gleiche Vorzeichen erhalten.

Sind $E$ und $E'_1$ die Entfernungen der Punkte $(XYZ)$ und $(X'Y'Z')$ von den beiden Beobachtungsorten, deren geocentrische Breiten $\varphi$ und $\varphi_1$ sind; so ist

$$E = \sqrt{(X - r\cos\varphi\cos 15T)^2 + (Y - r\cos\varphi\sin 15T)^2 + (Z - r\sin\varphi)^2},$$

$$E_1' = \sqrt{(X' - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1)^2 + (Y' - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1)^2 + (Z' - r_1\sin\varphi_1)^2};$$

und folglich, wie man mittelst des Obigen leicht findet,

$$83.\quad E = \pm\frac{Z - r\sin\varphi}{\sin\delta},\ E_1' = \pm\frac{Z' - r_1\sin\varphi_1}{\sin\delta_1},$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen $E$ und $E_1'$ positiv werden.

## §. 6.

In neuester Zeit haben Quetelet*) und Bessel**) eine andere Berechnungsart der Sternschnuppen in Vorschlag gebracht, bei

---

*) Correspondance mathém. et physique publiée par A. Quetelet. Tom. IX. Bruxelles. 1837. p. 189. Uebrigens ist die folgende Analysis nebst den Formeln von der Herrn Quetelets ganz verschieden.

**) Schumachers astronomische Nachrichten. Band XVI. Altona. 1839. S. 321. Ueber diese wichtige Abhandlung wird späterhin, wie schon oben erwähnt worden ist, eine ausführliche Relation in dem Archive geliefert werden. Hier mag nur erwähnt werden, dass sich Bessel durchaus bloss der sphärischen Trigonometrie auf eine äusserst elegante Weise bedient, und zu höchst eleganten Formeln gelangt.

Digitized by Google

welcher angenommen wird, dass die Bahn einer Sternschnuppe während der immer nur sehr kurzen Dauer ihrer Sichtbarkeit eine gerade Linie ist. Zugleich setzt diese Berechnungsart voraus, dass an jedem der beiden Beobachtungsorte sowohl der Punkt des Entstehens, als auch der Punkt des Erlöschens der Sternschnuppe beobachtet worden ist, so dass man also an jedem der beiden Beobachtungsorte die Rectascension und Declination dieser beiden Punkte erhält. Die immer sehr kleine Zwischenzeit zwischen dem Entstehen und Erlöschen wird unberücksichtigt gelassen oder als verschwindend betrachtet, und daher die Erde während der ganzen Dauer des Phänomens als ruhend im Raume angenommen, weshalb wir also auch jetzt das Coordinatensystem der $x, y, z$, werden zum Grunde legen können. Durch jeden Beobachtungsort und die beiden von demselben nach der Sternschnuppen-Bahn gezogenen Gesichtslinien wird eine Ebene gelegt, und die Sternschnuppen-Bahn als die Durchschnittslinie der beiden auf diese Weise erhaltenen Ebenen betrachtet. Diese Berechnungsart hat offenbar den Vortheil, dass bei ihr nicht angenommen wird, dass die Sternschnuppe von beiden Beobachtern gleichzeitig entstehend und gleichzeitig erlöschend gesehen wird, eine Annahme, die allerdings nur unter der Voraussetzung eines ganz plötzlichen Entstehens und Erlöschens der Sternschnuppen zulässig ist, gegen deren Richtigkeit namentlich Bessel sehr gegründete Zweifel erhoben, und eben deshalb die vorher in kurzen Umrissen dargelegte neue Berechnungsart in Vorschlag gebracht hat, die allerdings auch geometrisch genau ist, insofern man die Bahnen der Sternschnuppen während der Dauer ihrer Sichtbarkeit als geradlinig und die Zwischenzeit zwischen den Momenten des Entstehens und Erlöschens als verschwindend, die Erde also während dieser Zeit als ruhend im Raume betrachten darf.

Indem wir nun den so eben in der Kürze vorgezeichneten Weg etwas weiter verfolgen wollen, bezeichnen wir, alle übrigen im Vorhergehenden gebrauchten Symbole auch jetzt beibehaltend, die Rectascension und Declination der Punkte des Entstehens und Erlöschens an dem einen Beobachtungsorte durch $\alpha$, $\delta$ und $\alpha'$, $\delta'$, an dem andern Beobachtungsorte durch $\alpha_1$, $\delta_1$ und $\alpha_1'$, $\delta_1'$.

Fassen wir zunächst bloss den ersten Beobachtungsort in's Auge und setzen der Kürze wegen

$$84.\quad \begin{cases} A = r\,(\cos\varphi\,\cos 15T - \cos\alpha\,\cot\delta\,\sin\varphi), \\ B = r\,(\cos\varphi\,\sin 15T - \sin\alpha\,\cot\delta\,\sin\varphi), \\ A' = r\,(\cos\varphi\,\cos 15T - \cos\alpha'\,\cot\delta'\,\sin\varphi), \\ B' = r\,(\cos\varphi\,\sin 15T - \sin\alpha'\,\cot\delta'\,\sin\varphi); \end{cases}$$

so sind nach 10. die Gleichungen der beiden nach der Sternschnuppen-Bahn gezogenen Gesichtslinien

$$85.\quad x_1 = z_1\,\cos\alpha\,\cot\delta + A,\quad y_1 = z_1\,\sin\alpha\,\cot\delta + B$$

und

$$86.\quad x_1 = z_1\,\cos\alpha'\,\cot\delta' + A',\quad y_1 = z_1\,\sin\alpha'\,\cot\delta' + B'.$$

Die Gleichung der durch diese beiden Gesichtslinien bestimmten Ebene sei

Digitized by Google

$$87.\quad Cx_1 - Dy_1 - Ez_1 - F = 0;$$

so ist nach 85. und 86. für jedes $z_1$

$$(C \cos\alpha \cot\delta - D \sin\alpha \cot\delta - E)\, z_1 + AC - BD - F = 0,$$
$$(C \cos\alpha' \cot\delta' - D \sin\alpha' \cot\delta' - E)\, z_1 + A'C - B'D - F = 0;$$

und folglich

$$C \cos\alpha \cot\delta - D \sin\alpha \cot\delta - E = 0,$$
$$C \cos\alpha' \cot\delta' - D \sin\alpha' \cot\delta' - E = 0$$

und

$$AC - BD - F = 0,$$
$$A'C - B'D - F = 0.$$

Also ist

$$(A - A')\, C - (B - B')\, D = 0,$$
$$(\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta')\, C - (\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta')\, D = 0;$$

und folglich

$$D = \frac{A - A'}{B - B'}\, C = \frac{\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta'}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C.$$

Ferner findet man leicht

$$E = \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta'}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C$$

und

$$F = -\frac{AB' - AB}{B - B'}\, C$$

oder

$$F = \frac{A(\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta') - B(\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta')}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C.$$

Daher kann man

$$C = \sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta',$$
$$D = \cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta',$$
$$E = \sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta',$$
$$F = AC - BD$$

setzen.

Setzt man also jetzt für den einen Beobachtungsort

$$88.\quad \begin{cases} A = r(\cos\varphi \cos 15T - \cos\alpha \cot\delta \sin\varphi), \\ B = r(\cos\varphi \sin 15T - \sin\alpha \cot\delta \sin\varphi), \\ A' = r(\cos\varphi \cos 15T - \cos\alpha' \cot\delta' \sin\varphi), \\ B' = r(\cos\varphi \sin 15T - \sin\alpha' \cot\delta' \sin\varphi), \\ C = \sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta', \\ D = \cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta', \\ E = \sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta' \end{cases}$$

und für den andern Beobachtungsort

Digitized by Google

$$89.\quad \begin{cases} A_1 = r_1\ (\cos\varphi_1\ \cos 15T_1 - \cos\alpha_1\ \cot\delta_1\ \sin\varphi_1), \\ B_1 = r_1\ (\cos\varphi_1\ \sin 15T_1 - \sin\alpha_1\ \cot\delta_1\ \sin\varphi_1), \\ A_1' = r_1\ (\cos\varphi_1\ \cos 15T_1 - \cos\alpha_1'\ \cot\delta_1'\ \sin\varphi_1), \\ B_1' = r_1\ (\cos\varphi_1\ \sin 15T_1 - \sin\alpha_1'\ \cot\delta_1'\ \sin\varphi_1), \\ C_1 = \sin\alpha_1\ \cot\delta_1 - \sin\alpha_1'\ \cot\delta_1', \\ D_1 = \cos\alpha_1\ \cot\delta_1 - \cos\alpha_1'\ \cot\delta_1', \\ E_1 = \sin(\alpha_1 - \alpha_1')\ \cot\delta_1\ \cot\delta_1'; \end{cases}$$

so sind die Gleichungen der beiden durch die Beobachtungsorte und die entsprechenden Gesichtslinien gelegten Ebenen

$$90.\quad \begin{cases} Cx_1 - Dy_1 - Ez_1 - AC + BD = 0, \\ C_1x_1 - D_1y_1 - E_1z_1 - A_1C_1 + B_1D_1 = 0; \end{cases}$$

oder

$$91.\quad \begin{cases} C(x_1 - A) - D(y_1 - B) - Ez_1 = 0, \\ C_1(x_1 - A_1) - D_1(y_1 - B_1) - E_1z_1 = 0; \end{cases}$$

und diese Gleichungen sind also auch zugleich die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden in Rede stehenden Ebenen, d. i. die Gleichungen der Sternschnuppen-Bahn. Eliminirt man aus diesen Gleichungen nach der Reihe $z_1$, $y_1$, $x_1$, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$92.\quad \begin{cases} (CE_1 - C_1E)x_1 - (DE_1 - D_1E)y_1 - (AC - BD)E_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)E = 0, \\ (CD_1 - C_1D)x_1 + (DE_1 - D_1E)z_1 - (AC - BD)D_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)D = 0, \\ (CD_1 - C_1D)y_1 + (CE_1 - C_1E)z_1 - (AC - BD)C_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)C = 0; \end{cases}$$

welche die Gleichungen der Projectionen der Sternschnuppen-Bahn auf den drei Coordinatenebenen sind. Die Gleichungen der Projectionen einer durch den Anfang der Coordinaten, d. i. den Mittelpunkt der Erde, gelegten, der Sternschnuppen-Bahn parallelen geraden Linie sind:

$$93.\quad \begin{cases} (CE_1 - C_1E)x_1 - (DE_1 - D_1E)y_1 = 0, \\ (CD_1 - C_1D)x_1 + (DE_1 - D_1E)z_1 = 0, \\ (CD_1 - C_1D)y_1 + (CE_1 - C_1E)z_1 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet $R$ die Rectascension des Punktes der Sphäre, in welchem dieselbe von dem auf der positiven Seite der Ebene der $x_1z_1$ liegenden Theile der in Rede stehenden Linie geschnitten wird; so ist, weil

$$y_1 = \frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E}\,x_1$$

ist, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$94.\quad \text{tang}\ R = \frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E},$$

Digitized by Google

wobei man zu beachten hat, dass $R$ immer positiv und offenbar nie grösser als $180^0$ ist.

Ferner sei $\Delta$ die Declination des Punktes, in welchem die Sphäre von dem auf der positiven Seite der Ebene der $x_1 z_1$ liegenden Theile der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie geschnitten wird, wobei man nicht zu übersehen hat, dass $\Delta$ positiv oder negativ ist, jenachdem der in Rede stehende Theil der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x_1 y_1$ liegt, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\sin \Delta^2 = \frac{(CD_1 - C_1D)^2}{(CD_1 - C_1D)^2 + (CE_1 - C_1E)^2 + (DE_1 - D_1E)^2},$$

und folglich

$$\text{tang } \Delta^2 = \frac{(CD_1 - C_1D)^2}{(CE_1 - C_1E)^2 + (DE_1 - D_1E)^2},$$

also nach 94., wie man leicht findet,

$$95. \quad \text{tang } \Delta^2 = \left(\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E}\right)^2 . \cos R^2.$$

Nach 93. ist

$$\frac{z_1}{x_1} = -\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E}$$

die Gleichung der Projection der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie auf der Ebene der $x_1 z_1$.

Ist nun zuvörderst $R < 90^0$, also $\cos R$ positiv, so ist offenbar $\Delta$, und folglich auch $\text{tang } \Delta$, positiv oder negativ, jenachdem in obiger Gleichung $x_1$ und $z_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. i. $\frac{z_1}{x_1}$ oder

$$-\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E}$$

positiv oder negativ ist, und folglich nach 95. in diesem Falle offenbar

$$\text{tang } \Delta = -\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E} \cos R.$$

Wenn ferner $R > 90^0$, also $\cos R$ negativ ist, so ist offenbar $\Delta$, und folglich auch $\text{tang } \Delta$, positiv oder negativ, jenachdem in obiger Gleichung $x_1$ und $z_1$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. i. $\frac{z_1}{x_1}$ oder

$$-\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E}$$

negativ oder positiv ist, und nach 95. ist also in diesem Falle offenbar wieder

$$\text{tang } \Delta = -\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E} \cos R.$$

Digitized by Google

Daher ist in völliger Allgemeinheit

$$96.\quad \text{tang}\,\Delta = -\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E}\cos R.$$

Bezeichnen $X$, $Y$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Sternschnuppen-Bahn mit der Ebene der $x_1y_1$ oder mit der Ebene des Aequators; so ist nach 92.

$$97.\quad \begin{cases} X = \dfrac{(AC-BD)D_1 - (A_1C_1 - B_1D_1)D}{CD_1 - C_1D}, \\ Y = \dfrac{(AC-BD)C_1 - (A_1C_1 - B_1D_1)C}{CD_1 - C_1D}; \end{cases}$$

und durch die Formeln 94., 96. und 97. ist nun offenbar die Lage der Sternschnuppen-Bahn im Raume vollständig bestimmt.

Zur Bestimmung von $X$ und $Y$ erhält man auch aus den Gleichungen 90., wenn man in denselben $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = 0$ setzt,

$$C(X-A) = D(Y-B),$$
$$C_1(X-A_1) = D_1(Y-B_1).$$

Also ist

$$\frac{C}{D}(X-A) = Y - B_1 - (B-B_1),$$

und folglich

$$\frac{C}{D}(X-A) = \frac{C_1}{D_1}(X-A_1) - (B-B_1)$$

oder

$$\frac{C}{D}(X-A) - \frac{C_1}{D_1}(X-A_1) = -(B-B_1),$$

und folglich

$$\left(\frac{C}{D} - \frac{C_1}{D_1}\right)(X-A) = (A-A_1)\frac{C_1}{D_1} - (B-B_1)$$

oder

$$-\left(1 - \frac{CD_1}{DC_1}\right)(X-A) = A - A_1 - (B-B_1)\frac{D_1}{C_1},$$

also

$$X - A = -\frac{A - A_1 - (B-B_1)\frac{D_1}{C_1}}{1 - \frac{CD_1}{DC_1}}$$

oder

$$X - A = -(A-A_1)\cdot\frac{1 - \frac{B-B_1}{A-A_1}\cdot\frac{D_1}{C_1}}{1 - \frac{C}{D}\cdot\frac{D_1}{C_1}},$$

und folglich

$$X = A - (A-A_1)\cdot\frac{1 - \frac{B-B_1}{A-A_1}\cdot\frac{D_1}{C_1}}{1 - \frac{C}{D}\cdot\frac{D_1}{C_1}}.$$

Digitized by Google

Die Grösse $Y$ findet man dann ferner mittelst der Ausdrücke

$$Y = B + \frac{C}{D}(X - A) = B_1 + \frac{C_1}{D_1}(X - A_1).$$

Berechnet man die Hülfswinkel $\xi$, $\psi$, $\psi_1$ mittelst der Formeln

$$98.\quad \text{tang } \xi = \frac{B - B_1}{A - A_1},\ \text{tang } \psi = \frac{D}{C},\ \text{tang } \psi_1 = \frac{D_1}{C_1};$$

so ist

$$X = A - (A - A_1) \cdot \frac{1 - \text{tang } \xi \text{ tang } \psi_1}{1 - \cot \psi \text{ tang } \psi_1}$$

oder

$$X = A - (A - A_1) \frac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)},$$

und folglich

$$Y = B - (A - A_1) \frac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)} \cot \psi,$$

d. i.

$$Y = B - (A - A_1) \frac{\cos \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}.$$

Daher hat man jetzt zur Berechnung von $X$, $Y$ die Formeln

$$99.\quad \begin{cases} X = A - (A - A_1) \dfrac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}, \\ Y = B - (A - A_1) \dfrac{\cos \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$100.\quad K = \frac{(A - A_1) \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}$$

setzt, die Formeln

$$101.\quad X = A - K \sin \psi,\ Y = B - K \cos \psi.$$

Die kürzeste Entfernung $P$ des Mittelpunkts der Erde von der Sternschnuppen-Bahn, oder die Länge des von dem Mittelpunkte der Erde auf die Sternschnuppen-Bahn gefällten Perpendikels kann man auf folgende Art finden.

Die Gleichung der von dem Mittelpunkte der Erde durch den Durchschnittspunkt der Sternschnuppen-Bahn mit der Ebene des Aequators gezogenen geraden Linie ist nach dem Obigen

$$102.\quad y_1 = \frac{Y}{X} x_1,$$

oder, wenn wir

$$103.\quad \text{tang } \Omega = \frac{Y}{X}$$

setzen, so sind vielmehr

$$104.\quad y_1 = x_1 \text{ tang } \Omega,\ z_1 = 0$$

die beiden Gleichungen der in Rede stehenden Linie. Weil ferner nach 94. und 96.

Digitized by Google

$$\frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E} = \text{tang } R, \quad \frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E} = -\frac{\text{tang } \Delta}{\cos R}$$

ist; so sind nach 93.

$$105. \quad y_1 = x_1 \text{ tang } R, \; z_1 = \frac{\text{tang } \Delta}{\cos R} x_1$$

die Gleichungen der durch den Mittelpunkt der Erde mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie. Bezeichnen wir nun jeden der beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Sternschnuppen-Bahn mit der durch den Mittelpunkt der Erde und ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene des Aequators gezogenen Linie einschliesst, durch $\Theta$; so ist vermöge der Gleichungen 104. und 105. nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos \Theta = \pm \frac{1 + \text{tang } R \text{ tang } \Omega}{\sqrt{(1 + \text{tang } \Omega^2)\,(1 + \text{tang } R^2 + \frac{\text{tang } \Delta^2}{\cos R^2})}},$$

und folglich, wenn man im Zähler und Nenner mit cos $R$ cos $\Omega$ multiplicirt,

$$106. \quad \cos \Theta = \pm \cos \Delta \cos (R - \Omega).$$

Auf der Stelle erhellet nun aber, dass

$$P = \sin \Theta \sqrt{X^2 + Y^2} = \pm X \sin \Theta \sqrt{1 + \text{tang } \Omega^2},$$

und folglich

$$107. \quad P = \pm \frac{\sin \Theta}{\cos \Omega} X$$

ist, wo das Zeichen immer so genommen werden muss, dass $P$ positiv wird.

Die Gleichungen 92. der Sternschnuppen-Bahn können nun auch auf folgenden einfachern Ausdruck gebracht werden.

Zuerst erhält man aus 92. und 97. auf der Stelle die Gleichungen

$$(CD_1 - C_1D)(x_1 - X) + (DE_1 - D_1E)z_1 = 0,$$
$$(CD_1 - C_1D)(y_1 - Y) + (CE_1 - C_1E)z_1 = 0.$$

Ferner ist nach 94. und 96.

$$CE_1 - C_1E = (DE_1 - D_1E) \text{ tang } R,$$
$$DE_1 - D_1E = -(CD_1 - C_1D) \cos R \cot \Delta,$$

und folglich

$$CE_1 - C_1E = -(CD_1 - C_1D) \sin R \cot \Delta.$$

Führt man diese Ausdrücke von $DE_1 - D_1E$ und $CE_1 - C_1E$ nun in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$x_1 - X - z_1 \cos R \cot \Delta = 0, \; y_1 - Y - z_1 \sin R \cot \Delta = 0$$

oder

$$108. \quad x_1 = X + z_1 \cos R \cot \Delta, \; y_1 = Y + z_1 \sin R \cot \Delta,$$

welches die Gleichungen der Sternschnuppen-Bahn sind. Auch erhält man leicht

Digitized by Google

$$(x_1 - X) \sin R = (y_1 - Y) \cos R$$

oder

$$109.\quad x_1 \sin R - y_1 \cos R = X \sin R - Y \cos R.$$

Die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, nach dem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension und Declination wir durch $\alpha$ und $\delta$ bezeichnet haben, gezogenen Gesichtslinie sind nach 85.

$$x_1 = A + z_1 \cos \alpha \cot \delta,\ y_1 = B + z_1 \sin \alpha \cot \delta.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser geraden Linie mit der Sternschnuppen-Bahn durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$; so haben wir zur Bestimmung dieser Grössen nach dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$110.\quad \begin{cases} \xi = A + \zeta \cos \alpha \cot \delta,\ \eta = B + \zeta \sin \alpha \cot \delta; \\ \xi = X + \zeta \cos R \cot \Delta,\ \eta = Y + \zeta \sin R \cot \Delta; \end{cases}$$

aus denen sich leicht

$$111.\quad \zeta = -\frac{A - X}{\cos \alpha \cot \delta - \cos R \cot \Delta} = -\frac{B - Y}{\sin \alpha \cot \delta - \sin R \cot \Delta}$$

ergiebt. Diese Ausdrücke reichen in Verbindung mit den Formeln

$$112.\quad \begin{cases} \xi = A + \zeta \cos \alpha \cot \delta = X + \zeta \cos R \cot \Delta, \\ \eta = B + \zeta \sin \alpha \cot \delta = Y + \zeta \sin R \cot \Delta \end{cases}$$

oder

$$113.\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{X \cos \alpha \cot \delta - A \cos R \cot \Delta}{\cos \alpha \cot \delta - \cos R \cot \Delta}, \\ \eta = \dfrac{Y \sin \alpha \cot \delta - B \sin R \cot \Delta}{\sin \alpha \cot \delta - \sin R \cot \Delta} \end{cases}$$

zur Bestimmung der Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ hin.

Bezeichnen wir die Rectascension und geocentrische Breite des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte ($\xi\eta\zeta$) der Sternschnuppen-Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch $15t$ und $\mu$; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$114.\quad \text{tang } 15t = \frac{\eta}{\xi},$$

mit der Bestimmung, dass in dem Falle, wo $\xi$ und $\eta$ gleiche Vorzeichen haben, $15t$ zwischen 0 und 90° oder zwischen 180° und 270° genommen werden muss, jenachdem die Grössen $\xi$ und $\eta$ beide positiv oder beide negativ sind; dass dagegen in dem Falle, wo $\xi$ und $\eta$ ungleiche Vorzeichen haben, $15t$ zwischen 90° und 180° oder zwischen 270° und 360° genommen werden muss, jenachdem $\xi$ negativ und $\eta$ positiv oder $\xi$ positiv und $\eta$ negativ ist.

Bezeichnen wir die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche in Bezug auf den Beobachtungsort, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, als Anfang der Längen durch $\lambda$, so ist

$$\lambda = 15(T - t) \text{ oder } \lambda = 360° + 15(T - t),$$

Digitized by Google

jenachdem $T-t$ positiv oder negativ ist, und die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche ist nun, wenn $L$ die geographische Länge des Beobachtungsorts, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, bezeichnet

$$L+\lambda \text{ oder } L+\lambda-360°,$$

jenachdem $L+\lambda$ kleiner oder grösser als 360° ist.

Ferner erhellet sogleich, dass in völliger Allgemeinheit

$$\text{tang } \mu = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

und folglich, weil $\xi$ und $\cos 15t$ offenbar immer einerlei Vorzeichen haben, tang $\mu$ aber immer dasselbe Vorzeichen wie $\zeta$ hat,

$$115. \quad \text{tang } \mu = \frac{\zeta}{\xi} \cos 15t.$$

Dass man ganz ähnliche Formeln auch für die Punkte der Sternschnuppen-Bahn, welche den nach den Punkten der Sphäre, deren Rectascensionen $\alpha'$, $\delta'$ und $\alpha_1$, $\delta_1$; $\alpha_1'$, $\delta_1'$ sind, von den Beobachtungsorten gezogenen Gesichtslinien entsprechen, entwickeln kann, versteht sich von selbst.

## §. 7.

Man kann das Sternschnuppen-Problem noch aus einem ganz andern Gesichtspunkte auffassen, und dieser Gesichtspunkt würde eigentlich der strengste und allgemeinste sein, von dem man überhaupt ausgehen kann, weil derselbe gar keine andere Voraussetzung als dass der Weg einer beobachteten Sternschnuppe für die immer nur sehr kurze Dauer ihrer Sichtbarkeit geradlinig sei, in Anspruch nimmt, worüber wir hier nur Folgendes in der Kürze und bloss ganz im Allgemeinen bemerken, weil theils im Obigen, theils in dem vorhergehenden Aufsatze (Nr. XXI.), schon Alles enthalten ist, was zur Ausführung der Rechnungen, die wir jetzt andeuten wollen, erforderlich sein dürfte.

Wenn man sich durch die nahe Gleichzeitigkeit der Beobachtungen, wobei §. 3. zu vergleichen ist, die Ueberzeugung verschafft hat, dass in einem jeden von vier Beobachtungsorten eine und dieselbe Sternschnuppe wenigstens ein Mal beobachtet worden ist; so kennt man die Gleichungen der vier von diesen Beobachtungsorten nach der Sternschnuppe gezogenen geraden Linien entweder nach 15. in Bezug auf das System der $xyz$, dessen Anfang der Mittelpunkt der Sonne ist, wenn man auf die Bewegung der Erde um die Sonne während der Dauer des Phänomens gehörig Rücksicht nehmen will, wie es in der That erforderlich ist, wenn man die grösste Strenge zu erreichen beabsichtigt, oder nach 10. in Bezug auf das System der $x_1y_1z_1$, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde ist, wenn man die Bewegung der Erde um die Sonne während der immer nur sehr kurzen Dauer des Phänomens unberücksichtigt lassen will, und die Lage der Sternschnuppen-Bahn, als eine die vier in Rede stehenden gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie betrachtet, wird nun mittelst der im vorigen Aufsatze vollständig aufgelösten Aufgabe bestimmt werden können. Es ist auch hinreichend, wenn man aus einem jeden von zwei Beobachtungsorten eine, aus einem dritten Beobachtungsorte

Digitized by Google

dagegen zwei Beobachtungen einer Sternschnuppe hat, und die Lage der Bahn würde auch in dem Falle, wenn man aus einem jeden von zwei Beobachtungsorten zwei Beobachtungen einer Sternschnuppe hat, mittelst der im vorigen Aufsatze aufgelösten Aufgabe zu bestimmen sein, wenn man auf die Bewegung der Erde um die Sonne während der Zwischenzeit der Beobachtungen gehörig Rücksicht nehmen wollte. Freilich lässt die im vorigen Aufsatze aufgelöste Aufgabe immer entweder zwei Auflösungen oder gar keine zu; jedoch wird man gewiss in jedem einzelnen Falle aus den bei demselben vorkommenden besondern Umständen zu beurtheilen im Stande sein, welche der beiden Auflösungen, wenn die Aufgabe überhaupt möglich ist, diesem Falle entspricht. Diese wenigen Andeutungen werden hinreichend sein, um unsere Ansicht *) über diesen Gegenstand deutlich darzulegen.

## §. 8.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man für einen Punkt der Erdoberfläche die geocentrische Breite $\varphi$ und die Länge des nach diesem Punkte gezogenen Erdradius $r$ aus der Polhöhe $\omega$ des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche nach unserer Ueberzeugung auf die einfachste Weise finden kann, da diese beiden Elemente im Obigen häufig gebraucht worden sind.

Der Halbmesser des Erdäquators sei $a$, die halbe Erdaxe sei $b$; so ist

$$116. \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung des durch den in Rede stehenden Punkt der Erdoberfläche gelegten Erdmeridians, wobei ohne weitere Erläuterung sogleich erhellen wird, wie das Coordinatensystem der $xy$ angenommen worden ist.

Bezeichnen nun $x$, $y$ die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche, so ist nach den Principien der höhern Geometrie

$$117. \quad z - y = -\frac{dx}{dy}(u - x)$$

die Gleichung der durch diesen Punkt gezogenen Normale des Erdsphäroids, und folglich, wenn wir, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Coordinaten $x$, $y$ beide positiv sind,

$$118. \quad \text{tang}\, \omega = -\frac{dx}{dy}.$$

Nun ist aber offenbar

$$119. \quad \text{tang}\, \varphi = \pm\frac{y}{x},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt. Also ist nach dem Vorhergehenden

*) Diese Ansicht würde nur erst dann vielleicht weiterer Berücksichtigung werth sein, wenn es möglich geworden ist, den Beobachtungen der Sternschnuppen ein höhern Grad von Genauigkeit zu geben.



Digitized by Google

$$120.\quad \frac{\text{tang } \varphi}{\text{tang } \omega} = \mp \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 116., so erhält man

$$-\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Also ist nach 120.

$$121.\quad \frac{\text{tang } \varphi}{\text{tang } \omega} = \pm \frac{b^2}{a^2},\quad \text{tang } \varphi = \pm \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } \omega.$$

Setzt man die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$, so ist $\frac{b}{a} = 1-n$, und folglich

$$122.\quad \text{tang } \varphi = \pm (1-n)^2 \text{ tang } \omega,$$

immer das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt.

Den nach dem in Rede stehenden Punkte der Erdoberfläche gezogenen Erdradius $r$ kann man nun auf folgende Art finden. Weil nach 119.

$$y = \pm x \text{ tang } \varphi$$

ist, so ist nach 116.

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{x \text{ tang } \varphi}{b})^2 = 1,$$

und folglich

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \text{ tang } \varphi^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \cos \varphi^2}{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \text{tang } \varphi^2) = x^2 \text{ sec } \varphi^2.$$

Also ist

$$123.\quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}}.$$

Auch ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2}.$$

Nach 121. ist aber

$$\frac{a^2}{b^2} = \pm \frac{\text{tang } \omega}{\text{tang } \varphi} = \pm \frac{\cos \varphi \sin \omega}{\sin \varphi \cos \omega},$$

und folglich

$$\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2 = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} (\cos \varphi \cos \omega \pm \sin \varphi \sin \omega),$$

d. i.

$$\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2 = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} \cos (\varphi \mp \omega).$$

Also ist nach dem Obigen

Digitized by Google

124. $r = a\sqrt{\frac{\cos\omega}{\cos\varphi\,\cos(\varphi \mp \omega)}}$,

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite $\varphi$ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt.

---

# XXIII.

## Ueber das vollständige Vierseit und vollständige Viereck.

Von dem

**Herrn Doctor Rädell**

zu Berlin.

---

1. Lehrsätze. *α.* Sind zwei Gerade nach vier Punktenpaaren projectivisch und bleiben sie auch projectivisch, wenn man in der einen Geraden die Reihenfolge der Punkte unverändert lässt, während man in der anderen Geraden zwei nicht unmittelbar neben einander liegende Punkte vertauscht, so sind die vier Punkte in der einen und anderen Geraden harmonisch liegende Punkte.

*β.* Sind zwei Strahlenbüschel nach vier Strahlenpaaren projectivisch und bleiben sie auch projectivisch, wenn man in dem einen Büschel die Reihenfolge der Strahlen unverändert lässt, während man in dem anderen Büschel zwei nicht unmittelbar neben einander liegende Strahlen vertauscht, so sind die vier Strahlen in dem einen und anderen Strahlenbüschel harmonisch liegende Strahlen.

Beweise. *α.* Sind die Geraden $A$ und $A'$ in Beziehung auf die Punkte a und a′, b und b′, c und c′, d und d′ projectivisch, so ist $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'}$. Sind ferner dieselben Geraden $A$ und $A'$ in Beziehung auf die Punkte a und c′, b und b′, c und a′, d und d′



Digitized by Google

projectivisch, so ist auch $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{c'b'}{c'd'} : \frac{a'b'}{a'd'}$. Hieraus folgt $\frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} = \frac{c'b'}{c'd'} : \frac{a'b'}{a'd'}$, also durch Mutiplication $(\frac{a'b'}{a'd'})^2 = (\frac{c'b'}{c'd'})^2$, also auch $a'b' : a'd' = c'b' : c'd'$ d. h. $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ und folglich sind auch $a$, $b$, $c$, $d$ harmonisch liegende Punkte.

$\beta$. Sind die Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ in Beziehung auf die Strahlen $a$ und $a'$, $b$ nnd $b'$, $c$ und $c'$, $d$ und $d'$ projectivisch, und legt man durch den ersten Büschel die Gerade $A$, welche die Strahlen desselben respective in den Punkten $a$, $b$, $c$, $d$ schneidet, durch den Büschel $B'$ aber die Gerade $A'$, welche die Strahlen desselben respective in den Punkten $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ schneidet, so sind auch die Geraden $A$ und $A'$ nach den Punkten $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, $c$ und $c'$, $d$ und $d'$ projectivisch. Sind nun auch die Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ nach den Strahlen $a$ und $c'$, $b$ und $b'$, $c$ und $a'$, $d$ und $d'$ projectivisch, so sind auch die Geraden $A$ und $A'$ nach den Punkten $a$ und $c'$, $b$ und $b'$, $c$ und $a'$, $d$ und $d'$ projectivisch. Hieraus folgt nach ($\alpha$), dass die Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ und $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ zwei Gruppen harmonisch liegender Punkte bilden; folglich sind auch die Strahlen $a$, $b$, $c$, $d$, so wie $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ harmonisch liegende Strahlen.

2. Lehrsätze. $\alpha$. Die Endpunkte einer jeden Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden mit den Durchschnittspunkten dieser Diagonale und der beiden anderen Diagonalen des Vierseits vier harmonisch liegende Punkte, und zwar sind die beiden ersteren und die beiden letzteren Punkte harmonisch zugeordnete Punkte.

$\beta$. Je zwei gegenüberstehende Seiten eines vollständigen Vierecks bilden mit den Verbindungslinien des Durchschnittspunktes dieser beiden Seiten und der Durchschnittspunkte der beiden anderen Paare gegenüberstehender Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch liegende Strahlen und zwar sind die beiden ersteren Seiten und die beiden letzteren Verbindungslinien harmonisch zugeordnete Gerade.

Beweise $\alpha$. Betrachtet man in dem Vierseit I II III IV (Taf. II. Fig. 1.) die beiden Diagonalen $a$ $b$ $c$ $d$ und $a'$ $b'$ $c'$ $d'$, so sind sie nach den Punkten $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, $c$ und $c'$, $d$ und $d'$ perspectivisch, weil sie ihren perspectivischen Mittelpunkt in $\mathfrak{B}$ haben. Dieselben Diagonalen sind aber auch nach den Punkten $a$ und $c'$, $b$ und $b'$, $c$ und $a'$, $d$ und $d'$ perspectivisch, weil sie für diesen Fall ihren perspectivischen Mittelpunkt in $\mathfrak{B}'$ haben; folglich sind $a$, $b$, $c$, $d$ und $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ harmonisch liegende Punkte (1. $\alpha$.). Auf dieselbe Weise lässt sich aber der Satz auch für die dritte Diagonale beweisen.

$\beta$. Betrachtet man in dem Viereck I II III IV (Taf. II. Fig. 2.) die Strahlenbüschel $a$ $b$ $c$ $d$ und $a'$ $b'$ $c'$ $d'$, so sind sie nach den Strahlen $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, $c$ und $c'$, $d$ und $d'$ perspectivisch, weil sie ihren perspectivischen Durchschnitt in $A$ haben. Dieselben Strahlenbüschel sind aber auch perspectivisch nach den Strahlen $a$ und $c'$, $b$ und $b'$, $c$ und $a'$, $d$ und $d'$, denn sie haben für diesen Fall ihren perspectivischen Durchschnitt in $A'$; folglich sind die Strahlen $a$, $b$, $c$, $d$ und $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ harmonisch liegende Strah-

Digitized by Google

len (1. $\beta$.). Ebenso lässt sich dies für das dritte Seitenpaar beweisen.

Anmerkung. Der unter (1) mitgetheilte Satz dürfte um so bemerkenswerther sein, da er ganz allgemein das Verhältniss angiebt, welches den harmonisch liegenden Punkten und Geraden in Beziehung auf die projectivischen Punkte und Strahlenbüschel zukommt. Er führt, wie wir gesehen, zum einfachsten Beweise des Lehrsatzes (2) und weist diesem, welcher in der neueren Geometrie eine so bedeutende Rolle spielt, seine eigentliche Stelle in der letzteren an.

---

# XXIV.

## Von der Projection der Figuren in einer und derselben Ebene.

Von dem

**Herrn Doctor Rädell**

zu Berlin.

---

Poncelet hat in seinem berühmten Werke Propriétés projectives des figures nach Monge's Vorgang die Projection der Figuren dazu angewandt, unregelmässige Figuren auf regelmässige zurückzuführen und die Eigenschaften der ersteren aus den leichter zu entwickelnden Eigenschaften der letzteren abzuleiten, indem er z. B. aus den Ecken einer beliebigen geradlinigten Figur nach irgend einem Punkte ausserhalb der Ebene gerade Linien zieht, die dadurch entstandene Pyramide durch eine neue Ebene dergestalt schneidet, dass der Schnitt eine einfachere Figur wird, als die ursprüngliche, und nun die Beziehungen dieses Vielecks aus den Eigenschaften des Durchschnitts ableitet. Wie man sieht, werden hiedurch stereometrische Betrachtungen eingeführt, welche der ursprünglichen Figur und ihren Eigenschaften an und für sich fremd sind, und es schien mir nicht uninteressant zu untersuchen, ob der Durchgang durch die Stereometrie nicht ganz und gar vermieden werden könnte. Die Möglichkeit ergab sich daraus, dass die zu projicirende Ebene und die Projectionsebene jeden beliebigen Winkel mit einander bilden können und dass man dieselben also nur um ihren Durchschnitt zu drehen hat, bis beide Ebenen auf einander fallen. — In der That habe ich meinen Zweck auf einfachem Wege erreicht und Resultate gewonnen, deren Entwickelung ich, wenn sie auch nicht neu sind, wenigstens noch nirgends so elementar

Digitized by Google

gelesen habe. Da sich dieser Theil der Geometrie überdies von der Geometrie unserer Zeit ganz absondern lässt und in seinen Betrachtungen eben so einfach ist, als diese letztere, so halte ich ihn um so mehr für geeignet, hier mitgetheilt zu werden, als sich dadurch mancher Lehrer bewogen fühlen dürfte, vermittelst desselben seine Schüler mit den hauptsächlichsten Resultaten der neueren Geometrie bekannt zu machen. Man begreift leicht, dass sich nicht alle Anwendungen dieser Lehre hier ausgeführt finden, der Selbstlernenden willen glaubte ich aber in der Entwickelung der Prinzipien etwas ausführlicher sein zu dürfen.

## Von der Projection der geradlinigten Figuren.

1. Erklärung. Wenn irgend eine vielseitige Figur a b c d dergestalt gezeichnet ist, dass ihre Ecken in den Strahlen eines Strahlenbüschels *a b c d* zu liegen kommen, so sagt man, die Figur und der Strahlenbüschel liegen perspectivisch und jede Ecke der Figur entspreche demjenigen Strahl, in welchem sie liegt, jede Seite der Figur aber demjenigen Winkel, welchen die durch ihre Endpunkte gehenden Strahlen des Strahlenbüschels mit einander bilden. In Taf. II. Fig. 3. entsprechen sich also a und *a*, b und *b*, c und *c*, d und *d*; so wie ab und $\angle(ab)$, ac und $\angle(ac)$, ad und $\angle(ad)$, bc und $\angle(bc)$, bd und $\angle(bd)$, cd und $\angle(cd)$ perspectivisch.

2. Aufgabe. Es sind drei Strahlen eines Strahlenbüschels und ein Dreieck gegeben, man soll beide Figuren in perspectivische Lage bringen, dergestalt, dass jedem gegebenen Strahle eine gegebene Ecke des Dreiecks entspricht.

Analyse. Ist Taf. II. Fig. 3. *a*, *b*, *c* der Strahlenbüschel und a b c das Dreieck, sind a und *a*, b und *b*, c und *c* entsprechende Stücke, X aber derjenige Punkt, von welchem aus die nach a, b, c gezogenen Strahlen einen dem *a*, *b*, *c* congruenten Strahlenbüschel bilden, so muss X 1, in der Peripherie eines Kreises liegen, welcher über der Sehne ab einen Peripheriewinkel gleich $\angle(ab)$ hat und 2, in der Peripherie eines anderen Kreises, welcher über der Sehne ac einen Peripheriewinkel gleich $\angle(ac)$ hat. Demnach wird X also im Durchschnittspunkte beider Kreise liegen.

3. Zusätze. *a.* Jedes beliebige Dreieck kann mit jeden beliebigen drei Strahlen eines Strahlenbüschels perspectivisch gelegt werden und zwar so, dass jeder beliebige Strahl des Strahlenbüschels jeder beliebigen Ecke des Dreiecks entspricht, aber nur auf eine einzige Weise.

*b.* Eine mehrseitige Figur lässt sich nur unter besonderen Bedingungen mit den Strahlen des Strahlenbüschels perspectivisch legen und zwar auch in diesem Falle nur auf eine einzige Art.

*c.* Zwei Dreiecke (oder zwei mehrseitige Figuren) können nur auf zwei verschiedene Arten mit den Strahlen des Strahlenbüschels perspectivisch gelegt werden, wenn jeder Strahl des Strahlenbüschels einer gegebenen Ecke entsprechen soll; und zwar einmal so, dass beide Dreiecke (oder mehrseitige Figuren) entweder auf derselben Seite des Durchschnittspunktes der Strahlen oder auf verschiedenen Seiten desselben liegen.

4. Erklärung. Liegen zwei Dreiecke mit ein und demsel-

Digitized by Google

den Strahlenbüschel perspectivisch, so sagt man, die Dreiecke liegen unter sich perspectivisch; betrachtet die drei Ecken des einen Dreiecks als Projectionen der drei Ecken des anderen, und die drei Seiten des einen Dreiecks als Projectionen der drei Seiten des anderen Dreiecks. Den Mittelpunkt des Strahlenbüschels nennt man den Anfangspunkt der Projection.

5. Lehrsatz. Liegen zwei Dreiecke perspectivisch, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in einer und derselben Geraden.

Beweis. Sind (Taf. II. Fig. 4.) a b c und a′ b′ c′ die beiden Dreiecke, welche dergestalt liegen, dass aa′, bb′, cc′ sich in dem Punkte $\mathfrak{B}$ schneiden, so sollen $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ als respective Durchschnite von ab und a′b′, ac und a′c′, bc und b′c′ in einer und derselben Geraden liegen.

Man ziehe durch b ba″ parallel mit b′a′ und bc″ parallel mit b′c′, verbinde a″ mit c″ und verlängere diese Verbindungslinie, so wie ac, bis sie sich in $\beta''$ schneiden, ziehe endlich b$\beta''$. Es verhält sich nun

$\mathfrak{B}b : \mathfrak{B}b' = ba' : b'c' = ba'' : bc''$ und da überdies vermöge der Parallelität $\angle\, a''bc'' = \angle\, a'b'c'$, so ist auch $a''c'' \fallingdotseq a'c'$. Weil nun $bc'' \fallingdotseq c'a$ und $c''b \fallingdotseq c'\beta$, so verhält sich

$cc'' : cc' = cb : c\alpha = cb : c\beta$, also sind die Scheiteldreiecke bc$\beta$ und ac$\beta$ ähnlich, mithin b$\beta'' \fallingdotseq a\beta$. Ebenso ist b$\beta'' \fallingdotseq a\gamma$ und folglich liegen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in einer und derselben Geraden.

6. Lehrsatz. Liegen zwei Dreiecke in einer Ebene dergestalt, dass die drei Durchschnittspunkte der Seiten des einen Dreiecks mit den Seiten des anderen Dreiecks in einer und derselben Geraden liegen, so liegen die Dreiecke perspectivisch; je zwei und zwei Seiten, welche einen Durchschnittspunkt bilden, sind entsprechende Seiten und ihre Endpunkte entsprechende Ecken.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus der Umkehrung des vorhergehenden.

7. Erklärung. Die Gerade, in welcher die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten zweier perspectivisch liegenden Dreiecke liegen, nennt man den Durchschnitt der Projection.

8. Zusätze. *a.* Ein Projectionssystem ist festgestellt 1, durch zwei perspectivisch liegende Dreiecke, 2, durch drei Strahlen eines Strahlenbüschels, zwei ursprüngliche Punkte mit ihren Projectionspunkten und die Richtung des Durchschnitts der Projection, 3, durch den Anfangspunkt der Projection, den Durchschnitt derselben und einen ursprünglichen Punkt nebst seinem Projectionspunkte.

*b.* Sind in Taf. II. Fig. 4. in drei Strahlen *a*, *b* und *c* eines Strahlenbüschels beziehlich drei Punkte a, b und c als ursprüngliche und drei andere a′ b′ und c′ als Projectionspunkte gegeben, so kann man dies als ein Projectionssystem ansehen, indem man ab und a′b′ so wie ac und a′c bis zu den Durchschnittspunkten $\gamma$ und $\beta$ verlängert und durch die Punkte $\gamma$ und $\beta$ den Durchschnitt $A$ der Projection legt. Zu jedem neuen Punkte b in irgend einem Strahle *d* des Strahlenbüschels findet man dann den Projectionspunkt, indem man b mit einem der ursprünglichen Punkte z. B. a verbindet, die Verbindungslinie ba bis zum Durchschnitt der Projection verlängert, diesen Durchschnittspunkt $\delta$ mit dem Projectionspunkte

Digitized by Google

$a'$ des ursprünglichen Punktes $a$ verbindet und die Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit dem Strahl $d$ verlängert. Dieser Durchschnittspunkt $b'$ ist alsdann der Projectionspunkt des gegebenen Punktes $b$.

Anmerkung. Wäre die Linie $bb'$ parallel dem Strahle $d$, so würde daraus hervorgehen, dass der Punkt $b$ keinen Projectionspunkt hat, oder dass für das zu Grunde liegende Projectionssystem, wie man zu sagen pflegt, der Projectionspunkt von $b$ im Unendlichen liegt.

*c.* In einem jeden festgestellten Projectionssysteme hat jeder gegebene Punkt nur einen einzigen Projectionspunkt, welcher mit ihm in demselben Strahle liegt. Jeder Punkt des Durchschnitts der Projection aber ist zugleich sein eigener Projectionspunkt; so wie jeder Strahl der Richtung nach sein eigener Projectionsstrahl ist.

*d.* Betrachtet man in einem Projectionssysteme die Projectionspunkte als ursprüngliche Punkte, so sind die ursprünglichen Punkte die Projectionspunkte dieser letzteren.

*e.* Alle Projectionspunkte der Punkte einer und derselben Geraden bilden gleichfalls eine Gerade, und umgekehrt: liegen die Projectionspunkte mehrerer Punkte in einer Geraden, so liegen die Punkte selbst in einer Geraden.

*f.* Um eine Gerade zu projiciren hat man nur zwei beliebige Punkte derselben zu projiciren und diese Projectionspunkte mit einander zu verbinden.

*g.* Eine Gerade und ihre Projection werden durch jeden durch den Anfangspunkt der Projection gehenden Strahl dergestalt geschnitten, dass der Durchschnittspunkt der ersteren den Durchschnittspunkt der letzteren zur Projection hat.

9. Zusätze. *a.* Die Projectionspunkte von vier harmonisch liegenden Punkten sind wiederum vier harmonisch liegende Punkte.

*b.* Projicirt man vier harmonisch liegende Punkte dergestalt, dass die Projection eines dieser Punkte in die Mitte der beiden anderen einander harmonisch zugeordneten Punkte fällt, so fällt die Projection des vierten Punktes ins Unendliche.

*c.* Projicirt man vier harmonisch liegende Punkte dergestalt, dass die Projection eines dieser Punkte ins Unendliche fällt, so fällt die Projection des demselben harmonisch zugeordneten Punktes in die Mitte der Projection der beiden anderen Punkte.

*d.* Lassen sich vier Punkte einer Geraden dergestalt projiciren, dass die Projection des einen derselben in die Mitte der Projectionen zweier anderen und die Projection des vierten Punktes ins Unendliche fällt, so sind die vier ursprünglichen Punkte harmonisch liegende Punkte, und der erste und vierte, so wie der zweite und dritte Punkt sind einander harmonisch zugeordnet.

10. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt zweier Projectionsgeraden ist der Projectionspunkt des Durchschnittspunktes der beiden projicirten Geraden.

Beweis. Ist $a'b'$ die Projection von $ab$ und $c'd'$ die Projection von $cd$, so ist $e'$ der Projectionspunkt irgend eines Punktes sowohl der Geraden $ab$ als auch der Geraden $cd$, weil er in $a'b'$ und $c'd'$ liegt, folglich ist $e'$ der Projectionspunkt von $e$ als Durchschnittspunkt von $ab$ und $cd$.

11. Zusätze. *a.* Schneiden sich drei oder mehrere Geraden in einem einzigen Punkte, so schneiden sich ihre Projectionen

Digitized by Google

gleichfalls in einem einzigen Punkte und umgekehrt: schneiden sich die Projectionen dreier oder mehrerer Geraden in einem einzigen Punkte, so schneiden sich die Geraden selbst in einem einzigen Punkte.

*b.* Die Projectionen von vier harmonisch liegenden Geraden sind gleichfalls vier harmonisch liegende Geraden und umgekehrt: liegen die Projectionen von vier Geraden harmonisch, so liegen die Geraden selbst harmonisch.

*c.* Projicirt man vier harmonisch liegende Geraden dergestalt, dass die Projectionen irgend zweier einander harmonisch zugeordneten Geraden auf einander senkrecht zu stehen kommen, so bilden die Projectionen der beiden anderen Geraden mit jeder Projection der beiden ersteren gleiche Winkel.

*d.* Projicirt man vier harmonisch liegende Geraden dergestalt, dass die Projectionen irgend zweier einander harmonisch zugeordneter Geraden mit den Projectionen der beiden anderen Geraden gleiche Winkel bilden, so stehen die Projectionen der beiden ersteren Geraden auf einander senkrecht.

*e.* Lassen sich vier Strahlen eines Strahlenbüschels dergestalt projiciren, dass die Projectionen zweier derselben auf einander senkrecht stehen, und die Projectionen der beiden anderen Geraden mit denen der beiden ersteren gleiche Winkel bilden, so sind es vier harmonisch liegende Strahlen, und die beiden ersten und die beiden letzten sind einander harmonisch zugeordnet.

12. **Aufgabe.** In einem beliebigen Strahl eines gegebenen Projectionssystems denjenigen Punkt zu finden, dessen Projection im Unendlichen liegt.

**Analyse.** Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, $b$ der gewählte Strahl und $\mathfrak{x}$ derjenige Punkt desselben, dessen Projection im Unendlichen liegen soll, so muss, wenn man $\mathfrak{x}a$ dergestalt verlängert, dass es $A$ in $\mathfrak{y}$ schneidet und durch $\mathfrak{y}$ und $a'$ die Linie $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ zieht, diese Linie mit $b$ parallel sein. Da nun der Punkt $a'$ mit dem Projectionssystem gegeben ist, so ist hierdurch die Richtung von $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$, so wie auch die von $\mathfrak{y}a$ mit bestimmt, folglich auch der Punkt $\mathfrak{x}$.

**Zusatz.** In einem jeden gegebenen Projectionssysteme existirt für jeden Strahl ein Punkt, dessen Projection im Unendlichen liegt.

13. **Lehrsatz.** Liegen die Projectionen zweier Punkte einer Geraden im Unendlichen, so liegt die Projection eines jeden anderen Punktes dieser Geraden gleichfalls im Unendlichen.

**Beweis.** Liegen die Projectionen zweier Punkte einer Geraden im Unendlichen, so liegt die Verbindungslinie dieser beiden Projectionen ihrer ganzen Richtung nach im Unendlichen, weil sie nicht durch den Anfangspunkt des Projectionssystems gehen kann. Es wird folglich auch jeder Punkt der ursprünglichen Geraden seine Projection im Unendlichen haben, weil diese sich in einer Geraden befindet, die ihrer ganzen Richtung nach im Unendlichen liegt.

**Zusatz.** Liegen die Projectionen dreier oder mehrerer Punkte eines Projectionssystems im Unendlichen, so liegen die Punkte selbst in einer und derselben Geraden.

14. **Aufgabe.** In einem gegebenen Projectionssysteme diejenige Gerade zu construiren, deren Projection im Unendlichen liegt.

Digitized by Google

**Analyse.** Ist (Taf. II. Fig. 5.) $\mathfrak{x}\mathfrak{w}$ die verlangte Gerade, so müssen die Projectionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{w}$ im Unendlichen liegen und ist dieses der Fall, so hat jeder Punkt von $\mathfrak{x}\mathfrak{w}$ seine Projection im Unendlichen. Hieraus bestimmt sich $\mathfrak{x}\mathfrak{w}$ nach (12.).

**Zusatz.** In einem jeden gegebenen Projectionssysteme giebt es eine und zwar nur eine einzige Gerade, parallel mit dem Durchschnitte der Projection, deren Projection im Unendlichen liegt.

15. **Aufgabe.** In einem Projectionssysteme ist die Richtung des Durchschnitts unbestimmt gelassen, man soll denselben so bestimmen, dass die Projection eines gegebenen Punktes im Unendlichen liegt.

**Analyse.** Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, sind $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ bis zum Durchschnittspunkt $\gamma$ verlängert, so muss der gesuchte Durchschnitt der Projection $A$ durch $\gamma$ gehen. Ist ferner $\mathfrak{x}$ der Punkt, dessen Projection im Unendlichen liegen soll, zieht man $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$, verlängert $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ bis zum Durchschnitt $\gamma$ mit $A$ und verbindet endlich $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{a}'$, so muss diese Verbindungslinie $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ parallel mit dem Strahle $\mathfrak{b}$ sein, in welchem $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ liegt. Hierdurch ist zunächst die Lage von $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ und dann vermittelst des Durchschnitts derselben mit $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ ein zweiter Punkt $\mathfrak{y}$ bestimmt, durch welchen die Gerade $A$ gleichfalls gehen muss.

16. **Zusätze.** *a.* In jedem Projectionssysteme, in welchem die Richtung des Durchschnitts unbestimmt gelassen ist, lässt sich diese Richtung immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection eines beliebig gegebenen Punktes im Unendlichen liegt.

*b.* In einem jeden Projectionssysteme, in welchem die Richtung des Durchschnitts der Projection unbestimmt gelassen ist, kann man diese Richtung immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projectionen zweier gegebenen Geraden parallel sind, indem man die Projection des Durchschnitts dieser Geraden ins Unendliche fallen lässt.

*c.* Schneiden sich drei oder mehrere Geraden in einem einzigen Punkte und sind die Projectionen zweier derselben parallel, so sind die Projectionen aller parallel.

*d.* Sind die Projectionen dreier oder mehrerer Geraden in irgend einem Projectionssysteme parallel, so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkte.

17. **Aufgabe.** In einem Projectionssysteme den Durchschnitt der Projection dergestalt zu bestimmen, dass die Projection einer gegebenen Geraden im Unendlichen liegt.

**Analyse.** Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, $\mathfrak{a}'$ die Projection von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{x}\mathfrak{w}$ diejenige Linie, deren Projection im Unendlichen liegen soll, $A$ endlich die verlangte noch unbekannte Lage des Durchschnitts, so muss der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahle $b$ in $A$ liegen; ebenso muss der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{w}\mathfrak{a}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahle $c$ in $A$ liegen. Da nun die Lage beider Parallelen, so wie die der Verbindungslinien $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{w}\mathfrak{a}$ als bekannt angenommen werden können, so lässt sich auch die Lage von $A$ bestimmen.

**Anmerkung.** Schneiden sich $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahle $b$ in $\mathfrak{x}'$, so kann man die Lage von $A$ auch da-

Digitized by Google

durch bestimmen, dass man durch $\gamma'$ eine Parallele durch $\pi_0$ zieht (14. Zusatz.).

18. Zusätze. *a.* Ist in einem Projectionssysteme die Lage des Durchschnitts der Projection unbestimmt gelassen, so kann man dieselbe immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection einer beliebig gegebenen Geraden ins Unendliche fällt.

*b.* Ist in einem Projectionssysteme die Lage des Durchschnitts unbestimmt gelassen, so kann man dieselbe immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection eines beliebig gegebenen Vierecks ein Parallelogramm wird, indem man die Projection der Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten des Vierecks ins Unendliche fallen lässt.

Als Anwendung dieser Theorie mögen vorläufig folgende Beispiele dienen.

**Lehrsatz 1.** Die Endpunkte einer jeden Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden mit den Durchschnittspunkten dieser Diagonale und der beiden anderen Diagonalen des Vierseits vier harmonisch liegende Punkte, und zwar sind die beiden ersteren und die beiden letzteren harmonisch zugeordnete Punkte.

**Beweis.** Man projicire (Taf. II. Fig. 1.) das vollständige Viereck I II III IV dergestalt, dass die Projection von $\mathfrak{B}a'\,\mathfrak{B}'c'$ ein Parallelogramm wird. Alsdann fällt die Projection von $b'$ in die Mitte von $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, die Projection von $b$ aber zugleich mit den Projectionen von $a$ und $c$ ins Unendliche, folglich sind $\mathfrak{B}$, $b'$, $\mathfrak{B}$, $b$ in angegebener Reihenfolge harmonisch liegende Punkte (9. Zusatz *d.*).

**Lehrsatz 2.** Je zwei gegenüberstehende Seiten eines vollständigen Vierecks bilden mit den Verbindungslinien des Durchschnittspunktes dieser beiden Seiten und der Durchschnittspunkte der beiden anderen Paare gegenüberstehender Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch liegende Strahlen und zwar sind die beiden ersteren Seiten und die beiden letzteren Verbindungslinien harmonisch zugeordnete Strahlen.

**Beweis.** Man projicire das Viereck I II III IV (Taf. II. Fig. 2.) dergestalt, dass seine Projection ein Parallelogramm wird, alsdann fällt die Projection von $\alpha$ in die Mitte der Projection von II und III, weil die Projection von $\alpha\beta$ durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen des projicirten Parallelogramms gehen muss. Die Projection von $\gamma$ fällt aber ins Unendliche, folglich sind II, $\alpha$, III, $\gamma$ in der angegebenen Reihenfolge harmonisch liegende Punkte (9. Zusatz *d*), und mithin auch $a$, $b$, $c$, $d$ harmonisch liegende Strahlen und zwar so, dass $a$ dem $c$ und $b$ dem $d$ zugeordnet sind.

**Lehrsatz 3.** Werden zwei Geraden von drei oder mehreren Strahlen eines Strahlenbüschels geschnitten, und verbindet man die wechselseitigen Durchschnittspunkte mit einander, so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Verbindungslinien mit dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden in einer und derselben Geraden.

Digitized by Google

**Beweis.** Sind (Taf. II. Fig. 6.) $A$ und $A'$ die beiden Geraden, $a$, $b$, $c$ die Strahlen des Strahlenbüschels, und man projicirt die Figur dergestalt, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$ zur Projection ein Parallelogramm erhält, so wird auch $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, weil es mit den Strahlen $a$ und $c$ den Punkt $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich hat, zur Projection eine Gerade haben, die mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ parallel ist (16. Zusatz *c.*). Es werden folglich die Projectionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als Durchschnittspunkte der Diagonalen bei Parallelogrammen zwischen den parallelen Projectionen von $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$ gleichen Abstand haben, die Projection von $\mathfrak{B}'$ aber wird ins Unendliche fallen, also liegen die Projectionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\mathfrak{B}'$, folglich auch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\mathfrak{B}'$ selbst in einer und derselben Geraden (8. Zusatz *e.*).

**Anmerkung.** Der umgekehrte Satz lässt sich auf ähnliche Weise darthun.

**Lehrsatz 4.** Liegen von den sechs Ecken eines Sechsecks drei und drei abwechselnd in zwei Geraden, so liegen die drei Durchschnittspunkte je zweier gegenüberstehenden Seiten in einer und derselben Geraden.

**Beweis.** Ist (Taf. II. Fig. 7.) $ABCDEF$ das in Rede stehende Sechseck, in welchem $A$, $C$, $E$ in einer, $B$, $D$, $F$ in einer anderen Geraden liegen, so projicire man dieses Sechseck in $abcdef$ dergestalt, dass $ab$ parallel $de$ und $bc$ parallel $ef$ wird; schneiden sich nun $ace$ und $bdf$ in $k$, so ist, weil $ab$ parallel $de$ ist,

$$ka : ke = kb : kd,$$

und weil $bc$ parallel $ef$ ist,

$$ke : kc = kf : kb,$$

also

$$ka : kc = kf : kd,$$

folglich $cd$ parallel $fa$. Es liegen also die Projectionen der drei Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ im Unendlichen, folglich diese Punkte selbst in einer und derselben Geraden (13. Zusatz.).

**Lehrsatz 5.** Schneiden sich von den sechs Seiten eines Sechsseits drei und drei abwechselnd in zwei Punkten, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüberstehenden Ecken in einem einzigen Punkte.

**Beweis.** Es sei (Taf. II. Fig. 8.) $ABCDEF$ das gegebene Sechsseit, in welchem sich die Seiten 1, 3, 5 im Punkte $G$ und 2, 4, 6 im Punkte $H$ schneiden. Projicirt man nun dies Sechsseit dergestalt in $abcdef$, dass die Projectionen von $G$ und $H$ ins Unendliche fallen, und schneiden sich $ad$ und $be$ in $i$, so ziehe man $ic$, welche die $de$ in $k$ schneidet und verbinde $c$ mit $f$. Weil nun $dc$ parallel $ba$ ist, so verhält sich

$$cl : lb = cd : ba,$$

und, weil $de$ parallel $lb$ ist,

$$lb : md = ba : ma,$$

also, weil überdies noch $md = cb$ und $ma = cf$ ist, auch

$$cl : lb = cd : ef.$$

Digitized by Google

Nun ist aber $dc$ parallel $ef$, also

$$dc : ef = kd : ke,$$

mithin

$$kd : ke = cd : ef,$$

folglich liegen $i$, $c$, $f$ in einer und derselben Geraden, oder $ad$, $be$ und $cf$ schneiden sich in einem und demselben Punkte $i$. Da nun diese drei Geraden Projectionen von $AD$, $BE$ und $CF$ sind, so schneiden sich auch diese in einem und demselben Punkte $I$ (11. Zusatz $a$.).

(Diese Betrachtungen werden späterhin fortgesetzt werden.)

---

# XXV.

## Bemerkungen zu dem Aufsatze III. im Archive der Mathem. und Phys. I. Theil I. Heft.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

---

Die vom Herrn Professor Dr. Grunert gegebene Auflösung der quadratischen Gleichung ist zwar sinnreich, aber nicht die kürzeste. Folgende möchte sich in dieser Hinsicht empfehlen.

Heisse die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

so sind die Wurzeln $x' = -a + \sqrt{a^2+b^2}$ kleinere Wurzel positiv

$x'' = -(a+\sqrt{a^2+b^2})$ grössere - negativ.

Setze $\text{tg } 2\varphi = \frac{b}{a}$, so wird $x' = a\left(\frac{1}{\cos 2\varphi} - 1\right)$

$$= a\,\frac{2\sin\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = a\,\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x' = a\ \text{tg}\ 2\varphi\ .\ \text{tg}\ \varphi = b\ \text{tg}\ \varphi,$$

und eben so $x'' = -\frac{b}{\text{tg}\varphi}$.

Digitized by Google

Diese Gleichungen $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b}{a}$ und $x' = b \cdot \operatorname{tg} \varphi \ldots\ldots x'' = -\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ sind gewiss die bequemsten, welche sich auffinden lassen.

Es folge das im Archive berechnete Beispiel. Dafür ist

$$a = \tfrac{\lambda\lambda}{x} \ldots\ldots b = \sqrt{\tfrac{\mu}{x}} \text{ also } \operatorname{tg} 2\varphi = \tfrac{b}{a} = \sqrt{\tfrac{\mu}{x}} \cdot \tfrac{x}{\lambda\lambda}.$$

Man lasse sich nicht verleiten, den letzten Ausdruck abzukürzen; er ist so am besten, wie sich gleich ergeben wird.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\log b^2 =$ | 1,2006710 ..... | |
| : 2 | $\log \mu =$ | 2,0631006 | |
| | $\log x =$ | 0,8624296 | |
| | $\log b =$ | 0,6003355 | |
| + | $c \cdot \log \frac{\lambda}{2} =$ | 9,0054849 − 10 | |
| − | $\log \operatorname{tg} 2\varphi =$ | 10,4682500 − 10 ..... | $2\varphi =$ 71 . 12 . 39,82 |
| | $\log \operatorname{tg} \varphi =$ | 9,8549589 − 10 ..... | $\varphi =$ 35 . 36 . 19,91 |
| | $\log x' =$ | 0,4552944 ..... | $x' =$ 2,852952 ... |
| | $\log -x'' =$ | 0,7453766 ..... | $x'' = -5{,}563865$ ... |

Die zweite und dritte Zeile werden zuerst hingeschrieben, nach oben subtrahirt, dieser Rest durch 2 dividirt, wodurch die vierte Zeile entsteht u. s. w. Wäre $x$ nicht an die Stelle wo es steht gebracht, so hätte man es noch einmal schreiben müssen, deshalb ist auch der Werth von tg $2\varphi$ nicht abgekürzt.

Es wird kaum zu bemerken nöthig sein, dass für die Grundgleichung

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

woraus $x' = \frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ also die grössere Wurzel positiv wird und $x'' = -b \operatorname{tg} \varphi$ also die kleinere Wurzel negativ wird, die Auflösungsart ganz dieselbe wie oben bleibt.

Für die Grundgleichung .... $x^2 + 2ax + b^2 = 0$

erhält man $\left.\begin{aligned} x' &= -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ x'' &= -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}\right\}$ beide Wurzeln negativ.

Hier setzt man $\sin 2\varphi = \frac{b}{a}$, wodurch $x' = -b \operatorname{tg} \varphi$ und $x'' = -\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ werden.

Endlich entstehen aus der Grundgleichung .... $x^2 - 2ax + b^2 = 0$

die Wurzeln $\left.\begin{aligned} x' &= a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ x'' &= a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}\right\}$ beide Wurzeln positiv

welches die nämlichen, jedoch positive Resultate im Vergleich mit den vorigen giebt.

Ich habe diese Auflösung überall da recht nützlich gefunden, wo ich geometrische Aufgaben dadurch zu lösen hatte; um sie aber

Digitized by Google

noch brauchbarer zu machen, wäre es sehr bequem, mit den trigonometrischen Funktionen noch die Tangenten für die halben Winkel gleich neben den ganzen zu haben.

---

# XXVI.

## Note sur les Tables Trigonométriques.

Par

**Mr. C. J. D. Hill,**

Prof. des math. à l'université de Lund.

---

Les Tables ordinaires ne donnent que sept décimales. Or il se trouve souvent qu'on a besoin de tables plus étendues, et même qu'on doute de l'exactitude d'un chiffre de ceux, qui s'y trouvent. Dans ces cas les formules suivantes seront d'un grand usage.

Soit $\pi$ le rapport de la circonference au diamètre, et $\varphi = 11^\circ\ 15'$ (ou $\varphi = \overset{g}{0},125$ d'après la division nouvelle) et $\psi$ un angle donné, dont l'arc correspondant $x$ (savoir $= \frac{\pi \cdot \psi}{180^\circ}$ ou $= \frac{\pi\psi}{\overset{g}{2},00}$) est plus petit que $\frac{1}{16}$ (ou bien $\psi < 5^\circ\ 37'\ 30'' = \overset{g}{0},0625$).

Cela posé, on aura le sinus de $\psi$, ou

$$S(\psi) = x - \frac{x^3}{6} \cdot (1 - \frac{x^2}{420})^{21}.$$

Cette formule algébrique très simple et même rationelle représente la fonction sinus (reputée jusqu'ici si transcendante) à un degré d'exactitude remarquable, puisque on trouve en employant les développements connus que la correction qu'il faut y appliquer est environ $= \frac{x^9}{4233600} +$ etc.

On peut aussi la vérifier par un exemple numérique. En effet, soit $x = 0,1$, et cette formule donnera Sin $(0,1) = 0,099833416646828\overset{4}{}$, et cette valeur ne différera de la valeur juste (trouvée par interpolation ou autrement) que de deux unités dans la dernière place décimale. Dans les limites prescrites elle donne ainsi quinze chiffres exactes. En y joignant donc les formules connues:

$S(r\varphi + \psi) = Sr\varphi \cdot C\psi + Cr\varphi \cdot S\psi$ et $C\psi = S(g - \psi) = \sqrt{1 - (S\psi)^2}$,

on remplacera les tables trigonométriques à XV décimales complet-

Digitized by Google

tes et à 5400 nombres calculés par une semblable à huit seulement, savoir celle-ci:

| $r$ | Cos. $(r\varphi)$ | Sin. $(r\varphi)$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,98078 52804 03230 | 0,19509 03220 16128 | 7 |
| 2 | 0,92387 95325 11287 | 0,38268 34323 65090 | 6 |
| 3 | 0,83146 96123 02545 | 0,55557 02330 19602 | 5 |
| 4 | 0,70710 67811 86548 | 0,70710 67811 86548 | 4 |
| | Sin. $(r'\varphi)$ | Cos. $(r'\varphi)$ | $r$ |

Et en y appliquant les formules précédentes, on trouvera le sinus d'un angle quelconque à quinze decimales exactes.

Si l'on se contentera de XIII décimales, on employera cette formule plus simple Cos. $x = = 1 - \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \frac{x^2}{60})^6$, dont la correction est $= + \frac{x^8}{604800}$. Dans une approximation plus rude on se contentera des formules Sin. $x = x\,(1 - \frac{x^2}{15})^{\frac{5}{2}}$ et Cos. $x = (1 - \frac{x^2}{3})^{\frac{3}{2}}$, qui sont plus applicables aux Logarithmes. La formule semblable Tang. $x = \frac{x}{(1 - \frac{7x^2}{15})^{\frac{5}{7}}}$ donne encore sept chiffres exacts, lorsque

$$x = 0{,}2 = \tfrac{1}{5}, \text{ ou } x^0 = 11^0\ 18'\ 36''.$$

Au contraire, si les fonctions sont données, on trouvera l'arc correspondant moyennant une petite table des Logarithmes naturels $(L)$ d'après la formule

$$\text{Arc. Tang. } (x) = 2 \cdot (x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \text{etc.}) - \frac{1}{2} \cdot L\,\frac{1+x}{1-x} = \mathcal{L}x.$$

Qu'on demande p. ex. $\mathcal{L}\,\frac{1}{73}$ à XV chiffres exacts:

$$\text{Résol. } \frac{2}{73} = 0{,}027397\,\dot{}\ 260273\,\dot{}\ 9726$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{73}\right)^4 = 0{,}000000\,\dot{}\ 000192\,\dot{}\ 9503$$

$$-\tfrac{1}{2} L\,\tfrac{37}{36} = -0{,}013699\,\dot{}\ 487094\,\dot{}\ 0572$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}\,\tfrac{1}{73} = 0{,}013697\,\dot{}\ 773372\,\dot{}\ 866.$$

Les formules algébriques

$$\mathcal{L}x = \frac{x}{3} \cdot \frac{3024 + 2352\,x^2 + 204{,}8\,x^4}{1008 + 1120\,x^2 + 240\,x^4}$$

Digitized by Google

et Arc Sin $x = x \cdot \left( \frac{4}{9\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \frac{5}{18} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E'}} \right) \right)$,

$$E_1 = (1+\sqrt{\tfrac{3}{5}})^2 \text{ et } E' = (1-\sqrt{\tfrac{3}{5}})^2$$

sont encore très exactes, puisque les corrections sont $\frac{-15}{10080} \cdot x^{11}$ et $+\frac{x^7}{344064}$. La formule Arc. Sin. $x = \frac{x}{9} \cdot \left( 4 + \frac{5}{\sqrt{1-\frac{3}{5}x^2}} \right)$ est plus simple, mais elle exige une correction un peu plus grande $(+\frac{1}{140} \cdot x^7 + ..)$. Néanmoins elle donne Arc. Sin. (0,1) = 0,100167·420, ou il manque moins qu'une unité decimale du IX$^e$ ordre.

# XXVII.

## Ueber die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche sich ein *n*eck durch Diagonalen in lauter *m*ecke zerlegen lässt, mit Bezug auf einige Abhandlungen der Herren Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan und Duhamel in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. IV.

Von

dem Herausgeber.

In den Novis Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. VII. p. 203 findet man eine Abhandlung von Segner, in welcher derselbe eine recurrirende Auflösung für die folgende, nach seiner eignen Angabe ihm von Euler mitgetheilte Aufgabe giebt:



Digitized by Google

**Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein beliebiges Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt.**

In dem Summarium Dissertationum, quas continet novorum Commentariorum T. VII. wird bei der Angabe des Inhalts dieser Abhandlung erinnert, dass a summo quodam Geometra *) die Bemerkung gemacht worden sei, dass die von Segner berechnete Tafel nur bis zu dem Funfzehneck richtig sei, und zugleich wird ohne Beweis eine schöne, von demselben grossen Geometer gefundene ganz independente Formel zur Auflösung des in Rede stehenden Problems, so wie auch eine bis zum Fünfundzwanzigeck berechnete Tafel mitgetheilt.

In neuester Zeit ist diese Aufgabe von den Herren Lamé, Rodrigues, Binet und Catalan, so wie auch in gewisser Beziehung von Herrn Dubamel, wieder aufgenommen, und die Untersuchung vorzüglich darauf gerichtet worden, genügende Beweise für die von Euler gegebene ganz independente Auflösung zu finden, wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben darf, dass die Herren Binet und Catalan auf ganz verschiedenen Wegen auch zu einer bis jetzt noch völlig unbekannten Relation gelangt sind. Alle diesen Gegenstand betreffende Abhandlungen findet man in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. et IV.

Der vorliegende Aufsatz hat nun zunächst den Zweck, die genannten Herren darauf aufmerksam zu machen, dass, was denselben völlig entgangen zu sein scheint, schon ein älterer trefflicher Mathematiker, Nicolaus Fuss, in den Novis Actis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. IX. p. 243. eine weit allgemeinere Aufgabe, die ihm nach seiner eignen Angabe von Johann Friedrich Pfaff vorgelegt worden war, angelöst hat, nämlich die Aufgabe:

**Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein *n*eck durch Diagonalen in lauter *m*ecke zerlegen lässt.**

Die von Fuss für diese allgemeinere Aufgabe gegebene Auflösung, welche ebenfalls nur recurrirend zu der gesuchten Grösse gelangt, will ich jetzt in der Kürze mittheilen.

Zuerst ist klar, dass nicht jedes *n*eck durch Diagonalen in lauter *m*ecke getheilt werden kann, sondern dass, wenn dies möglich sein soll, zwischen den Zahlen $n$ und $m$ eine bestimmte Relation Statt finden muss, und man wird sich durch eine ganz einfache Betrachtung sogleich überzeugen, dass nur entweder $n = m$, oder, indem $k$ eine beliebige positive ganze Zahl, die Null eingeschlossen, bezeichnet,

$$n = (m-1) + k(m-2) + (m-1) = (k+2)m - 2(k+1)$$

sein kann. Aus der letzten Formel erhält man $n = m$ für $k = -1$, und es kann also nur

$$n = (k+2)m - 2(k+1)$$

sein, für $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Setzt man $k+2 = i$, also $k+1 = i-1$, so kann nur

*) Auf jeden Fall Euler.

Digitized by Google

$$n = im - (2i - 2)$$

sein, für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, d. h. für jedes positive ganze $i$, mit Ausschluss der Null.

Aus der Betrachtung, durch welche man zu den Formeln

$$n = m \text{ oder } n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ gelangt, geht zugleich auch unmittelbar hervor, dass die Anzahl der Diagonalen, welche zur Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlich sind, respective 0, $k+1$, und dass die Anzahl der $m$ecke, welche man dadurch erhält, respective 1, $k+2$ ist. Setzt man also allgemein

$$n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $k+1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein $k+2$. Wird also

$$n = im - (2i - 2)$$

für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gesetzt, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $i-1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein $i$.

Wir wollen nun für

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots . i$$

die Anzahl der Zerlegungen der entsprechenden Vielecke in lauter $m$ecke, d. h. die Anzahl der Zerlegungen eines

$m$ecks, $(2m-2)$ecks, $(3m-4)$ecks, $\ldots$ $\{im-(2i-2)\}$ecks

in lauter $m$ecke, respective durch

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots A_i$$

bezeichnen, und wollen zuvörderst bloss eine Winkelspitze, die im Allgemeinen durch $K$ bezeichnet werden mag, eines $\{im-(2i-2)\}$ecks betrachten.

Aus der Winkelspitze $K$ lassen sich offenbar zwei Diagonalen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ausziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$m\text{eck und ein } \{(i-1)m-(2i-4)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun $A_1$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{i-1}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_1 A_{i-1}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Von der Winkelspitze $K$ aus lassen sich ferner zwei Diagonalen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(2m-2)\text{eck und ein } \{(i-2)m-(2i-6)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun $A_2$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{i-2}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_2 A_{i-2}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.



Digitized by Google

Ferner lassen sich von der Winkelspitze $K$ aus zwei Diagonalen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(3n-4)\text{eck und ein } \{(i-3)\,m-(2i-8)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun $A_3$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{i-3}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus $2A_3\,A_{i-3}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Ist nun $i$ eine ungerade, also die Anzahl $i-1$ der zur Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine gerade Zahl; so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf zwei von $K$ ausgehende Diagonalen kommen, von deren jeder unser $\{im-(2i-2)\}$eck in ein

$$\{\tfrac{1}{2}(i-1)\,m-(i-3)\}\text{eck und ein } \{\tfrac{1}{2}(i+1)\,m-(i-1)\}\text{eck}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}(i-1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $2A_{\frac{1}{2}(i-1)}\,A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Wenn dagegen $i$ eine gerade, also die Anzahl $i-1$ der zur Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine ungerade Zahl ist, so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf e i n e von $K$ ausgehende Diagonale kommen, von welcher unser $\{im-(2i-2)\}$eck in zwei

$$\{\tfrac{1}{2}im-(i-2)\}\text{ecke}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}i}$ die Anzahl der Zerlegungen dieses $\{\frac{1}{2}im-(i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $A_{\frac{1}{2}i}\,A_{\frac{1}{2}i}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Die Anzahl aller auf die obige Weise sich ergebenden Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist folglich

$$2A_1\,A_{i-1}+2A_2\,A_{i-2}+2A_3\,A_{i-3}+\ldots+2A_{\frac{1}{2}(i-1)}\,A_{\frac{1}{2}(i+1)}$$

oder

$$2A_1\,A_{i-1}+2A_2\,A_{i-2}+2A_3\,A_{i-3}+\ldots+2A_{\frac{1}{2}(i-2)}\,A_{\frac{1}{2}(i+2)}+A_{\frac{1}{2}i}\,A_{\frac{1}{2}i},$$

jenachdem $i$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, und also, wie leicht in die Augen fallen wird, für jedes gerade oder ungerade $i$

$$A_1\,A_{i-1}+A_2\,A_{i-2}+A_3\,A_{i-3}+\ldots+A_{i-2}\,A_2+A_{i-1}\,A_1,$$

oder, mit Hülfe einer leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung,

$$\sum_{x=1,\,y=i-1}^{x=i-1,\,y=1} A_x\,A_y.$$

Da nun $im-(2i-2)$ die Anzahl der Winkelspitzen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ist, die obigen Betrachtungen sich aber offenbar bei jeder einzelnen Winkelspitze anstellen lassen; so ist

$$\{im-(2i-2)\}\sum_{x=1,\,y=i-1}^{x=i-1,\,y=1} A_x\,A_y$$

die Anzahl der sich auf die in Rede stehende Weise ergebenden Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks, und es frägt sich nun

Digitized by Google

bloss noch, ob unter diesen Zerlegungen nicht vielleicht identische vorkommen, welche Frage auf folgende Art beantwortet werden kann.

Denken wir uns irgend eine bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke; so erscheint dieselbe in der obigen Aufzählung offenbar in Bezug auf eine jede der in ihr vorkommenden Diagonalen, d. h. weil die Anzahl der zu der Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen $i-1$ ist, $i-1$ Mal. Ferner ist aber z. B. die Diagonale $KL$ sowohl bei der Winkelspitze $K$, als auch bei der Winkelspitze $L$ in Betrachtung, oder sowohl von $K$ nach $L$, als auch von $L$ nach $K$ gezogen worden, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt, dass die in Rede stehende bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke in der obigen Aufzählung $2(i-1)$ Mal vorkommt, und da dies nun natürlich von einer jeden solchen Zerlegung gilt, so ist klar, dass

$$\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\sum_{x=1,\,y=i-1}^{x=i-1,\,y=1}A_x\,A_y$$

die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke, oder dass, weil nach dem Obigen die Anzahl dieser Zerlegungen durch $A_i$ bezeichnet wird,

$$A_i=\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\sum_{x=1,\,y=i-1}^{x=i-1,\,y=1}A_x\,A_y$$

ist.

Aus dieser Formel ergeben sich, da offenbar $A_1=1$ ist, die folgenden Gleichungen zur Berechnung der Grössen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, ....:

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,(A_1A_2+A_2A_1),$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(A_1A_3+A_2A_2+A_3A_1),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\,(A_1A_4+A_2A_3+A_3A_2+A_4A_1),$$

u. s. w.

oder

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,.\,2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(2A_1A_3+A_2A_2),$$

Digitized by Google

$$A_5 = \frac{3m-8}{8}\,(2A_1A_4 + 2A_2A_3),$$

$$A_6 = \frac{6m-10}{10}\,(2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3),$$

$$A_7 = \frac{7m-12}{12}\,(2A_1A_6 + 2A_2A_5 + 2A_3A_4),$$

u. s. w.

deren Gesetz ganz deutlich vor Augen liegt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen hat Fuss die folgende Tafel berechnet.

| $i$ | $m=3$ | $m=4$ | $m=5$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 5 | 12 | 22 |
| 4 | 14 | 55 | 140 |
| 5 | 42 | 273 | 969 |
| 6 | 132 | 1428 | 7084 |
| 7 | 429 | 7752 | 53820 |
| 8 | 1430 | 43263 | 420732 |
| 9 | 4862 | 246675 | 3362260 |

| $i$ | $m=6$ | $m=7$ | $m=8$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 35 | 51 | 70 |
| 4 | 285 | 506 | 819 |
| 5 | 2530 | 5481 | 10472 |
| 6 | 23751 | 62832 | 141778 |
| 7 | 231880 | 749398 | 1997688 |
| 8 | 2330445 | 9203634 | 28989675 |
| 9 | 23950355 | 115607310 | 430321633 |

Wenn man aus den obigen recurrirenden Formeln die Grössen $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots\ldots$ nach der Reihe entwickelt, so erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = \frac{m-1}{1},$$

$$A_3 = \frac{(m-1)\,(3m-4)}{1\cdot 2},$$

Digitized by Google

$$A_4 = \frac{(m-1)\,(4m-5)\,(4m-6)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$A_5 = \frac{(m-1)\,(5m-6)\,(5m-7)\,(5m-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

u. s. w.

woraus man durch Induction schliesst, dass allgemein für $i > 2$

$$A_i = \frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,.\,(i-1)}$$

ist, und es würde nun darauf ankommen, diese von Fuss nicht angegebene ganz independente Formel allgemein zu beweisen, welches Stoff zu einer nicht uninteressanten Untersuchung geben dürfte. Für $i = 1$ und $i = 2$ ist nach dem Obigen

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{m-1}{1}.$$

Setzen wir $im-(2i-2) = n$, so erhalten wir

$$i = \frac{n-2}{m-2},$$

und folglich $i = n-2$ für $m = 3$. Also ist nach dem Obigen für $m = 3$ und $n-2 > 2$, d. i. $n > 4$,

$$A_{n-2} = \frac{2n(n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)}.$$

Für $n = 3$ und $n = 4$ ist nach dem Obigen, immer unter der Voraussetzung, dass $m = 3$ ist,

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2.$$

Nach Euler ist für den Fall $m = 3$ allgemein

$$A_{n-2} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,\ldots\,(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,\ldots\,(n-1)},$$

und es wird nun darauf ankommen, die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem vorher gefundenen Ausdrucke von $A_{n-2}$ zu beweisen, d. h. zu zeigen, dass für $n > 4$ allgemein

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,\ldots\,(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,\ldots\,(n-1)}$$

ist, welches sehr leicht auf folgende Art geschehen kann.

Ist die vorstehende Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\,..\,(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-5)\,.\,2^{n-2}}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,\ldots\,.\,(n-1)}$$

richtig, und umgekehrt. Ist aber die letzte Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(2n-5) = 1\,.\,2\,.\,3\,..\,(n-3)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,..\,(2n-5)\,.\,2^{n-2}$$

richtig, und umgekehrt. Wenn aber die letzte Gleichung richtig ist, so ist offenbar auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(2n-5) = 2\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,..\,(2n-6)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,..\,(2n-5),$$

d. i. die Gleichung

Digitized by Google

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-5) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-5)$$

richtig, und umgekehrt. Weil nun die letzte Gleichung eine identische Gleichung ist, so ist hierdurch offenbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\,..\,(2n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-3)} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \ldots (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (n-1)}$$

für $n > 4$ bewiesen.

Aus der Gleichung

$$A_{n-2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \ldots (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (n-1)}$$

ergiebt sich für $n = 3$ und $n = 4$ respective

$$A_1 = 1 \text{ und } A_2 = 2,$$

wie es nach dem Obigen sein muss; daher ist die für den Fall $m = 3$ von Euler gegebene Gleichung ganz allgemein, und lässt sich, wie man sieht, aus dem Obigen ohne Schwierigkeit ableiten.

Euler hat mittelst seiner Formel die folgende Tafel berechnet:

$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 2$$
$$A_3 = 5$$
$$A_4 = 14$$
$$A_5 = 42$$
$$A_6 = 132$$
$$A_7 = 429$$
$$A_8 = 1430$$
$$A_9 = 4862$$
$$A_{10} = 16796$$
$$A_{11} = 58786$$
$$A_{12} = 208012$$
$$A_{13} = 742900$$
$$A_{14} = 2674440$$
$$A_{15} = 9694845$$
$$A_{16} = 35357670$$
$$A_{17} = 129644790$$
$$A_{18} = 477638700$$
$$A_{19} = 1767263190$$
$$A_{20} = 6564120420$$
$$A_{21} = 24466267020$$
$$A_{22} = 91482563640$$
$$A_{23} = 343059613650$$

Der vorliegende Aufsatz ist lediglich geschrieben, nicht um

Digitized by Google

den in Rede stehenden interessanten Gegenstand zu erschöpfen, sondern vielmehr um zu einer neuen Untersuchung desselben anzuregen, welche uns auch nach den von den oben genannten trefflichen französischen Mathematikern mitgetheilten Untersuchungen noch sehr nöthig und in jeder Beziehung wünschenswerth zu sein scheint. Vorzüglich würde es natürlich auf die Auffindung eines ganz allgemeinen Beweises für die oben von uns gegebene Gleichung

$$A_i = \frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(i-1)}$$

ankommen, und diese Gleichung würde entweder aus den von Fuss gefundenen recurrirenden Formeln durch allgemeine Schlüsse abzuleiten oder unabhängig von diesen Formeln zu beweisen sein. In letzterer Beziehung dürfte es vielleicht angemessen sein, zu untersuchen, ob die von den genannten französischen Mathematikern in dem Falle $m=3$ angewandten Methoden nicht vielleicht einer Verallgemeinerung fähig sind, zu welcher Untersuchung ich namentlich die genannten Herren selbst hier aufzufordern mir erlauben möchte. Da übrigens Fuss ausdrücklich bemerkt, dass ihm von Pfaff geschrieben worden sei, dass auch er eine allgemeine Auflösung unsers Problems gefunden habe, so würde sich Herr Professor Dr. Gartz in Halle die Mathematiker gewiss sehr verbinden, wenn er in den, wie wir wissen, in seinen Händen befindlichen nachgelassenen Papieren Pfaffs nachsuchen wollte, ob sich in denselben einige, der öffentlichen Mittheilung werthe Aufzeichnungen über diesen Gegenstand befinden. In dem Archive wird denselben sehr gern eine Stelle eingeräumt werden.

Fuss macht am Ende seines Aufsatzes noch die folgende nicht unbeachtet zu lassende Bemerkung. Man setze

$$Z = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots$$

und

$$Z^{m-1} = C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots\ldots;$$

so ist

$$(m-1)\,l\,(1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots)$$
$$= l\,(C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots\ldots),$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$(m-1)\,\frac{A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots}{1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots}$$
$$= \frac{C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \ldots\ldots}{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots\ldots},$$

woraus sich ohne alle Schwierigkeit die folgenden Gleichungen ergeben:

$$C_1 = \frac{(m-1)\,A_1C}{1},$$

$$C_2 = \frac{(m-2)\,A_1C_1 + (2m-2)\,A_2C}{2},$$

Digitized by Google

$$C_3 = \frac{(m-3)\,A_1C_2 + (2m-3)\,A_2C_1 + (3m-3)\,A_3C}{3},$$

$$C_4 = \frac{(m-4)\,A_1C_3 + (2m-4)\,A_2C_2 + (3m-4)\,A_3C_1 + (4m-4)\,A_4C}{4},$$

u. s. w.

Offenbar muss nun $C=1$ sein, und wenn man

$$C=A_1,\ C_1=A_2,\ C_2=A_3,\ C_3=A_4,\ \ldots.$$

setzt; so werden die obigen Gleichungen

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\,(2A_1A_4+2A_2A_3),$$

$$A_6=\frac{6m-10}{10}\,(2A_1A_5+2A_2A_4+A_3A_3),$$

$$A_7=\frac{7m-12}{12}\,(2A_1A_6+2A_2A_5+2A_3A_4),$$

u. s. w.

Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar, dass die oben durch

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots.$$

bezeichneten Grössen die Coefficienten in der Entwickelung der Function $Z$ in eine Reihe sind, welche den beiden Bedingungen

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.,$$

$$Z^{m-1}=A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4+\ldots.,$$

d. h. welche der Gleichung

$$Z^{m-1}=\frac{Z-1}{x},$$

oder der Gleichung

$$Z^{m-1}-\frac{1}{x}\,Z+\frac{1}{x}=0$$

genügt, und man kann also die in Rede stehenden Grössen auch finden, wenn man die Function $Z$ in eine Reihe entwickelt.

Von dieser schon von Fuss dem Wesentlichen nach angegebenen Methode der Entwickelung der Grössen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$ ist die von Herrn Binet in dem Falle $m=3$ angewandte Methode nicht verschieden. In diesem Falle geht nämlich die obige allgemeine Gleichung in die quadratische Gleichung

$$Z^2-\frac{1}{x}\,Z+\frac{1}{x}=0$$

Digitized by Google

über, und durch Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich

$$Z=\frac{1}{2x}(1\pm\sqrt{1-4x}),$$

wo man aber offenbar das untere Zeichen nehmen, und folglich

$$Z=\frac{1}{2x}\,(1-\sqrt{1-4x})$$

setzen muss, weil offenbar

$$\frac{1}{2x}\,(1+\sqrt{1-4x})$$

für $x=0$ nicht der Einheit gleich werden kann, wie es wegen der Gleichung

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.$$

erforderlich ist.

Entwickelt man nun $\sqrt{1-4x}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhält man

$$Z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2.4}\cdot 4^2x+\frac{1.3}{2.4.6}\cdot 4^3x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot 4^4x^3+\ldots.\right\},$$

und folglich

$$A_{n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)}\cdot 4^{n-1},$$

also, weil $4^{n-1}=2^{2(n-1)}$ ist,

$$A_{n-2}=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}\cdot 2^{n-2},$$

oder

$$A_{n-2}=\frac{2.6.10.14.18\ldots(4n-10)}{2.3.4.5.6\ldots(n-1)},$$

welches ganz die von Euler für den Fall $m=3$ gegebene Formel ist, welche wir schon oben auf anderm Wege gefunden haben.

Digitized by Google

# XXVIII.

## Ueber die Differentialquotienten von log $x$ und $a^x$ in Bezug auf eine Bemerkung des Herrn Liouville in dessen Journal de Mathématiques. Août 1840. p. 280.

Von

dem Herausgeber.

---

Cauchy hat bekanntlich die Entwickelung der wichtigen Differentialquotienten der Functionen log $x$ und $a^x$ auf den Satz gegründet, dass sich die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, der Summe der convergirenden Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots,$$

welche wir wie gewöhnlich durch $e$ bezeichnen wollen, als ihrer Gränze nähert, und diese Entwickelung verdient allerdings ganz besondere Empfehlung, weil sie als eine völlig elementare bezeichnet werden kann, indem dabei ausser dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten und der Lehre von den geometrischen Progressionen bloss noch der Satz vorausgesetzt wird, dass die obige Reihe eine convergirende Reihe ist, und folglich eine bestimmte, vorher durch $e$ bezeichnete Summe hat, wovon man sich aber sehr leicht auf folgende Art überzeugen kann.

Man setze

$$s_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1\ldots n},$$

so ist offenbar für $n > 2$

$$s_n < 2 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1},$$

und folglich nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$s_n < 3 - (\frac{1}{2})^{n-1},$$

also immer $s_n < 3$, da $s_1 = 2$ und $s_2 = 2,5$ ist. Weil nun $s_n$, wenn $n$ wächst, fortwährend wächst, aber, wie gross auch $n$ werden mag, doch immer kleiner als 3 ist, so muss sich $s_n$ offenbar einer gewissen bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr

Digitized by Google

und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn $n$ in's Unendliche wächst, wodurch die Convergenz der Reihe $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots$ bewiesen ist.

Gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des oben im Eingange erwähnten Satzes hat aber Herr Liouville in seinem Journal (Août. 1840. p. 280) die sehr gegründete Einwendung gemacht, dass demselben die Annahme zum Grunde liege, dass das Product $(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{n-1}{m})$ für $m=\infty$ der Einheit gleich werde, welches zwar dann seine Richtigkeit habe, wenn $n$ eine bestimmte von $m$ unabhängige Zahl sei, sich aber dann offenbar nicht mehr behaupten lasse, wenn $n$ von $m$ abhängig, z. B. $n=m$ oder $n=m-1$ sei, und sieht sich dadurch veranlasst, den folgenden Beweis des in Rede stehenden Satzes zu geben, welchen wir hier mittheilen wollen, da wir ihn für völlig streng halten, indem wir zugleich nicht unerwähnt lassen können, dass nach Herrn Liouvilles eigner Bemerkung Herr Lejeune-Dirichlet ähnliche Betrachtungen in einer seiner Abhandlungen sehr glücklich angewandt hat *).

Wir wollen zuerst annehmen, dass $\Theta=\frac{1}{\mu}$ sei, wo $\mu$ eine positive ganze Zahl bezeichnen soll. Dann wird unser Satz bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dass die Grösse

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$$

sich, wenn die positive ganze Zahl $\mu$ in's Unendliche wächst, der Grösse $e$ als ihrer Gränze nähert. Diess lässt sich aber auf folgende Art beweisen.

Es ist

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1..(n-1)}+\frac{1}{1...n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right\},$$

und nach dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist

*) In seinen so eben erschienenen Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Cauchy. T. I. Paris. 1840. p. XXII. hat sich zwar Herr Abbé Moigno gegen die obige Bemerkung des Herrn Liouville erklärt, aber, wie es uns scheint, aus wenig haltbaren Gründen. Auf jeden Fall müsste doch bewiesen werden, dass $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ sich wirklich einer bestimmten Gränze nähert, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, dass $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ für $\Theta=0$ wirklich einen bestimmten Gränzwerth hat, auch für's Erste ganz abgesehen von der Grösse dieses Werths. Aber eben dieses erhellet aus dem auf p. 3. ff. von Herrn Abbé Moigno gegebenen Beweise gar nicht mit der nöthigen Strenge, und diesen Beweis trifft nach unserer Ueberzeugung ganz die obige von Herrn Liouville gemachte sehr richtige und beachtungswerthe Einwendung.

Digitized by Google

$$(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1\cdot 2}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$
$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\cdots(1-\frac{n-2}{\mu})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$$
$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\cdots(1-\frac{n-1}{\mu})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\Big\{1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}$$
$$+\frac{(1-\frac{n}{\mu})(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\cdots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)(n+2)\cdots\mu}\Big\}.$$

Nun ist aber

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$$
$$<1+\frac{1}{n+1}+(\frac{1}{n+1})^2+(\frac{1}{n+1})^3+\cdots\cdots,$$

und folglich nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots<1+\frac{1}{n}.$$

Also kann man

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots=1+\frac{\xi}{n},$$

wo $\xi$ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und folglich nach dem Obigen

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdots(n-1)}+\frac{1}{1\cdots n}(1+\frac{\xi}{n})$$

setzen.

Offenbar ist aber

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\cdots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)(n+2)\cdots\mu}$$
$$<1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden um so mehr

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\cdots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)(n+2)\cdots\mu}<1+\frac{1}{n},$$

also

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\cdots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)(n+2)\cdots\mu}=1+\frac{\eta}{n},$$

wo $\eta$ einen positiven echten Bruch bezeichnet; folglich nach dem Obigen

Digitized by Google

$$(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1\,.\,2}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})\,(1-\frac{2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\ldots(1-\frac{n-2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\ldots(1-\frac{n-1}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}(1+\tfrac{\eta}{n}).$$

Hieraus folgt aber sehr leicht

$$(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\ldots(n-1)}+\frac{1}{1\ldots n}(1+\tfrac{\eta}{n})+\varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine Grösse bezeichnet, welche für jedes bestimmte von $\mu$ unabhängige $n$ sich der Null nähert, wenn $\mu$ wächst, und derselben beliebige nahe gebracht werden kann, wenn man nur $\mu$ gross genug werden lässt.

Aus dem Obigen ergiebt sich nun unmittelbar die Gleichung

$$e-(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}=\frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{\xi-\eta}{n}-\varepsilon.$$

Weil $\xi$ und $\eta$ positive echte Brüche sind, so ist der absolute Werth von

$$\frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{\xi-\eta}{n}$$

nie grösser als

$$\frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n},$$

und es ist folglich, wenn wir den absoluten Werth von $\varepsilon$ im Allgemeinen durch $\varepsilon'$ bezeichnen, der absolute Werth von

$$e-(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}$$

nie grösser als

$$\frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n}+\varepsilon'.$$

Nimmt man nun $n$ nur gross genug an, so kann

$$\frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n}$$

der Null beliebig nahe gebracht werden. Lässt man dann, indem $n$ seinen jetzt bestimmten Werth fortwährend behält, $\mu$ in's Unendliche wachsen, so nähert sich nach dem Obigen $\varepsilon'$ der Null bis zu jedem beliebigen Grade, und man sieht also nun hieraus, dass sich, wenn $\mu$ in's Unendliche wächst,

$$e-(1+\tfrac{1}{\mu})^{\mu}$$

der Null, also $(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$ der Gränze $e$ bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wie behauptet wurde.

Ist ferner $\Theta$ kein positiver Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner eine positive ganze Zahl ist, sondern überhaupt nur

Digitized by Google

eine positive Grösse, so seien $\mu$ und $\mu'=\mu+1$ die beiden positiven ganzen Zahlen, zwischen denen der Bruch $\frac{1}{\Theta}$ liegt. Dann ist

$$\frac{1}{\Theta}=\mu+\varkappa=\mu'-\varkappa',$$

wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ zwei positive echte Brüche sind. Die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ ist offenbar zwischen den Gränzen

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right\}^{1+\frac{\varkappa}{\mu}} \text{ und } \left\{\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)^{\mu'}\right\}^{1-\frac{\varkappa'}{\mu'}}$$

enthalten. Lässt man nun $\Theta$ sich der Null nähern, so werden $\mu$ und $\mu'$ sich dem Unendlichen, folglich nach dem Vorhergehenden die Grössen

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} \text{ und } \left(1+\frac{1}{\mu'}\right)^{\mu'}$$

sich beide der Gränze $e$ nähern. Weil ferner $\varkappa$ und $\varkappa'$ positive echte Brüche sind, so nähern sich, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, $1+\frac{\varkappa}{\mu}$ und $1-\frac{\varkappa'}{\mu'}$ beide der Einheit als ihrer Gränze, und die Grössen

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right\}^{1+\frac{\varkappa}{\mu}} \text{ und } \left\{\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)^{\mu'}\right\}^{1-\frac{\varkappa'}{\mu'}}$$

nähern sich folglich offenbar beide der Grösse $e$ als ihrer Gränze. Da nun aber zwischen diesen Grössen die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ enthalten ist, so nähert sich auch diese Grösse, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, offenbar der Grösse $e$ als ihrer Gränze.

Wenn endlich $\Theta$ negativ ist, so kann, da man sich $\Theta$ der Null nähern lässt, immer angenommen werden, dass der absolute Werth von $\Theta$ kleiner als die Einheit ist. Setzt man nun unter dieser Voraussetzung

$$1+\Theta=\frac{1}{1+\omega},\ \Theta=-\frac{\omega}{1+\omega},\ \omega=-\frac{\Theta}{1+\Theta};$$

so ist offenbar $\omega$ positiv und nähert sich der Null, wenn $\Theta$ sich der Null nähert. Also nähert sich nach dem Vorhergehenden

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$$

der Gränze $e$, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, und $1+\omega$ nähert sich unter derselben Voraussetzung der Einheit als Gränze. Folglich nähert sich offenbar auch

$$\left\{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\}^{1+\omega}$$

der Grösse $e$ als Gränze, wenn $\Theta$ sich der Null nähert. Nun ist aber

$$(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}=\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{-\frac{1+\omega}{\omega}}=\left\{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\}^{1+\omega},$$

Digitized by Google

und es wird sich also auch $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ der Gränze $e$ nähern, wenn $\Theta$ sich der Null nähert.

Hiermit ist nun ganz im Allgemeinen bewiesen, dass die Grösse

$$(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$$

sich, wenn $\Theta$ sich der Null nähert, immer der Grösse

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{1}{1\,.\,.\,.\,4}+\,.\,.\,.\,.$$

als ihrer Gränze nähert.

Von diesem Satze lässt sich jetzt die folgende Anwendung zur Entwickelung der Differentialquotienten der beiden Functionen

$$y=\log x \text{ und } y=a^x$$

machen.

Sei zuerst $y=\log x$, so ist

$$\Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzen wir nun $\Delta x=\Theta x$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log(1+\Theta)}{\Theta x}=\frac{\log\,.\,(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}}{x}.$$

Wenn $\Delta x$ sich der Null nähert, so nähert sich offenbar auch $\Theta$ der Null, und $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ nähert sich folglich der Gränze $e$, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist. Also nähert der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich der Gränze $\frac{\log e}{x}$, wenn $\Delta x$ sich der Null nähert. Die Gränze, welcher der Diffenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich nähert, wenn $\Delta x$ sich der Null nähert, ist aber bekanntlich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und es ist folglich

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{x} \text{ oder } d\log x=\frac{\log e}{x}\,dx.$$

Sei ferner $y=a^x$, so ist $\log y=x\log a$, und folglich

$$x=\frac{\log y}{\log a}.$$

Daher ist nach einem bekannten Elementarsatze der Differentialrechnung und nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{d\log y}{dy}=\frac{\log e}{y\log a}=\frac{\log e}{a^x\log a}.$$

Nach einem andern bekannten Satze der Differentialrechnung ist aber



Digitized by Google

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^x \text{ oder } d \cdot a^x = \frac{\log a}{\log e} a^x dx.$$

Die aus dem Obigen bekannte Zahl $e$ betrachtet man bekanntlich als die Basis eines eignen logarithmischen Systems, welches man das natürliche oder hyperbolische System nennt, und bezeichnet die Logarithmen dieses Systems gewöhnlich bloss durch $l$. Ist nun $b$ die Basis der durch log bezeichneten Logarithmen und $N$ eine beliebige Zahl, so ist

$$N = b^{\log N} = e^{lN},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\log N \cdot lb = lN \text{ oder } \log N = \frac{lN}{lb}.$$

Folglich ist

$$\log e = \frac{le}{lb} = \frac{1}{lb},$$

und daher nach dem Obigen

$$d \log x = \frac{dx}{xlb}, \text{ also } dlx = \frac{dx}{x}.$$

Ferner ist

$$\log a = \frac{la}{lb}, \log e = \frac{le}{lb} = \frac{1}{lb},$$

also

$$\frac{\log a}{\log e} = la,$$

und folglich nach dem Obigen

$$d \cdot a^x = a^x la dx.$$

Digitized by Google

# XXIX.

## Mathematische Bemerkungen von dem Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover.

1.

Euklid stellt folgenden Satz an die Spitze des 10ten Buchs: „Wenn zwei ungleiche Grössen gegeben sind und es wird von der grösseren mehr als die Hälfte (oder auch nur die Hälfte) weggenommen, von dem Reste abermals mehr als die Hälfte (oder auch nur die Hälfte), und dies immer so fort: so bleibt einmal ein Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Grösse."

Man kann diesem Satze folgende Erweiterung geben: „Wenn von einer gegebenen Grösse $G$ der $m$te Theil, d. h. $\frac{1}{m}G$. weggenommen wird, von dem bleibenden Reste wiederum dessen $m$ter Theil und dies immer so fort: so bleibt einmal ein Rest, welcher kleiner ist, als jeder gegebene $u$te Theil der Grösse $G$."

Beweis: Es bezeichne $\underset{(r)}{G}$ den $r$ten Rest, so ist

$$\underset{(1)}{G} = G - \frac{1}{m} \cdot G = \frac{m-1}{m} \cdot G$$

$$\underset{(2)}{G} = \frac{(m-1)}{m} \cdot \underset{(1)}{G} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cdot G$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\underset{(r)}{G} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^r \cdot G$$

Nun wird $\underset{(r)}{G} < \frac{1}{u} \cdot G$ sein, wenn $\left(\frac{m-1}{m}\right)^r < \frac{1}{u}$ oder $\left(\frac{m}{m-1}\right)^r > u$, also, auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, wenn $r(\log m - \log (m-1)) > \log u$ d. h. $r > \frac{\log u}{\log m - \log (m-1)}$ ist. Da nun in dieser Beziehung $m$ und $u$ positive Zahlenwerthe bedeuten die grösser als 1 sind, so hat der Quotient $\frac{\log u}{\log m - \log (m-1)}$ einen in jedem vorliegenden Falle angebbaren positiven Zahlenwerth, mithin kann die für die ganze Zahl $r$ geforderte Bedingung jedesmal erfüllt werden.

Es folgt also hieraus, dass durch Fortsetzung der Wegnahme des $m$ten Theils jedes Restes einmal ein Rest kommen wird kleiner



Digitized by Google

wie jeder gegebene Theil der Grösse und noch um so mehr, wenn bei jeder Wegnahme noch mehr wie der $m$te Theil genommen wird. Bei der Lehre von der Convergenz der Reihen lässt sich von diesem erweiterten Satze nützliche Anwendung machen.

---

## II.

Bei der Bildung successiver Differenzreihen aus einerlei Grundreihe lässt sich die Frage aufwerfen „wie und aus welchen Gliedern der Grundreihe ist das $n$te Glied der $m$ten Differenzreihe zusammengesetzt?“ Die Beantwortung wird durch folgende combinatorische Betrachtung sehr erleichtert.

Es sei $a, b, c, d, \ldots$ eine Reihe von Elementen, aus denen durch Zusammenstellung von je zwei benachbarten eine Reihe von Complexionen $ab, bc, cd, \ldots$ gebildet wird, so entsteht in dieser letzteren jede nachfolgende Complexion dadurch aus der vorhergehenden Complexion, dass jedes Element mit dem nächsthöheren vertauscht wird. Wird aus der so gebildeten Reihe auf gleiche Weise eine neue Reihe von Complexionen $abbc, bccd, \ldots$ dargestellt, so gilt in dieser für die Entstehung einer nachfolgenden aus der vorhergehenden Complexion dasselbe Gesetz; das höchste Element der nachfolgenden kommt also nicht in der vorhergehenden und das niedrigste der vorhergehenden nicht in der nachfolgenden Complexion vor, die zwischenliegenden Elemente sind aber in beiden zugleich vorhanden. Eine neue Zusammenstellung von zwei benachbarten Complexionen wird also das niedrigste Element der vorhergehenden, das höchste der nachfolgenden und die zwischenliegenden Elemente beider enthalten.

Hieraus folgt, dass in jeder neuen Reihe von Complexionen, die durch Zusammenstellung von je zwei benachbarten Complexionen einer vorhergehenden Reihe gebildet wird,

1) jede nachfolgende Complexion aus der vorhergehenden durch Vertauschung der Elemente mit den nächsthöheren erhalten wird;
2) in die Zusammensetzung jeder Complexion ein successives Element mehr eingeht als in die der vorhergehenden Reihe.

Da nun in der 1ten Complexionen-Reihe in jeder Complexion 2 successive Elemente vorkommen, so enthalten die Complexionen der 2ten Reihe 3, der 3ten Reihe 4 und allgemein der $m$ten Reihe $(m+1)$ successive Elemente. Das Anfangs-Element der Complexion bestimmt sich dabei durch die Stelle welche die Complexion in ihrer Reihe einnimmt; es ist das gleichhohe Element aus der Reihe der Elemente, d. h. das Element, welches in dieser in der gleichhohen Stelle vorkommt.

Die Zahlen welche die Zusammensetzung der Complexionen aus den successiven Elementen angeben, sind für die $n$te Complexionen-Reihe die Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz. Denn offenbar sind für die 1te Complexionen-Reihe $ab, bc, cd, \ldots$ jene Wiederholungszahlen 1 und 1 die Binomial-Coefficienten der 1ten Potenz, desgleichen für die 2te Complexionen-Reihe $abbc, bccd, \ldots$

Digitized by Google

die Wiederholungszahlen 1, 2, 1 die Binomial-Coefficienten der 2ten Potenz, überhaupt aber setzen sich bei der Zusammenstellung von zwei benachbarten Complexionen der $r$ten Reihe zu einer Complexion der $(r+1)$ten Reihe ihre Wiederholungszahlen eben so für die neue Complexion zusammen, wie, bei der Zusammenstellung der beiden Partial-Produkte der $r$ten Potenz des Binomiums in den ersten und zweiten Theil des Binomiums zur Darstellung der $(r+1)$ten Potenz, sich die Binomial-Coefficienten der $r$ten Potenz zu denen der $(r+1)$ten Potenz zusammensetzen *).

Bis hieher ist für die arithmetische Beziehung der Zusammenstellung von je zwei benachbarten Gliedern der einen Reihe zu einem Gliede einer neuen Reihe nichts angenommen worden. Fügt man die Bedingung hinzu, dass das vorhergehende Glied mit entgegengesetztem Zeichen zum nachfolgenden hinzugesetzt werden soll, wie es das Schema

$$a,\ b,\ c,\ \ldots.$$
$$\overline{ab},\ \overline{bc},\ \overline{cd},\ \ldots.$$
$$a\overline{bb}c,\ b\overline{cc}d,\ c\overline{dd}e,\ \ldots$$
$$\overline{abbb}\overline{ccc}d,\ \overline{bccc}\overline{ddd}e,\ \overline{cddd}\overline{eee}f,\ \ldots.$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

besagt, wo das — Zeichen über dem Elemente angedeutet ist, so haben die in zwei benachbarten Complexionen derselben Reihe enthaltenen gleichen Elemente entgegengesetzte Zeichen, und da bei der Zusammenstellung zu einer neuen Complexion das Zeichen in der vorhergehenden umgekehrt wird, so bekommen dadurch die gleichen Elemente aus beiden einerlei Zeichen, nämlich dasselbe was sie in der nachfolgenden hatten; es ändern sich also die Wiederholungszahlen nicht, welche für die neue Complexion hervorgehen. Nun hat in der ersten Complexionen-Reihe das letzte Element der Complexion das ursprüngliche + Zeichen, mithin auch in jeder folgenden Complexionen-Reihe; da ferner in den Complexionen der 1sten Reihe das Zeichen von Element zu Element wechselt, so wird es auch in den Complexionen der folgenden Reihen von Element zu Element wechseln. Zur Anwendung auf die vorliegende Frage sei die Grundreihe durch

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots. + y_n + \ldots$$

und die $m$te Differenzreihe durch

$$\overset{m}{\underset{0}{\Delta}}y + \overset{m}{\underset{1}{\Delta}}y + \overset{m}{\underset{2}{\Delta}}y + \ldots. + \overset{m}{\underset{n}{\Delta}}y + \ldots.$$

---

*) 1 1
1 1
1 2 1
1 2 1
1 3 3 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Digitized by Google

angedeutet, so dass das $n$te auf das Anfangsglied folgende Glied für die Grundreihe durch $y_n$, für die $m$te Differenzreihe durch ${}^m_0\Delta y_n$ bezeichnet wird. Lässt man nun die vorhin gebrauchten combinatorischen Elemente $a$, $b$, $c$, ... die Glieder dieser Grundreihe bedeuten und der Bequemlichkeit des Vorzeichens wegen in den Complexionen die Elemente in fallender Ordnung auf einander folgen, so ergiebt sich unmittelbar

$${}^m_0\Delta y = y_m - {}^m\mathfrak{B}_1 y_{m-1} + {}^m\mathfrak{B}_2 y_{m-2} - \ldots (-1)^r {}^m\mathfrak{B}_r . y_{m-r} \ldots (-1)^m . y_0$$

$${}^m_n\Delta y = y_{m+n} - {}^m\mathfrak{B}_1 y_{m+n-1} + \ldots (-1)^r {}^m\mathfrak{B}_r . y_{m+n-r} \ldots (-1)^m y_n$$

wobei ${}^m\mathfrak{B}_r$ den $r$ten Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz, nämlich ${}^m\mathfrak{B}_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-(r-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}$ bezeichnet, so dass ${}^m\mathfrak{B}_0 = 1$, ${}^m\mathfrak{B}_1 = m$ ist.

Wenn man wiederum die Anfangsglieder der Grund- oder Hauptreihe und der successiven Differenzreihen je zwei und zwei, das nachfolgende zu dem vorhergehenden addirt, so erhält man der Folge nach die ersten Glieder dieser Reihen, aus diesen auf gleiche Weise die Reihe der zweiten Glieder u. s. w. f. Die Anfangsglieder in den so erhaltenen Reihen sind die successiven Glieder der Hauptreihe. Die vorhin angestellte combinatorische Betrachtung lässt sich hierauf unmittelbar anwenden, indem man die Anfangsglieder der Reihen als die Elemente und die paarweise Zusammenstellung als eine Addition ansieht. Man erhält also

$$y_m = y_0 + {}^m\mathfrak{B}_1 {}^1_0\Delta y + {}^m\mathfrak{B}_2 {}^2_0\Delta y + \ldots + {}^m\mathfrak{B}_r {}^r_0\Delta y + \ldots + {}^m_0\Delta y$$

oder fallend geordnet

$$y_m = {}^m_0\Delta y + {}^m\mathfrak{B}_1 {}^{m-1}_0\Delta y + {}^m\mathfrak{B}_2 {}^{m-2}_0\Delta y + \ldots + {}^m\mathfrak{B}_r {}^{m-r}_0\Delta y + \ldots + y_0.$$

Sieht man die Hauptreihe $y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$ selbst als die erste Differenzreihe einer summatorischen Reihe an, deren Anfangsglied 0 ist, $0 + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_m + \ldots$, so hat man durch Anwendung derselben Betrachtung

$$S_m = 0 + {}^m\mathfrak{B}_1 y_0 + {}^m\mathfrak{B}_2 {}^1_0\Delta y + {}^m\mathfrak{B}_3 {}^2_0\Delta y + \ldots + {}^m\mathfrak{B}_r {}^{r-1}_0\Delta y + \ldots + {}^{m-1}_0\Delta y$$

wodurch die Zusammensetzung des summatorischen Gliedes der Hauptreihe aus ihrem Anfangsgliede und aus den Anfangsgliedern der successiven Differenzreihen gegeben wird.

Digitized by Google

# XXX.

## Solutio casus irreducibilis optica oder Trisectio et multisectio anguli optica.

Von dem

**Herrn Professor C. J. D. Hill**

an der Universität zu Lund.

(Nach dem Schwedischen des Herrn Verfassers von dem Herrn Doctor Creplin zu Greifswald.) *)

---

Es seien $OXX''$ und $OX'X'''$ (Taf. II. Fig. 9.) zwei gegen dieselbe Ebene winkelrechte, um $O$ bewegliche Planspiegel und $\varphi$ ein Winkel, dessen Theilung bekannt ist **), z. B. ein rechter Winkel. Man nehme nun die Linie $OX$, die wir durch $X$ bezeichnen wollen, an, und setze die bekannte Grösse $XS\varphi = c$. Soll dann z. B. der Winkel $\psi$ in drei gleiche Theile getheilt werden, so nehme man die Linie $OX''' = X'''$ so an, dass $X'''S\psi = c$ ist, und findet dann

$$\tfrac{1}{3}\psi = \tfrac{1}{3}\varphi - \omega \text{ ***)},$$

wenn die Spiegel so um $O$ gedreht werden, dass ein von dem Punkte $X$, welcher so wie der Punkt $X'''$ vorher durch eine Metallspitze oder einen Diamant eingegraben sein kann, ausgehender Strahl $XX'X''$ nach zwei Reflexionen auf den Punkt $X'''$ fällt. Denn dann ist der Winkel $\varphi' = \varphi'$, $\varphi'' = \varphi''$, ferner

$$\varphi' = \varphi - \omega,$$
$$\varphi'' = \varphi' - \omega = \varphi - 2\omega,$$
$$\varphi''' = \varphi'' - \omega = \varphi - 3\omega;$$

---

*) Ich hoffe, dass der Sinn des Herrn Verfs. überall richtig getroffen sein wird. G.

**) D. h. welchen man, wenn überhaupt die Aufgabe die Theilung eines gegebenen Winkels in $n$ gleiche Theile zu theilen verlangt, in $n$ gleiche Theile zu theilen im Stande ist. Einen solchen Winkel würde man sich immer leicht dadurch bilden können, dass man irgend einen beliebigen Winkel $n$ mal neben einander legte. G.

***) Statt des hier gebrauchten Zeichens $\omega$ steht im Manuscripte und in den Figuren ein nur schwer erkennbares Zeichen, dessen Stelle durch den Buchstaben $\omega$, wie ich glaube, zweckmässig vertreten werden kann. $S\varphi$ bedeutet immer sin $\varphi$. G.

Digitized by Google

und, wenn $OX' = X'$, $OX'' = X''$ gesetzt wird,

$$X : X' = S\varphi' : S\varphi,$$
$$X' : X'' = S\varphi'' : S\varphi',$$
$$X'' : X''' = S\varphi''' : S\varphi'';$$

also componendo

$$X : X''' = S\varphi''' : S\varphi,$$

folglich

$$X'''S\varphi''' = XS\varphi.$$

Wir machten aber

$$X'''S\psi = c = XS\varphi.$$

Also ist $S\varphi''' = S\psi$, und folglich $\varphi'' = \psi = \varphi - 3\omega$ (oder $\varphi''' = \psi - 2n\pi$, wenn $\psi > 2\pi$, u. s. w.), woraus $\frac{1}{3}\psi = \frac{1}{3}\varphi - \omega$, w. z. b. w.

So bekommt man auch, wenn $X^V S\varphi^V = c$ ist, nach vier Reflexionen $\frac{1}{5}\varphi^V$, wobei man Taf. II. Fig. 10. zu vergleichen hat, u. s. w.

Anm. 1. Es versteht sich, dass umgekehrt auch $OX^V = X^V$ nach Gefallen angenommen und $OX = \frac{X^V S\varphi^V}{S\varphi}$ gemacht werden kann. Dies ist jedoch nicht so genau in der Praxis wie das Vorige.

Anm. 2. Die Trisectio anguli kann auch durch eine einzige Reflexion bewerkstelligt werden.

Denn es sei der Winkel $ACB$ (Taf. II. Fig. 11.) gegeben, $ABD$ ein Kreis und $D$ ein gegen den Radius $CD$ und die Ebene des Kreises winkelrechter Planspiegel, und es werde ein unendlich weit entfernter Gesichtspunkt (Mire) $M$ für den über $B$ hinaus verlängerten Radius $CB$ gesucht. Ferner werde der Spiegel $D$ nebst dem Radius $CD$ so lange gedreht, bis der Punkt $M$ durch Reflexion von dem Spiegel $D$ aus dem Punkte $A$ gerade in dem durch einen Diamantstrich angedeuteten Durchschnittspunkte des Radius $CD$ mit dem Spiegel gesehen wird. Verlängert man dann $CD$ über $C$ hinaus bis nach $E$, so ist der Winkel $ECB = \frac{1}{3}ACB$, oder der gegebene Winkel $ACB$ dreigetheilt durch $CE$. Denn es ist der Winkel $ECB = EDM = EDA = \frac{1}{2}ACE$, und folglich $ACB = ACE + ECB = (2 + 1) \cdot ECB = 3 \cdot ECB$, wie behauptet wurde.

Anm. 3. Dies wird leicht auf dem Felde oder auf einer Theilmaschine bewerkstelligt.

Digitized by Google

# XXXI.

## Uebungsaufgaben für Schüler *).

1) Man soll beweisen, dass immer

$$\frac{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(ab_1-a_1b)^2}{1+a_1^2+b_1^2} \leqq (a-a_1)^2+(b-b_1)^2$$

ist.

2) Wenn man eine gerade Linie nach dem äussern und mittlern Verhältnisse theilt, so wird das Verhältniss der beiden Segmente zu einander durch den in's Unendliche fortlaufende Kettenbruch

$$1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\text{etc.}$$

ausgedrückt.

3) Die Zahlen $x$ und $y$ so zu bestimmen, dass die Summen $x+y$ und $x^2+y^2$ vollkommene Quadratzahlen werden.

4) Es sei $AB$ ein beliebiger Kreisbogen, $D$ dessen Mittelpunkt, so dass nämlich Arc $AD$ = Arc $BD$ ist, und $E$ ein anderer beliebiger Punkt in demselben. Man soll beweisen, dass, wo man auch den Punkt $E$ in dem Kreisbogen $AB$ annehmen mag, immer Chord $DA$ + Chord $DB$ > Chord $EA$ + Chord $EB$ ist.

5) Die folgenden Eigenschaften der Tangenten der Parabel sind zu beweisen **).

Es seien an eine Parabel, deren Brennpunkt $F$ ist, die drei Tangenten $AB$, $CD$, $CE$ gezogen, so finden die folgenden Relationen Statt: ***)

a. Der von zwei Tangenten an ihrem Durchschnittspunkte gebildete Winkel ist der Summe der von ihnen mit den nach ihren Berührungspunkten gezogenen Vectoren eingeschlossenen Winkel gleich, d. h. es ist z. B. $\angle DCE = \angle CDF + \angle CEF$.

---

*) Nach einer von Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt mir gemachten gütigen Mittheilung werden in Cambridge alljährlich die Aufgaben, welche bei den Prüfungen den Schülern gegeben werden, gedruckt. Es sind von mir die nöthigen Veranstaltungen getroffen worden, dass diese gewiss viel Gutes enthaltenden Aufgaben möglichst zeitig in meine Hände gelangen, und Herr Professor Dr. Mensing wird die Güte haben, das Brauchbare aus denselben im Archive mitzutheilen.

**) Diese Eigenschaften der Parabel sind aus einem sehr lesenswerthen kleinen Aufsatze des Herrn Directors Rümker zu Hamburg in dem Jahresberichte der dortigen mathem. Gesellsch. für 1840 entlehnt.

***) Die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst entwerfen können. Die Tangente $AB$ liegt zwischen den sich in $C$ schneidenden, die Parabel in $D$ und $E$ berührenden Tangenten $CD$ und $CE$, schneidet die erste in $A$, die zweite in $B$, und berührt die Parabel in $G$.

Digitized by Google

Punkte $A_1$ die beiden 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA_1$, $A_1'A_1A$, so hat man alle Data, welche zur Bestimmung der Coordinaten $x$, $y$ und $x_1$, $y_1$ der beiden gesuchten Punkte $A$ und $A_1$ nöthig sind, wie jetzt gezeigt werden soll.

Die Entfernungen des Punktes $A$ von den Punkten $A'$, $A_1'$ wollen wir durch $\varrho$, $\varrho_1$, die Entfernungen des Punktes $A_1$ von den Punkten $A'$, $A_1'$ durch $\varrho'$, $\varrho_1'$, die Entfernung $AA_1$ der gesuchten Punkte $A$ und $A_1$ von einander durch $r$ bezeichnen. Denken wir uns ferner durch den Punkt $A$ ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta$ gelegt, so soll der von der Linie $AA_1$ mit dem positiven Theile der Axe der $\xi$ eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der $\xi$ an durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch von 0 bis 360° zählt, durch $\varphi$ bezeichnet werden. Eben so wollen wir, wenn wir uns durch den Punkt $A_1$ ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles System der $\xi_1$ $\eta_1$ gelegt denken, den von der Linie $A_1A$ mit dem positiven Theile der Axe der $\xi$ eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der $\xi_1$ an durch den rechten Winkel $(\xi_1\ \eta_1)$ hindurch von 0 bis 360° zählen, durch $\varphi_1$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt haben wir nun nach den Gleichungen 2. in dem Aufsatze Nr. XIV. offenbar die folgenden Ausdrücke:

$$1.\quad \begin{cases} x_1 = x + r\cos\varphi, & y_1 = y + r\sin\varphi; \\ x' = x + \varrho\cos(\varphi+\alpha), & y' = y + \varrho\sin(\varphi+\alpha); \\ x_1' = x + \varrho_1\cos(\varphi+\beta), & y_1' = y + \varrho_1\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

und

$$2.\quad \begin{cases} x = x_1 + r\cos\varphi_1, & y = y_1 + r\sin\varphi_1; \\ x' = x_1 + \varrho'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y' = y_1 + \varrho'\sin(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_1' = x_1 + \varrho_1'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_1' = y_1 + \varrho_1'\sin(\varphi_1+\beta_1); \end{cases}$$

wo, wie sogleich erhellen wird, die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$ aus den gemessenen Winkeln immer leicht gefunden werden können.

Aus den ersten Gleichungen in den Systemen 1. und 2. folgt

$$\sin\varphi = -\sin\varphi_1,\ \cos\varphi = -\cos\varphi_1,$$

also

$$\sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1 = \sin(\varphi-\varphi_1) = 0,$$

und folglich

$$\varphi - \varphi_1 = \varkappa\pi,\ \varphi_1 = \varphi - \varkappa\pi,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bezeichnet. Wäre diese ganze Zahl gerade, so wäre

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi,\ \cos\varphi_1 = \cos\varphi,$$

da doch nach dem Obigen

$$\sin\varphi_1 = -\sin\varphi,\ \cos\varphi_1 = -\cos\varphi$$

ist. Also ist $\varkappa$ eine ungerade Zahl, und folglich

$$\cos(\varphi_1+\alpha_1) = \cos(\varphi+\alpha_1-\varkappa\pi) = -\cos(\varphi+\alpha_1),$$
$$\sin(\varphi_1+\alpha_1) = \sin(\varphi+\alpha_1-\varkappa\pi) = -\sin(\varphi+\alpha_1),$$

Digitized by Google

$$\cos(\varphi_1+\beta_1)=\cos(\varphi+\beta_1-\varkappa\pi)=-\cos(\varphi+\beta_1),$$
$$\sin(\varphi_1+\beta_1)=\sin(\varphi+\beta_1-\varkappa\pi)=-\sin(\varphi+\beta_1).$$

Daher haben wir jetzt nach dem Obigen zwischen den zehn unbekannten Grössen $x$, $y$, $x_1$, $y_1$, $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho'$, $\varrho_1'$, $r$, $\varphi$ die zehn folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} x-x_1=-r\cos\varphi, & y-y_1=-r\sin\varphi; \\ x'=x+\varrho\cos(\varphi+\alpha), & y'=y+\varrho\sin(\varphi+\alpha), \\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\beta), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\beta); \\ x'=x_1-\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1), & y'=y_1-\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1), \\ x_1'=x_1-\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1), & y_1'=y_1-\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1); \end{cases}$$

aus denen also die in Rede stehenden zehn unbekannten Grössen zu bestimmen sind.

Eliminirt man $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho'$, $\varrho_1'$, so behält man die sechs folgenden Gleichungen:

$$4.\quad \begin{cases} x-x_1=-r\cos\varphi,\ y-y_1=-r\sin\varphi; \\ \frac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\ \frac{y_1'-y}{x_1'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta); \\ \frac{y'-y_1}{x'-x_1}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha_1),\ \frac{y_1'-y_1}{x_1'-x_1}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta_1) \end{cases}$$

zwischen den sechs unbekannten Grössen $x$, $y$, $x_1$, $y_1$, $r$, $\varphi$.

Durch Verbindung der beiden ersten mit den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{y'-y-r\sin\varphi}{x'-x-r\cos\varphi}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha_1),\ \frac{y_1'-y-r\sin\varphi}{x_1'-x-r\cos\varphi}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta_1)$$

oder

$$5.\quad \begin{cases} (x'-x)\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y)\cos(\varphi+\alpha_1)=r\sin\alpha_1, \\ (x_1'-x)\sin(\varphi+\beta_1)-(y_1'-y)\cos(\varphi+\beta_1)=r\sin\beta_1; \end{cases}$$

und folglich durch Division

$$6.\quad \frac{(x'-x)\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y)\cos(\varphi+\alpha_1)}{(x_1'-x)\sin(\varphi+\beta_1)-(y_1'-y)\cos(\varphi+\beta_1)}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}.$$

Bringt man die zweiten Gleichungen in 4. auf die Form

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\ \frac{y'-y_1'-(y'-y)}{x'-x_1'-(x'-x)}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta)$$

oder auf die Form

$$\frac{y'-y_1'+(y_1'-y)}{x'-x_1'+(x_1'-x)}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\ \frac{y_1'-y}{x_1'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta);$$

so erhält man aus denselben leicht

$$x'-x=\frac{(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta)-(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta)}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)}},$$

$$y'-y=\frac{(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta)-(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta)}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)}};$$

Digitized by Google

$$x_1' - x = \frac{(y' - y_1')\cos(\varphi+\alpha) - (x' - x_1')\sin(\varphi+\alpha)}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\varphi+\beta)}},$$

$$y_1' - y = \frac{(y' - y_1')\cos(\varphi+\alpha) - (x' - x_1')\sin(\varphi+\alpha)}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\varphi+\beta)}}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke für $x' - x$, $y' - y$, $x_1' - x$, $y_1' - y$ in die Gleichung 6. ein, so wird dieselbe

$$\frac{(x' - x_1')\sin(\varphi+\beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\beta)}{(x' - x_1')\sin(\varphi+\alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\beta-\beta_1)} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

oder

$$7.\quad \frac{(x' - x_1')\sin(\varphi+\beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\beta)}{(x' - x_1')\sin(\varphi+\alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\alpha)} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta-\beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha-\alpha_1)}.$$

Aus dieser Gleichung könnte man nun leicht tang $\varphi$ entwickeln, und so zu der Auflösung der Aufgabe gelangen. Besser wird man aber auf folgende Art verfahren.

Aus den beiden Gleichungen

$$8.\quad x' - x_1' = R\cos E,\ y' - y_1' = R\sin E$$

bestimme man auf bekannte Weise die beiden Grössen $R$ und $E$, so hat man nach 7. die Gleichung

$$9.\quad \frac{\sin(\varphi+\beta-E)}{\sin(\varphi+\alpha-E)} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta-\beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha-\alpha_1)};$$

also, wie man hieraus, wenn man auf beiden Seiten die Einheit addirt und subtrahirt, und dann dividirt, leicht findet:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\tang\{E-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varphi\} = \frac{\sin\alpha_1\sin(\beta-\beta_1)+\sin\beta_1\sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin(\beta-\beta_1)-\sin\beta_1\sin(\alpha-\alpha_1)},$$

und folglich

$$10.\quad \tang\{E-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varphi\} = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\frac{\sin\alpha_1\sin(\beta-\beta_1)+\sin\beta_1\sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin(\beta-\beta_1)-\sin\beta_1\sin(\alpha-\alpha_1)}.$$

Berechnet man aber den Hülfswinkel $\Theta$ mittelst der Formel

$$11.\quad \tang\Theta = \frac{\sin\beta_1\sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin(\beta-\beta_1)},$$

so hat man zur Berechnung von $\varphi$ nach 10. die Formel

$$12.\quad \tang\{E-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varphi\} = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\tang(45^\circ+\Theta).$$

Aus 3. ergiebt sich

$$x' - x_1' = \varrho\cos(\varphi+\alpha) - \varrho_1\cos(\varphi+\beta),$$
$$y' - y_1' = \varrho\sin(\varphi+\alpha) - \varrho_1\sin(\varphi+\beta);$$

und folglich

$$13.\quad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{(x' - x_1')\sin(\varphi+\beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \\ \varrho_1 = -\dfrac{(x' - x_1')\sin(\varphi+\alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}; \end{cases}$$

also nach 8.

Digitized by Google

$$14.\quad \varrho = -R\frac{\sin(\varphi+\beta-E)}{\sin(\alpha-\beta)},\quad \varrho_1 = -R\frac{\sin(\varphi+\alpha-E)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ferner ist nach 3.

$$x'-x_1' = -\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1)+\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1),$$
$$y'-y_1' = -\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1)+\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1);$$

und folglich

$$15.\quad \begin{cases}\varrho' = \dfrac{(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta_1)-(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta_1)}{\sin(\alpha_1-\beta)},\\ \varrho_1' = \dfrac{(x'-x_1')\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y_1')\cos(\varphi+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)};\end{cases}$$

also nach 8.

$$16.\quad \varrho' = R\frac{\sin(\varphi+\beta_1-E)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)},\quad \varrho_1' = R\frac{\sin(\varphi+\alpha_1-E)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)}.$$

Die Coordinaten $x$, $y$ und $x_1$, $y_1$ ergeben sich nun mittelst der Formeln

$$17.\quad \begin{cases}x = x'-\varrho\cos(\varphi+\alpha) = x_1'-\varrho_1\cos(\varphi+\beta),\\ y = y'-\varrho\sin(\varphi+\alpha) = y_1'-\varrho_1\sin(\varphi+\beta)\end{cases}$$

und

$$18.\quad \begin{cases}x_1 = x'+\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1) = x_1'+\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1),\\ y_1 = y'+\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1) = y_1'+\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1).\end{cases}$$

Die Entfernung $r$ aber erhält man mittelst der Ausdrücke

$$19.\quad r = \frac{x_1-x}{\cos\varphi} = \frac{y_1-y}{\sin\varphi}.$$

Rücksichtlich des Winkels $\varphi$, welcher 360° nicht übersteigt, bemerken wir, dass für denselben die obigen Formeln zwei Werthe liefern, die im Allgemeinen von der Form $\varphi$ und $\varphi+180°$ sind. Von diesen beiden Werthen hat man jederzeit denjenigen zu nehmen, welchem positive Werthe von $\varrho$ und $\varrho_1$ entsprechen.

Die Anwendung, welche Herr Professor und Director Hansen von der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese Aufgabe gemacht hat, muss man a. a. O. nachsehen.

Es scheint uns wünschenswerth, dass für dieses interessante Problem auch recht elegante Auflösungen durch die elementare Trigonometrie und durch blosse geometrische Constructionen gegeben werden, letztere zugleich mit Berücksichtigung der Messtischpraxis, wie dies bei dem Pothenot'schen Problem unter dem Namen des Rückwärtseinschneidens in der Feldmesskunst bekanntlich schon vielfach geschehen ist. Wir werden solchen Auflösungen gern einen Platz in dem Archive einräumen.

Digitized by Google

# XXXIII.

## Correspondenz.

### Auszug aus einem Schreiben des Herrn Directors Nizze am Gymnasium zu Stralsund an den Herausgeber.

Stralsund, 4. Junius 1841.

Erst in den gegenwärtigen Pfingstferien habe ich Zeit gewinnen können, das erste Heft Ihres Archivs zur Hand zu nehmen. Ueber das Unternehmen selbst habe ich mich ungemein gefreut, und sollte ich von Zeit zu Zeit Ihnen Kleinigkeiten beisteuern können, so wird es mit Vergnügen geschehen. Für diesmal Folgendes:

Ich fiel zuerst auf den Abschnitt: „Aufgaben für Schüler.“ Dabei interessirten mich die Buzengeigerschen Formeln, bei deren Nachrechnung ich aber einige Irrungen gefunden zu haben glaube, welche ich mir anzugeben erlaube.

Nr. 8. muss heissen

$$\sin(\alpha-\beta)\ldots\ldots = 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

Nr. 12. $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots = 2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Nr. 13. $\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots = 2(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Nr. 14. $\cos^2\alpha+\ldots\ldots = 2(1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma))$

Nr. 15. $\sin^2\alpha+\ldots = 2(1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma))$

Hat Buzengeiger sich verschrieben, oder trägt der Setzer die Schuld? *)

Bei einer andern Ihrer Aufgaben bin ich sofort auf folgende Kleinigkeit gefallen:

Aufgabe. Es soll auf einer gegebenen geraden Linie ein Rehteck construirt werden, dessen zweite Seite halb so gross ist, als die Diagonale.

In Taf. II. Fig. 12. ist $MN$ die gegebene gerade Linie, $AB$ willkührlich, $BD=\frac{1}{2}AB$, $MN=AE$ $(=AE)$.

Lehrsatz. Wenn die kürzere Seite eines Rechtecks halb so gross ist, als dessen Diagonale, und wenn man auf der kürzeren Seite desselben wiederum ein Rechteck construirt, dessen zweite Seite die Hälfte seiner Diagonale ist, imgleichen auf der kürzeren Seite dieses Rechtecks wieder ein Rechteck von derselben Beschaffenheit, und so in infinitum, so verhalten sich die längeren Seiten aller dieser Rechtecke wie

$$1:\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\sqrt{\tfrac{1}{3^2}}:\sqrt{\tfrac{1}{3^3}}:\sqrt{\tfrac{1}{3^4}}:\sqrt{\tfrac{1}{3^5}}\ldots\ldots.$$

Anm. Man würde die Aufgabe und den Lehrsatz auch auf das rechtwinklige Dreieck beziehen können, dessen eine Kathete halb so gross ist, als die Hypotenuse.

*) Weder der Herausgeber, noch der Setzer, noch der Corrector tragen die Schuld. Buzengeiger hat sich, wie ich durch das noch in meinen Händen befindliche Blatt nachweisen kann, allerdings verschrieben, und Herrn Director Nizze gebührt daher der grösste Dank für die Nachweisung dieser Schreibfehler. G.

Digitized by Google

# XXXIV.

## Analyse des équations déterminées par M Fourier, de l'institut royal de France, secrétaire perpétuel de l'académie des sciences. Première partie. Paris. 1831. 4. Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften. Ein Supplement zu den Lehrbüchern der Algebra und der Differentialrechnung von M. W. Drobisch, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Leipzig, 1834. 8. *)

Von dem

Herrn Professor Dr. Gartz,

zu Halle.

Jean Baptiste Jos. Fourier (geboren zu Auxerre in der Bourgogne den 21. März 1768, gestorben zu Paris den 16. Mai 1830) ist als Verfasser einer scharfsinnigen Theorie der Wärme, die schon wegen der darin gebrauchten analytischen Methoden die Aufmerksamkeit jedes Mathematikers verdient, und mancher trefflichen der pariser Akademie der Wissenschaften vorgetragenen Abhandlungen und Biographien auch in Deutschland schon länger bekannt; erst nach seinem Tode aber lernten wir ihn als denjenigen Mann kennen, welchem die vorher seit geraumer Zeit gleichsam stillstehende Wissenschaft der Algebra ihre wichtigsten neuen Fortschritte und Erweiterungen verdankt. Der nun auch schon verstorbene Herausgeber des vorliegenden Werks, Navier, weist in seinem Vorberichte aus hinterlassenen Papieren F.'s nach, dass Fourier schon in sei-

*) Obgleich Fourier's berühmtes Werk schon im Jahre 1831 erschienen ist, so ist es doch bei Weitem noch nicht so allgemein bekannt und verbreitet, wie es nach seinem hochwichtigen Inhalte verdient. Deshalb dürfte die in diesem Aufsatze gegebene eben so gründliche als vollständige Analyse desselben auch jetzt noch vielen Lesern angenehm und dem Zwecke des Archivs vollkommen entsprechend sein, wobei es zugleich zweckmässig schien, eine kurze Analyse des Buches von Drobisch damit zu verbinden. G.



Digitized by Google

nem achtzehnten Jahre viele von den Entdeckungen gemacht hatte, welche in vorliegendem Werke mitgetheilt werden. Später, im Jahre 1789, überreichte F. der pariser Akademie eine Abhandlung ähnlichen Inhalts, und trug nachmals (im Jahre 1797) als Lehrer an der polytechnischen Schule seinen Schülern diese Entdeckungen vor. F. gehörte zu den Gelehrten, welche Bonaparte auf seinem Zuge nach Aegypten mitnahm, und suchte auch während seines Aufenthalts in jenem Lande seine neuen Ansichten weiter zu entwickeln und zu vervollständigen, wovon mehrere dem von den Franzosen errichteten „Institut von Cairo" überreichte Abhandlungen zeugen. Nach Frankreich zurückgekehrt kam er, wenn schon nicht ohne Unterbrechungen, welche zum Theil durch die Staatsveränderungen in seinem Vaterlande herbeigeführt wurden, wiederholentlich auf diesen Gegenstand zurück. Unter den, schon erwähnten von ihm der neuen pariser Akademie mitgetheilten Abhandlungen, welche aber noch nicht alle gedruckt sind, beziehen sich vier auf die algebraische Analysis. Endlich entschloss sich F. alle seine hierauf bezüglichen Arbeiten in einem grösseren Werke zusammen zu fassen; kaum hatte jedoch der Druck dieses Werkes begonnen, als ihn der Tod übereilte. Leider fand sich unter seinen Papieren nur der vorliegende erste Theil vollständig für den Druck vorbereitet. Für das Uebrige fanden sich indessen, nach Navier's Aussage, zahlreiche Materialien gesammelt, und es ist nur zu wünschen, dass dieselben recht bald, wenn auch nicht verarbeitet, dem Publikum mitgetheilt werden mögen. — Wir wollen nun den Inhalt des vorliegenden ersten Theils angeben: Auf das Avertissement de l'éditeur (S. I—XXIV) folgt (S. 1—5) die Vorrede des Verfassers, worin er sich über die Wichtigkeit und den Nutzen der Algebra, über die Verdienste seiner Vorgänger und den Zweck seines eigenen Werkes ausspricht. Hierun schliesst sich (S. 7—24) eine Einleitung, welche zunächst in gedrängter Kürze die allmähligen Fortschritte der Algebra seit Diophant angiebt. F. erklärt sich hier schlechthin gegen alle Versuche, welche bezwecken die Wurzeln der Gleichungen aller Grade durch Formeln darzustellen, welche der cardanischen Formel analog wären, indem dadurch nur sehr verwickelte Transformationen erhalten würden, worin die Wahrheit, welche man sucht, mehr als in der gegebenen Gleichung selbst, versteckt wäre. Leibnitzens und Tschirnhausens Ansichten hierüber seien unausführbar. Des Verfassers eigenes Verfahren sei keine Combination der elementaren Regeln über die Wurzelausziehung, sondern eine Methode sui generis, welche auf gleichzeitigem Calcül aller Coefficienten der vorgelegten Gleichung beruhe; sie weiche von Lagrange's Auflösung der numerischen Gleichungen ab, und gelte auch für die Literalgleichungen. Vorausgesetzt wird bei dieser neuen Methode ausser den gewöhnlichen Elementen der Algebra, die Kenntniss der Differentialrechnung besonders die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen (nach dem Taylorschen Satze) jedoch mit Hinzufügung des Restes, wenn man eine solche Reihe bei einem beliebigen Gliede abbricht. Auch ist einige Kenntniss der analytischen Geometrie nothwendig, weil dadurch die trefflichste Versinnlichung der allmähligen Veränderungen in den Werthen einer Function $f(x)$ und eben dadurch Erleichterung in der Erforschung ihrer Eigenschaften möglich wird. Der Verfasser ist offenbar durch solche geometrische Betrachtungen

Digitized by Google

auf die meisten seiner Entdeckungen gekommen. — Vor dem Beginne der in diesem ersten Theile enthaltenen zwei Bücher seines, dem Plane nach, aus sieben Büchern bestehenden Werkes, giebt F. eine Uebersicht aller von ihm für die Theorie der Gleichungen gewonnenen Resultate (S. 25—86), auf welche wir zurück kommen wollen, wenn wir die vorliegenden ersten zwei Bücher in nähere Betrachtung gezogen haben werden. — Buch 1. Methode für jede reelle Wurzel zwei Gränzen zu bestimmen, (zwischen welche diese Wurzel fällt,) und das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erkennen. — Bedeutet $m$ eine ganze positive Zahl und ist $X = f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} \ldots + a_{m-1} x + a_m$ und $X' = f'(x) = \frac{dX}{dx}$, $X'' = f''(x) = \frac{d^2X}{dx^2}, \ldots, X^{(m-1)} = f^{(m-1)}(x) = \frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}$, $X^{(m)} = f^{(m)}(x) = \frac{d^m X}{dx^m}$, so ist klar, dass alle reelle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ zwischen den Gränzen $-\frac{1}{0}$ und $+\frac{1}{0}$ liegen, und dass sowohl für $x = -\frac{1}{0}$ als für $x = +\frac{1}{0}$ jede der Functionen $X$, $X'$, $X'' \ldots X^{(m-1)}$ einen unendlichen Werth erhält, dessen Vorzeichen lediglich von dem jedesmaligen ersten Gliede der Function abhängt, während $X^{(m)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ eine positive Constante ist. Ordnet man daher die gedachten Functionen so:

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots, X', X'', X$$

und setzt unter jede das ihr zukommende Vorzeichen, so erhält man offenbar

| | $X^{(m)}$ | $X^{(m-1)}$ | $X^{(m-2)}$ | $X^{(m-3)}$ | $\ldots$ | $X''$ | $X'$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (für $-\frac{1}{0}$) | + | − | + | − | $\ldots$ | $\pm$ | $\mp$ | $\pm$ |
| (für $+\frac{1}{0}$) | + | + | + | + | $\ldots$ | + | + | + |

Nennt man also zwei auf einander folgende gleiche Vorzeichen, wie $+\,+$ oder $-\,-$, eine Vorzeichenfolge, dagegen zwei auf einander folgende einander entgegengesetzte Vorzeichen, wie $+\,-$ oder $-\,+$ einen Vorzeichenwechsel, so sieht man, dass in der Reihe für $-\frac{1}{0}$ lauter Vorzeichenwechsel, in der Reihe für $+\frac{1}{0}$ lauter Vorzeichenfolgen vorkommen, und zwar, wenn die Vorzeichen von $X^{(m)}$ und $X$ nur einmal, jedes der übrigen aber doppelt, nämlich in Bezug auf das vorhergehende und in Bezug auf das folgende Vorzeichen berücksichtigt werden, erhält man in der Reihe $(-\frac{1}{0})$ grade so viel Vorzeichenwechsel, in der Reihe $(+\frac{1}{0})$ so viel Vorzeichenfolgen als der Grad der gegebenen Gleichung $X = 0$ beträgt, nämlich $m$. Es muss also die Reihe $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots X', X$ beim Uebergange von $x = -\frac{1}{0}$ zu $x = +\frac{1}{0}$ alle Mal $m$ Vorzeichenwechsel verlieren. Da jedes Glied dieser Reihe eine stetige Function von $x$ ist, so kann es nicht anders sein Vorzeichen ändern, also vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergehen, als indem es den Zwischenwerth Null durchläuft. Fourier zeigt nun eben so einfach als klar 1) dass jedes Mal, wenn $x$ einen Werth erreicht, der die Function $X = 0$ macht, ohne zugleich eine von den derivirten Functionen auf Null zu bringen, nothwendig ein Zeichenwechsel verloren gehe, d. h. sich in eine Zeichenfolge verwandele, und dass, wenn $x$ nachher weiter bis $\frac{1}{0}$ ununterbrochen wächst, die Anzahl der Zeichenwechsel bei keinem



Digitized by Google

auf $a$ folgenden Werthe von $x$ wieder zunehmen könne; 2) dass, wenn $x$ einen Werth erreicht, der die beiden letzten oder mehrere von den letzten unmittelbar auf einander folgenden ... $X''$, $X'$, $X$ in der obigen Funktionenreihe verschwinden macht, (was bekanntlich ein Merkmal von eben so viel einander gleichen Wurzeln der Gleichung $X=0$ ist) alle Mal eben so viele Zeichenwechsel verloren gehen. 3) Wenn nicht die Stammfunction $X$, wohl aber eine von ihren Derivirten oder $n$ auf einander folgende von diesen für einen bestimmten Werth von $x$ verschwinden, werden alle Mal, wenn $n$ gerade ist, auch $n$ Zeichenwechsel verloren gehen; wenn aber $n$ ungerade ist, entweder $n-1$ oder $n+1$ Zeichenwechsel. In den Fällen (2) und (3) so wenig als in dem Falle (1) nimmt die Anzahl der Zeichenwechsel jemals wieder zu, wenn man $x$ fortdauernd wachsen lässt. — Hat die Gleichung $X=0$ lauter reelle Wurzeln, so muss die Function $X$, während $x$ von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ ununterbrochen wächst, $m$ Mal auf Null gebracht werden, wodurch dann alle $m$ Zeichenwechsel sich in Zeichenfolgen verwandeln, und mithin kann dann durch den unter (3) aufgeführten Fall kein Zeichenwechsel verloren gehen. So oft also durch diesen Fall Zeichenwechsel verloren gehen, deutet diess auf imaginäre Wurzeln, und zwar jedes Mal auf eine gerade Anzahl derselben, wie es sein muss, da in einer rationalen Gleichung jede darin enthaltene imaginäre Wurzel $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ stets das Vorhandensein ihrer conjugirten $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ nothwendig macht. — Um nun zu entdecken, ob zwischen zweien Gränzen $a$ und $b$ eine Wurzel oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen, substituire man für $x$ erst $a$ und nachher $b$ in der oft erwähnten Reihe von Functionen, und untersuche, ob die Reihe für $x=b$ noch eben so viele Vorzeichenwechsel habe, als die für $x=a$. Ist diess der Fall, so liegt zwischen $a$ und $b$ gar keine Wurzel der Gleichung. Hat aber die Reihe für $x=b$ einen Vorzeichenwechsel weniger als die Reihe für $x=a$, so liegt zwischen $a$ und $b$ eine reelle Wurzel. Hat die Reihe für $x=b$ eine ungerade Anzahl $2u+1$ Vorzeichenwechsel weniger als die für $x=a$, so liegt zwischen $a$ und $b$ wenigstens eine reelle Wurzel; es können aber in diesem Falle auch 3 oder 5 u. s. w. überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln zwischen $a$ und $b$ liegen, jedoch nicht mehr als $2u+1$. Liegen nur $2r+1$ reelle Wurzeln in diesem Zwischenraume, so sind $2n-2r$ imaginäre Wurzeln durch die verloren gegangenen Vorzeichenwechsel angedeutet, welche Wurzeln F. fehlende (racines manquantes), Herr Drobisch passender verloren gegangene Wurzel, nennt. — Hat endlich die Reihe für $x=b$ eine gerade Anzahl $2p$ Vorzeichenwechsel weniger als die für $x=a$, so hat die Gleichung $X=0$ in jenem Zwischenraume entweder gar keine oder 2, oder 4 u. s. w. oder überhaupt eine gerade Anzahl $2q$ reelle Wurzeln, die zwischen $a$ und $b$ fallen, jedoch nicht mehr als $2p$; zugleich erkennt man aber daraus, dass auch $2p-2q$ imaginäre Wurzeln vorhanden sind. — Stets also deutet die Anzahl der im Uebergange von $x=a$ zu $x=b$ verloren gegangenen Zeichenwechsel auf eine eben so grosse Anzahl von Wurzeln, welche entweder alle reell, oder von denen eine gerade Anzahl imaginär ist. Ist z. B. $X=x^3+2x^2-3x+2$ so ist $X'=3x^2+4x-3$, $X''=6x+4$, $X'''=6$. Wenn man

Digitized by Google

also für $x$, wie es der leichten Berechnung wegen zunächst immer geschieht, die Glieder der Reihe ... $-100, -10, -1, 0, +1, +10$ ... setzt, so erhält man:

| | $X'''$ | $X''$ | $X'$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-10)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $(-1)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(0)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $(1)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

woraus erhellet, dass zwischen $-10$ und $-1$ eine reelle Wurzel, zwischen $-1$ und $0$ gar keine Wurzel liegt, und dass zwischen $x=0$ und $x=1$ entweder zwei reelle Wurzeln fallen, oder zwei dergleichen verloren gegangen sind, in welchem letzteren Falle die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat. Wie man entdecke, von welcher Natur die zuletzt erwähnten beiden Wurzeln seien, darüber nachher. — Kommt es bei der Anwendung dieses höchst einfachen Verfahrens vor, dass ein für $x$ substituirter Werth $a$ ein Glied oder mehrere Glieder der Functionenreihe $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots, X', X$ auf Null bringt, so giebt eine leichte, aus dem Taylorschen Satze abgeleitete Regel an, welche Vorzeichen jenen Functionen beizulegen seien, sofern $x=a-\omega$ und so fern $x=a+\omega$ gesetzt wird, wo $\omega$ eine sehr wenig von Null verschiedene Grösse bedeutet. Man braucht nämlich dann in diesen beiden Reihen nur dieselben Vorzeichen wie in der Reihe für $x=a$ zu setzen, da aber, wo in letzterer Reihe Glieder verschwinden, hat man für $x=a-\omega$, Vorzeichenwechsel, für $x=a+\omega$, Vorzeichenfolgen zu setzen. Ist z. B. die Reihe

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für $a$ | $+$ | $+$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-$ | $0$ | $0$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ so ist sie |
| für $a-\omega$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ und |
| für $a+\omega$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ $-$ |

ist nun die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe für $x=a-\omega$ etwa $=h$, in der für $x=a+\omega$ aber $=k$, so deutet diess auf $h-k$ imaginäre Wurzeln, so in dem oben angeführten Beispiele auf 6 dergleichen. Fourier nennt diess die Regel vom doppelten Vorzeichen. —

Man sieht leicht, dass die Regel von Descartes, wonach man aus den Vorzeichen der Glieder einer Gleichung beurtheilt, wie viele reelle positive und wie viele negative Wurzeln die Gleichung höchstens habe (fälschlich die harriotsche Regel genannt), nichts weiter als ein Corollar der bisher angegebenen Sätze Fourier's sei. Denn setzt man in den Functionen $X, X', \ldots, X^{(m-1)}, X^{(m)}$ das $x=0$, so werden sie, zu Folge des Mac-Laurinschen Satzes, gleich Produkten aus den positiven Faktoren $1, 1, 1.2, 1.2.3, \ldots\ldots, 1.2 \ldots m$ in die Coefficienten der Gleichung $X=0$. Wenn man daher nun die Vorzeichen dieser Coefficienten mit der Reihe von Vorzeichen für $x=-\frac{1}{0}$ und für $x=+\frac{1}{0}$ vergleicht, so giebt diess die Regel des Descartes. Offenbar ist aber die Regel Fourier's weit gehaltreicher, da sie zugleich bestimmte endliche Gränzen angiebt, zwischen welchen man einzig und allein reelle Wurzeln zu suchen hat, und auf die einfachste Weise zur annähernden Bestimmung

Digitized by Google

dieser Wurzeln durch fortgesetzte Verengerung der Gränzen dienen kann, wovon nachher noch weiter die Rede sein wird. Es bleibt jetzt zunächst die Frage, wie man, wenn mehr als ein Vorzeichenwechsel durch den Uebergang von $x = a$ zu $x = b$ verloren geht, entscheiden könne, ob dadurch lauter reelle zwischen $a$ und $b$ liegende Wurzeln oder Paare von imaginären Wurzeln angedeutet werden, und wie man die reellen zwischen $a$ und $b$ liegenden Wurzeln, wenn dergleichen vorhanden sind, durch Gränzen, die man zwischen jede zwei einander am Nächsten kommende einschiebt, von einander trennen könne. Diess würde man nun zwar dadurch bewerkstelligen können, dass man nach der von Lagrange und Waring vorgeschlagenen Methode eine Grösse $\Delta$ bestimmte, welche entweder $=$ oder $<$ als die kleinste Differenz zweier reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung wäre, und sodann für $x$ nach der Reihe die Zahlen $a + \Delta$, $a + 2\Delta$ u. s. w.... in der Function $f(x)$ substituirte; allein dazu gehören bei Gleichungen von einigermassen hohem Grade so weitläufige Rechnungen, dass ein anderes kürzeres Verfahren für die Praxis höchst wünschenswerth ist. Ein solches und zwar ein sehr einfaches, das in den meisten Fällen äusserst schnell zum Ziele führt, hat nun F. gefunden. Es gründet sich auf die Betrachtung der Subtangenten derjenigen Curve, welche die Veränderung in den Werthen der $f(x)$ veranschaulicht. Ist man nämlich durch hinreichende Zusammenziehung der Gränzen $a$ und $b$ dahin gelangt, dass zwischen diesen Gränzen nur zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ und gar keine Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt, so hat die Curve $f(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ eine Einbiegung gegen die Abscissenaxe (ein Minimum oder Maximum von $f(x)$), aber keinen Wendepunkt. Hieraus folgt leicht, dass die absoluten Zahlenwerthe der Subtangenten $\frac{f(a)}{f'(a)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$ sowohl einzeln als zusammen kleiner als $b - a$ sein müssen, wenn zwei reelle Wurzeln, also zwei Durchschnitte der Curve $f(x)$ mit der Abscissenaxe, zwischen $x = a$ und $x = b$ liegen sollen. Findet sich daher $\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} \geqq b - a$, so ist diess ein sicheres Zeichen, dass zwischen $a$ und $b$ zwei reelle Wurzeln verloren gegangen sind, statt deren dann $f(x) = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat. Nur der Fall ist hievon auszunehmen, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler und daher $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln zwischen $a$ und $b$ hat, was aber bekanntlich leicht zu erforschen ist. Findet sich $\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a$, so kann man daraus noch nichts mit Sicherheit schliessen, sondern muss dann engere Gränzen statt $a$ und $b$ wählen, wodurch man aber endlich gewiss, wenn die beiden Wurzeln reell sind, dahin gelangt sie zu trennen, oder, wenn sie es nicht sind, die Summe zweier Subtangenten grösser als die Differenz der Abscissen der zugehörigen Punkte zu finden. Hat man durch das früher angegebene Verfahren entdeckt, dass nicht bloss zwei, sondern noch mehr Wurzeln zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegen oder verloren gegangen sind, so ist durch eben jenes Verfahren auch zugleich bekannt, welche von den Functionen $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, ... $X'$, $X$, wenn man sie $= 0$ setzt, nur eine oder zwei Wurzeln zwischen $a$ und $b$ habe oder verlo-

Digitized by Google

ren habe. Es sei nun $X^{(n)}$ die erste, von der Rechten an gezählt, unter jenen Functionen, welche, wenn man sie $=0$ setzt, nur eine Wurzel zwischen $a$ und $b$ hat, so hat $X^{(n-1)}=0$ nothwendig zwei Wurzeln zwischen denselben Gränzen, entweder wirklich oder verloren, und $X^{(n+1)}=0$ hat dann entweder gar keine, oder eine oder zwei reelle Wurzeln zwischen $a$ und $b$, oder es sind für $X^{(n+1)}=0$ zwei zwischen $a$ und $b$ verloren gegangene Wurzeln angedeutet. Hat $X^{(n+1)}=0$ gar keine Wurzel zwischen $a$ und $b$, weder wirklich noch verloren, so kann man nach demselben Verfahren, welches wir vorher auf die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ anwandten, entdecken, ob die beiden angezeigten Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ beide reell oder imaginär sind, und, wenn sie letzteres sind, daraus schliessen, dass auch $X=0$ zwischen $a$ und $b$ zwei reelle Wurzeln verloren habe. Dasselbe wird man schliessen, wenn die beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ einander gleich sind, ohne, wenn man sie statt $x$ setzt, alle die auf $X^{(n-1)}$ folgenden Functionen $X^{(n-2)}, \ldots, X', X$ auf Null zu bringen. Sind hingegen die beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ gleich, und bringen sie, für $x$ substituirt, alle auf $X^{(n-1)}$ folgende Functionen auf Null, so hat die Gleichung $X=0$ bekanntlich $n$ Wurzeln, die jenen beiden gleich sind. Sind die gedachten beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ reell aber ungleich, so muss man die Gränzen $a$ und $b$ verengern bis diese Wurzeln durch eine dazwischen fallende Gränze getrennt werden, wodurch dann die erste unter den Functionen $X^{(n)}, X^{(n-1)}\ldots, X$ von der Rechten an gezählt, welche, $=0$ gesetzt, nur eine Wurzel zwischen $a$ und $b$ hat, gewiss weiter rechts als vorher zu suchen sein wird. Sind für $X^{(n+1)}=0$ eine oder zwei Wurzeln zwischen $a$ und $b$ angezeigt, so muss man ebenfalls erst die Gränzen $a$ und $b$ verengern, wodurch man gewiss endlich dahin gelangt, dass unter den Functionen $X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots X', X$ von der Rechten gegen die Linke gezählt die erste $X^{(r)}$, welche, $=0$ gesetzt, nur eine Wurzel zwischen $a$ und $b$ hat, vor sich eine andere $X^{(r+1)}$ habe, welche, $=0$ gesetzt, gar keine Wurzel zwischen $a$ und $b$ hat oder verloren hat, so dass dann die vorgetragene Subtangentenprüfung sogleich auf $X^{(r-1)}$ angewendet werden kann.

**Buch 2.** Methode die Werthe der Wurzeln, deren Gränzen bekannt sind, zu berechnen, und Bemerkungen über die Convergenz der Annäherungen und über die Unterscheidung der Wurzeln. — Das bekannte Newtonsche Näherungsverfahren ist zur wirklichen Berechnung der Wurzeln am Meisten geeignet. Diess Verfahren ist aber in der Anwendung einigen Schwierigkeiten unterworfen, welche genau zu untersuchen sind. F. beweist, dass es, wenn man sich dieses Verfahrens mit Sicherheit bedienen will, zuvor nöthig sei die Gränzen $a$ und $b$, zwischen welchen eine reelle Wurzel der Gleichung $X=0$ liegt, einander so nahe zu bringen, dass zwischen denselben Gränzen keine einzige reelle Wurzel der Gleichungen $X'=0$, $X''=0$ liegt. Zugleich zeigt F., dass es alle Mal möglich sei, die eben erwähnte Bedingung zu erfüllen, ausgenommen: 1) wenn die Gleichung $X=0$ zwei oder mehr einander gleiche Wurzeln zwischen jenen Gränzen hat, was man aber leicht auf die bekannte, schon durch Hudde vorgetragene Art entdecken kann; 2) wenn $X$ und $X''$ einen gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ haben, wo dann die Gleichung $\varphi(x)=0$ statt der gegebenen $X=0$ in Bezug auf zwischen $a$ und $b$ liegende Wurzeln zu untersuchen ist. Unter obiger Bedingung ist nun, wie leicht aus der Taylorschen

Digitized by Google

Reihe folgt, wenn man die Ergänzung derselben mit beachtet, der genaue Werth der verlangten Wurzel $x = b - \frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}$ oder $a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}$, wo $(a \ldots . b)$ eine Grösse bedeutet, die zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegt. Da, dem Vorigen zu Folge, keine Wurzel der Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegt, so ändern die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$ beim Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ ihre Vorzeichen nicht, und zwar ist das Vorzeichen von $f'(a \ldots b)$ dem Vorzeichen von $f(a)$ nothwendig entgegengesetzt, dagegen dem Vorzeichen von $f(b)$ gleich, weil, nach den Betrachtungen des ersten Buchs, die Reihe $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}, \ldots . X''$, $X'$, $X$ beim Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ nur einen Zeichenwechsel verlieren darf, und $f(a)$ der $f'(b)$ entgegengesetzt sein muss, wenn zwischen $a$ und $b$ nur eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ liegt. Daraus folgt, dass $\frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}$ eine positive, hingegen $\frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}$ eine negative Grösse, und folglich $b - \frac{f(b)}{f'(a \ldots b)} < b$, aber $a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)} > a$ sei. Auch muss die $f'(x)$ bei dem Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ entweder ununterbrochen zu- oder ununterbrochen abnehmen, weil $f''(x)$ bei diesem Uebergange ihr Vorzeichen nicht ändert. Ist also 1) $f''(x)$ sowohl als $f'(x)$ während jenes Ueberganges positiv, so ist $f'(a) < f'(a \ldots b) < f'(b)$. Ist hingegen 2) $f''(x)$ während jenes Ueberganges positiv, $f'(x)$ aber negativ, so ist $-f'(a) > -f'(a \ldots b) > -f'(b)$. Eben so 3) wenn $f''(x)$ bei jenem Uebergange negativ, $f'(x)$ dagegen positiv bleibt, so ist $f'(a) > f'(a \ldots b) > f'(b)$. Endlich 4) wenn $f''(x)$ bei jenem Uebergange, und eben so auch $f'(x)$, negativ bleibt, so ist $-f'(a) < -f'(a \ldots b) < -f'(b)$. Im ersten und vierten Falle ist daher gewiss $\frac{(\pm) f(b)}{(\pm) f'(a \ldots b)} > \frac{(\pm) f(b)}{(\pm) f'(b)}$ und $-\frac{(\mp) f(a)}{(\pm) f'(a \ldots b)} > -\frac{(\mp) f(a)}{(\pm) f'(b)}$, im zweiten und dritten Falle aber ist $-\frac{(\pm) f(a)}{(\mp) f'(a \ldots b)} > -\frac{(\pm) f(a)}{(\mp) f'(a)}$ und $\frac{(\mp) f(b)}{(\mp) f'(a \ldots b)} > \frac{(\mp) f(b)}{(\mp) f'(a)}$. Wenn also $f'(x)$ mit $f''(x)$ gleiches Vorzeichen behält, während $x$ von $a$ zu $b$ übergeht (d. i. im ersten und vierten der obigen Fälle), so wird der Werth von $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ nothwendig kleiner als $b$, aber kleiner als der durch $\frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}$ angegebene genaue Werth der verlangten Wurzel, hingegen der Werth von $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ nothwendig grösser als $a$, aber kleiner als der durch $a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}$ angegebene genaue Werth. Wenn aber $f'(x)$ nicht mit $f''(x)$ gleiches Vorzeichen hat, während $x$ alle zwischen $a$ und $b$ liegenden Werthe durchläuft, (d. i. im zweiten und dritten der angegebenen Fälle), so wird, wenn man $a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ setzt, nothwendig $a'$ grösser als $a$, aber kleiner als $a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}$, also kleiner als die wahre ver-

Digitized by Google

langte Wurzel, hingegen $b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$ gewiss kleiner als $b$, aber grösser als die genaue Wurzel $b - \frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}$. Hiedurch wird die Newtonsche Näherungsmethode vervollständigt, indem man nun alle Mal zwei Näherungswerthe, oder, was eben so viel ist, zwei neue Gränzen $a' > a$, $b' < b$ beide zugleich erhält, zwischen welche die verlangte Wurzel fällt, also beurtheilen kann, indem man die Differenz $b' - a'$ bildet, wie gross der Fehler höchstens sei, wenn man den einen oder den anderen dieser Näherungswerthe statt der wahren Wurzel setzt. Auf dieselbe Weise lassen sich noch engere Gränzen $a''$, $b''$ und durch fernere Wiederholung des Verfahrens noch engere $a'''$, $b'''$ u. s. w. finden.

Alles diess wird wieder von dem Vf. durch Anwendung auf die Curve $f(x)$ anschaulich gemacht, wobei er zugleich noch einen Näherungswerth der Wurzel $\alpha$ findet, den die Secante zwischen den zu $f(a)$ und $f(b)$ gehörenden Punkten der Curve da angiebt, wo sie die Abscissenaxe schneidet; während die vorher gedachten Näherungswerthe durch Tangenten bestimmt werden. Zugleich macht es die Zeichnung sehr klar, dass man bei der gewöhnlichen Anwendung der Newtonschen Methode ohne die Fouriersche Verbesserung leicht für $a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ und für $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ Werthe findet, die der wahren Wurzel $\alpha$ weniger nahe liegen als $a$ und $b$. Fourier zeigt nun zunächst durch Anwendung der von ihm verbesserten Newtonschen Näherungsmethode auf den einfachsten Fall $x^m - A = 0$, dass die gewöhnlichen elementarischen Regeln der Wurzelausziehung nichts weiter sind, als besondere Fälle einer allgemeinen Methode, welche die Gleichungen aller Grade umfasst. Sodann giebt F. Anweisung seine Methode mit dem mindestmöglichen Zeitaufwande zu gebrauchen, indem er zeigt wie man am Besten jede überflüssige Rechnung vermeide. Besonders dienlich ist hiezu eine von ihm angegebene Art gemeine Zahlen in einander zu dividiren, welche er die geordnete Division (division ordonnée) nennt, die hier zu erläutern aber zu weitläufig sein würde. Wie man die Berechnung der Werthe von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. für $x = a$, $x = b$, $x = a'$, $x = b'$ u. s. w. am Bequemsten anstelle, ist zwar leicht einzusehen, wird aber ebenfalls der Vollständigkeit wegen von Fourier kurz erörtert. Wichtiger ist die darauf folgende leichte Bestimmung der Fehlergränze für jeden neuen Näherungswerth, wodurch man sich die Berechnung von nicht mehr sicheren Decimalstellen der Näherungswerthe $a$, $a'$, $a''$ u. s. w. oder $b$, $b'$, $b''$ u. s. w. erspart und zugleich erkennt, wie diese Näherungswerthe mit zunehmender Geschwindigkeit gegen die wahre Wurzel hin convergiren, wenn man sich genau an F.'s Verfahren hält. Durch viermalige Anwendung dieser Methode findet man z. B. die einzige reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ schon auf 16 Decimalstellen genau. Wegen der schnellen Annäherung, welche diese einfache Methode (Fourier nennt sie die lineare Methode, weil sie darauf beruht, dass in der Entwickelung von $f(a + \omega)$ oder $f(b - \omega)$ alle Glieder weggelassen werden, welche höhere Potenzen von $\omega$ als die erste enthalten) gewährt, ist es für die Praxis eigentlich nicht nöthig jemals Anwendung zu machen von anderen zusammengesetzteren Annäherungen, (wie die der zweiten Ord-

Digitized by Google

nung, wo man die Glieder beibehält, welche $\omega^2$ enthalten, oder der dritten Ordnung, wo man auch die Glieder noch beibehält, welche $\omega^3$ enthalten, oder überhaupt einer höheren Ordnung, wo man höhere Potenzen von $\omega$ beibehält als die erste): weil es aber für die Theorie interessant ist, auch bei diesen Methoden den zunehmenden Grad der Genauigkeit bei jedesmaliger Wiederholung ihrer Anwendung zu kennen, so hat F. auch darüber (S. 217—227) Untersuchungen angestellt. Zum Schlusse dieses Buches giebt der Vf. noch ein paar neue Verfahrungsweisen an, um das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erkennen. Die im ersten Buche angegebene Verfahrungsart bleibt zwar ihrer Einfachheit halber die für den gewöhnlichen Gebrauch anwendbarste, allein die Wichtigkeit dieser Untersuchung und ihr Einfluss auf die Theorie der Gleichungen mit mehreren unbekannten Grössen ist so gross, dass es sehr vortheilhaft ist, hier mehr als ein sicheres Verfahren zu kennen. — Wir heben nun aus der schon oben erwähnten Uebersicht des ganzen Werkes in der Kürze hervor, was der Inhalt der noch fehlenden fünf Bücher sein soll. Das dritte Buch soll eine Vergleichung der verschiedenen Methoden zur Trennung der Wurzeln von einander und zu ihrer Berechnung enthalten. Die Auflösung durch Kettenbrüche wird hier als ein blosser besonderer Fall einer anderen weit allgemeineren Auflösungsmethode erscheinen. Die algebraischen Irrationalgrössen werden durch stetige Functionen entwickelt, denen merkwürdige geometrische Constructionen entsprechen. Auch auf transcendente Gleichungen ist diess Verfahren anwendbar. Jede genaue Näherungsmethode ist, wenn man das im ersten Buche angegebene Verfahren zur Trennung der Wurzeln benutzt, dazu brauchbar, das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu entdecken. Ausführlicher wird diess besonders an der Auflösung durch Kettenbrüche gezeigt werden. — Das vierte Buch wird die Auflösung der Literalgleichungen enthalten. Das Princip, worauf diese Auflösung beruht, befindet sich schon in den Schriften Newtons, Stirlings und Lagrange's. Der Verf. wird eine neue Construction für den wichtigsten Theil dieser Untersuchung angeben, welche einer allgemeineren Anwendung als die von Newton gegebene fähig ist, für den Fall einer einzigen Veränderlichen aber auf dasselbe Resultat, nämlich auf die von Lagrange erwiesene analytische Regel führt. Auch wird in diesem Buche von der gleichzeitigen Auflösung zweier Literalgleichungen mit zwei unbekannten Grössen, oder allgemein $n$ solcher Gleichungen mit $n$ unbekannten Grössen die Rede sein. Es ist hiebei gar keine Elimination, keine Veränderung der Coefficienten nöthig, vielmehr werden aus den gegebenen Gleichungen in ihrer primitiven Form gleichzeitig alle Wurzeln entwickelt. — Das fünfte Buch soll die Anwendung der in den vorhergehenden Büchern enthaltenen Principien der algebraischen Analysis auf die transcendenten Functionen zeigen. — Das sechste Buch wird über die Beziehungen der recurrirenden Reihen auf die Theorie der Gleichungen handeln, welche Beziehungen von weit grösserem Umfange sind, als man bisher geglaubt hat, indem sie sich sowohl auf die imaginären als auf die reellen Wurzeln erstrecken. — Das siebente Buch wird die Theorie der Ungleichheiten (d. h. solcher Ausdrücke wie $f(x) > a$ oder $< b$) enthalten. — Man sieht aus dieser Inhaltsanzeige, welche Schätze noch in den leider nicht ganz ausgearbeiteten Manuscripten F.'s stecken,

Digitized by Google

und wir wiederholen den Wunsch, dass dieselben recht bald, wenn auch nur als Fragmente, herausgegeben werden mögen! Geschähe das Letztere, so würden sich gewiss diesseits wie jenseits des Rheins Mathematiker finden, welche im Geiste Fourier's das Werk zu restituiren suchen würden, wie diess zum Theil schon von Hrn. Dr. Stern in seiner „Theorie der Kettenbrüche" mit Glück versucht worden ist.

Wir wenden uns nun zu Hrn. Drobisch, der es sich zum Zwecke macht F.'s Entdeckungen auf deutschen Boden zu verpflanzen, jedoch in einer selbständigen Bearbeitung, welche nirgends blosse Uebersetzung ist. Hr. D. hat dazu den Weg einer historischen Entwickelung der verschiedenen Methoden zur Behandlung der höheren numerischen Gleichungen gewählt, so dass jede dieser Methoden in Beziehung auf die nächst vorhergehende als ein neuer Culturfortschritt erscheint, und F.'s Leistungen dann das Ganze krönen. Nach des Rec. Ueberzeugung kann kein sachverständiger und unpartheiischer Beurtheiler dem Verfasser das Zeugniss vorenthalten, welches er sich am Schlusse seiner Vorrede wünscht, dass nämlich sein Werk gründlich und brauchbar, und mithin des anständigen Gewandes, in welchem es erscheint, vollkommen würdig sei. Hr. D. bekämpft mit Recht das Vorurtheil, wonach die Theorie der Gleichungen, zu Folge der schwankenden Eintheilung der Analysis in einen niederen und höheren Theil, ganz zu jenem Theile gerechnet und daher jeder Einmischung der Differentialrechnung entzogen werden soll. Um die Elemente der Differentialrechnung gründlich vorzutragen, braucht man nicht die Theorie der höheren Gleichungen als bekannt vorauszusetzen, wohl aber bedarf diese Theorie zu ihrer Begründung und zur Vermeidung unnöthiger Weitschweifigkeit einiger Vorkenntnisse aus der Differentialrechnung. Eben so schädlich ist das Vorurtheil die reine Analysis habe sich von geometrischen Betrachtungen ganz frei zu erhalten. Einem solchen falschen Systematisiren zu Liebe entzieht man sich die trefflichste Veranschaulichung einer stetigen Folge von Zahlwerthen einer Function, raubt sich das einfachste und natürlichste Mittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten. Diess ungefähr ist der Inhalt der lesenswerthen Vorrede. Wir wollen nun eine Uebersicht des Werkes geben und daran einige Bemerkungen knüpfen, die dem achtungswerthen Verf. als Beweis der Aufmerksamkeit dienen mögen, mit der wir sein Werk gelesen haben. — In der Einleitung (S. 1—8) giebt der Verf. die nöthigen Erklärungen, zeigt die Darstellung der hier zu betrachtenden Functionen durch parabolische Curven und legt (§. 5.) den Plan seiner Schrift in der Kürze vor. Wir finden hier nur bei §. 3., wo die Construction der Werthe von $y=f(x)$ durch auf der $x$ Axe rechtwinklige Ordinaten gelehrt, und das ununterbrochene Zusammenhangen der die Endpunkte dieser Ordinaten verbindenden Curve behauptet wird, die kleine Erinnerung zu machen, dass es doch eigentlich nöthig sei von der Stetigkeit der Function $f(x)$ vorher überzeugt zu sein, wenn man die Nothwendigkeit des ununterbrochenen Zusammenhanges jener Curve einsehen soll, was indessen hier, wo nur von ganzen Functionen gehandelt wird, sehr leicht ist (vergl. Cauchy Cours d'analyse chap. II. §. 2.). — Der erste Abschnitt handelt von den Grenzwerthen polynomischer Ausdrücke (S. 6—28). Abschn. 2.

Digitized by Google

Von den Derivationen *) polynomischer Functionen (S. 29—52). — Von den drei Beweisen, welche der Verf. hier für den Taylorschen Satz giebt, beruht der erste auf dem binomischen Lehrsatze. Da nun die nach aufsteigenden Potenzen von $\Delta x$ vorzunehmende Entwickelung des Binoms $(x+\Delta x)^\alpha$ nur dann bei jedem Werthe von $\Delta x$ gültig bleibt, wenn $\alpha$ eine ganze positive Zahl ist, bei gebrochenen positiven Exponenten aber, wie bei allen negativen, nur für solche Werthe von $\Delta x$ gilt, die zwischen den Gränzen $-x$ und $+x$ liegen, so hätte der Verf. sagen sollen, dass sein erster Beweis voraussetze, die Function $f(x)$ sei entweder eine ganze Function von $x$, oder der numerische Werth von $\Delta x$ sei stets kleiner als der von $x$. Die blosse Voraussetzung, dass die Exponenten von $x$ in dem Polynom $f(x)$ positiv seien, ist noch nicht genügend. Der zweite Beweis setzt stillschweigend voraus, dass keiner der Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ unbestimmt oder unendlich gross werde, was wiederum für eine ganze Function $y=f(x)$ zwar gewiss ist, keineswegs aber für alle Functionen von $x$ wahr bleibt. Der dritte Beweis endlich ist mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten geführt, setzt also voraus, dass sich $f(x+\Delta x)$ in eine Reihe entwickeln lasse, die nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten von $\Delta x$ fortschreite, und dass diese Reihe convergire, was zwar für ganze Functionen, aber nicht für alle andern wahr ist. Da die höheren algebraischen Gleichungen nach gehöriger Reduction allemal nur ganze Functionen enthalten, so genügen allerdings die Beweise des Verf., nur hätte er bestimmter angeben sollen, dass er hier nur für solche Functionen von der Taylorschen Reihe Gebrauch mache. — Hr. D. zeigt ferner in diesem Abschnitte, welches der Ausdruck für den Rest sei, wenn man die Taylorsche Reihe bei einem beliebigen Gliede abbricht, wie sich der Werth eines Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in dem Falle bestimmen lasse, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ für einen besonderen Werth von $x$ beide verschwinden, und giebt sodann die Derivationen der Function einer Function, so wie der Summe, des Products, des Quotienten und der Potenz von Functionen an. — Abschn. 3. Vom Gebrauch der Derivationen in der Theorie der Curven (S. 53—83). Es ist in diesem Abschnitte nur dasjenige aus der analytischen Geometrie ausgehoben, was für die Veranschaulichung der Theorie der algebraischen Gleichungen nöthig ist, diess aber gründlich und durch Auffassung von mehreren Seiten sehr klar dargestellt. — Abschn. 4. Von den Wurzeln der Gleichungen im Allgemeinen (S. 84—119). Hier über die Zerlegung der algebraischen Functionen in reelle einfache oder quadratische Factoren, Cauchy's und Gauss's (erster) Beweis für die Möglichkeit dieser Zerlegung, Cotesischer und Moi-

*) Hr. Drobisch und mehrere andere deutsche Mathematiker gebrauchen die Wörter Derivation und Ableitung statt des bisher üblichen Derivirte (scil. Function). In vielen Fällen dürfte aber diese Neuerung unbequem sein und Zweideutigkeiten herbei führen; z. B. die Ableitung der Ableitung von $y=f(x)$ könnte sowohl die Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$, als die Herleitung der Grösse $\frac{dy}{dx}$ aus der Function $y$ sein.

Digitized by Google

vrescher Lehrsatz. — Bei dem Gaussischen Beweise glaubt der Vf. (S. 100.) übergehen zu dürfen, dass nicht mehr als $2m$ Punkte der Curve $\chi$ und dem Kreise gemein sein können, allein dann ist der in §. 78 enthaltene Schluss nicht bündig, weil dann zwischen (1) und (3) mehr als ein Punkt der Curve $\chi$ liegen und also zwei solche Punkte mit einander verbunden sein könnten. — Abschn. 5. Von den allgemeinsten Relationen der Wurzeln (S. 120—149). Vieta's Satz von der Zusammensetzung der Coefficienten einer algebraischen Gleichung. Beweis dieses Satzes mittelst der Derivationen. Folgerung daraus. Hudde's Satz von Auffindung gleicher Wurzeln. Girard's und Newton's Relationen zwischen den Coefficienten und den Summen der Potenzen der Wurzeln. Descartes's Lehrsatz nach Gauss. — Abschn. 6. Von den Grenzen der Wurzeln im Allgemeinen (S. 150—175). Newtons, Maclaurin's, Rolle's u. A. Methoden zur Bestimmung der äussersten Grenzen. Waring's und Lagrange's Methode zur Begrenzung der einzelnen reellen und Erkennung der imaginären Wurzeln. — Abschn. 7. Von den älteren Methoden zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln (S. 176—202). Der Vf. trägt Rolle's, De Gua's u. A. Methoden vor, zeigt aber die Unvollkommenheit derselben. — Abschn. 8. Fourier's erste Methode zur Unterscheidung der reellen und der imaginären Wurzeln (S. 203—257). — Abschn. 9. Von der Berechnung der Wurzeln aus ihren Grenzen (ebenfalls nach Fourier) S. 258—298. — Abschn. 10. Fourier's zweite und dritte Regel zur Erkennung der imaginären Wurzeln; von der Berechnung derselben (S. 299—341). — Die Lehren Fourier's sind in den drei letzten Abschnitten, mit Eindringung in den Geist derselben, zuweilen etwas abgekürzt und anders geordnet, ohne jedoch etwas Wesentliches zu übergehen, und mit Hinzufügung neuer Beispiele vorgetragen. Am Schlusse des Werkes wird Lagrange's Methode zur Berechnung der imaginären Wurzeln gelehrt, so wie auch einige andere hiezu dienliche Verfahrungsarten, namentlich die Legendre's, erwähnt und endlich, nach genauerer Erörterung der geometrischen Bedeutung von $t$ und $u$ in der Form $t+u\sqrt{-1}$, ein hierauf gegründetes neues Verfahren angegeben. —

Digitized by Google

# XXXV.

## Das Pothenot'sche Problem, in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie.

Von

dem Herausgeber.

1.

Das Pothenot'sche Problem ist bekanntlich die Aufgabe: wenn in einer Ebene drei Punkte gegeben sind, und in einem vierten Punkte in derselben Ebene die Winkel gemessen werden, welche die von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, die Lage dieses vierten Punktes zu bestimmen. Man kann aber diese schöne und so vieler Anwendungen in der Praxis fähige Aufgabe auf folgende Art erweitern:

Wenn drei beliebige Punkte im Raume gegeben sind, und in einem vierten beliebigen Punkte im Raume die drei Winkel gemessen werden, welche die von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, die Lage dieses vierten Punktes im Raume zu bestimmen.

Diese erweiterte Aufgabe wollen wir im Folgenden aufzulösen suchen, und die Auflösung mit einigen Bemerkungen über die Anwendung des Problems in der Praxis begleiten.

Die drei gegebenen Punkte im Raume seien $A$, $B$, $C$, und eben so sollen die drei Winkel des ebenen Dreiecks $ABC$, also die denselben gegenüberstehenden Seiten dieses Dreiecks wie gewöhnlich durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. In dem vierten Punkte $O$ im Raume seien nun die drei 180° nicht übersteigenden Winkel $BOC=\alpha$, $AOC=\beta$, $AOB=\gamma$ gemessen worden, und die Entfernungen des Punktes $O$ von den drei gegebenen Punkten $C$, $B$, $A$ seien respective $x$, $y$, $z$; so liefert uns die ebene Trigonometrie sogleich die drei folgenden Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} x^2+y^2-2xy\,\cos\,\alpha=a^2, \\ x^2+z^2-2xz\,\cos\,\beta=b^2, \\ y^2+z^2-2yz\,\cos\,\gamma=c^2; \end{cases}$$

aus denen nun die drei Entfernungen $x$, $y$, $z$ bestimmt werden müssen. Setzt man

Digitized by Google

2. $y = px,\ x = qx;$

so werden die drei vorhergehenden Gleichungen

$$3.\quad \begin{cases} (1 + p^2 - 2p\cos\alpha)\ x^2 = a^2, \\ (1 + q^2 - 2q\cos\beta)\ x^2 = b^2, \\ (p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma)\ x^2 = c^2; \end{cases}$$

und durch Division der ersten und zweiten durch die dritte erhält man nun sogleich, wenn der Kürze wegen

$$4.\quad \frac{a^2}{c^2} = m^2,\ \frac{b^2}{c^2} = n^2$$

gesetzt wird, die beiden folgenden, die Grösse $x$ nicht mehr enthaltenden Gleichungen:

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{1 + p^2 - 2p\cos\alpha}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma} = m^2, \\ \dfrac{1 + q^2 - 2q\cos\beta}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma} = n^2; \end{cases}$$

oder

$$6.\quad \begin{cases} 1 + p^2 - 2p\cos\alpha = m^2\ (p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma), \\ 1 + q^2 - 2q\cos\beta = n^2\ (p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma); \end{cases}$$

aus denen die beiden unbekannten Grössen $p$ und $q$ bestimmt werden müssen.

Auf Null gebracht, erhalten diese beiden Gleichungen die Form

$$m^2q^2 - 2m^2\ pq\cos\gamma + (m^2 - 1)\ p^2 + 2p\cos\alpha - 1 = 0,$$
$$(n^2 - 1)\ q^2 + 2\ (\cos\beta - n^2 p\cos\gamma)\ q + n^2p^2 - 1 = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $q^2$, und bestimmt aus der dadurch sich ergebenden Gleichung dann die Grösse $q$; so erhält man

$$7.\quad q = -\frac{(m^2 + n^2 - 1)\ p^2 - 2\ (n^2 - 1)\ p\cos\alpha - (m^2 - n^2 + 1)}{2m^2\ (\cos\beta - p\cos\gamma)}.$$

Führt man nun diesen Ausdruck von $q$ in die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen ein, und setzt für die Grössen $m^2$ und $n^2$ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe $\frac{a^2}{c^2}$ und $\frac{b^2}{c^2}$; so erhält man nach einigen leichten Reductionen zur Bestimmung von $p$ die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$8.\quad 0 = \{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2\ b^2\cos\gamma^2\}\ p^4$$
$$- 4\{[(b^2 - c^2)\ (a^2 + b^2 - c^2) - 2a^2b^2\cos\gamma^2]\cos\alpha$$
$$- a^2(b^2 + c^2 - a^2)\cos\beta\cos\gamma\}\ p^3$$
$$+ 2\{2[(b^2 - c^2)^2\cos\alpha^2 + a^2(a^2 - c^2)\cos\beta^2 + a^2(a^2 - b^2)\cos\gamma^2]$$
$$- 4a^2(b^2 + c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)\}\ p^2$$
$$- 4\{[(c^2 - b^2)\ (a^2 + c^2 - b^2) - 2a^2c^2\cos\beta^2]\cos\alpha$$
$$- a^2(b^2 + c^2 - a^2)\cos\beta\cos\gamma\}\ p$$
$$+ (a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2\cos\beta^2.$$

Bekanntlich ist aber

Digitized by Google

$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$, $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$,
$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$

und

$a=b\cos C+c\cos B$, $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$;

und folglich, wie man leicht findet,

$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2\cos\gamma^2=4a^2b^2(\cos C^2-\cos\gamma^2)$,
$(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2\cos\beta^2=4a^2c^2(\cos B^2-\cos\beta^2)$;
$(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)-2a^2b^2\cos\gamma^2$
$=2a^2b\cos C(b\cos C-c\cos B)-2a^2b^2\cos\gamma^2$,
$(c^2-b^2)(a^2+c^2-b^2)-2a^2c^2\cos\beta^2$
$=2a^2c\cos B(c\cos B-b\cos C)-2a^2c^2\cos\beta^2$;
$(b^2-c^2)^2\cos\alpha^2+a^2(a^2-c^2)\cos\beta^2+a^2(a^2-b^2)\cos\gamma^2$
$=a^2(b\cos C-c\cos B)^2\cos\alpha^2+a^2b(a\cos C-c\cos A)\cos\beta^2$
$+a^2c(a\cos B-b\cos A)\cos\gamma^2$;
$a^2(b^2+c^2-a^2)\cos\beta\cos\gamma=2a^2bc\cos A\cos\beta\cos\gamma$,
$(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=4a^2bc\cos B\cos C$.

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 8. ein, und dividirt dieselbe dann durch $4a^2$; so erhält man die Gleichung:

9. $0=b^2(\cos C^2-\cos\gamma^2)p^4$
$-2b\{[\cos C(b\cos C-c\cos B)-b\cos\gamma^2]\cos\alpha$
$-c\cos A\cos\beta\cos\gamma\}p^3$
$+\{(b\cos C-c\cos B)^2\cos\alpha^2+b(a\cos C-c\cos A)\cos\beta^2$
$+c(a\cos B-b\cos A)\cos\gamma^2-2(b^2+c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$-2bc\cos B\cos C\}p^2$
$-2c\{[\cos B(c\cos B-b\cos C)-c\cos\beta^2]\cos\alpha$
$-b\cos A\cos\beta\cos\gamma\}p$
$+c^2(\cos B^2-\cos\beta^2)$.

Diese Gleichung bringt man aber ferner, weil

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

ist, und folglich

$a=r\sin A$, $b=r\sin B$, $c=r\sin C$

gesetzt werden kann, leicht auf folgende Form:

10. $0=\sin B^2(\cos C^2-\cos\gamma^2)p^4$
$-2\sin B\{[\cos C\sin(B-C)-\sin B\cos\gamma^2]\cos\alpha-\cos A\sin C\cos\beta\cos\gamma\}p^3$
$+\{\sin(B-C)^2\cos\alpha^2+\sin B\sin(A-C)\cos\beta^2+\sin C\sin(A-B)\cos\gamma^2$
$-2(\sin B^2+\sin C^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2\sin B\cos B\sin C\cos C\}p^2$
$-2\sin C\{[\cos B\sin(C-B)-\sin C\cos\beta^2]\cos\alpha-\cos A\sin B\cos\beta\cos\gamma\}p$
$+\sin C^2(\cos B^2-\cos\beta^2)$.

Digitized by Google

Mittelst einiger bekannten goniometrischen Transformationen kann man diese Gleichung auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$\begin{aligned}11.\ 0 = {} & \sin B^2 \sin(C+\gamma)\sin(C-\gamma)p^4 \\ & +2\sin B\{[\cos C\sin(B-C)-\sin B\cos\gamma^2]\cos\alpha \\ & \qquad -\cos A\sin C\cos\beta\cos\gamma\}p^3 \\ & -\{\sin(B-C)^2\cos\alpha^2+\sin B\sin(A-C)\cos\beta^2+\sin C\sin(A-B)\cos\gamma^2 \\ & -2[1-\cos(B+C)\cos(B-C)]\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\tfrac{1}{2}\sin 2B\sin 2C\}p^2 \\ & +2\sin C\{[\cos B\sin(C-B)-\sin C\cos\beta^2]\cos\alpha \\ & \qquad -\cos A\sin B\cos\beta\cos\gamma\}p \\ & +\sin C^2\sin(B+\beta)\sin(B-\beta).\end{aligned}$$

Hat man $p$ mittelst dieser Gleichung gefunden, so ergiebt sich $q$ mittelst des Ausdrucks 7., den man aber leicht auf folgende Form bringen kann:

$$12.\quad q = -\frac{p^2\sin B\cos C - p\cos\alpha\sin(B-C)-\cos B\sin C}{\sin A(\cos\beta - p\cos\gamma)}.$$

Die Entfernung $x$ ergiebt sich mittelst eines der drei aus 3. sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke:

$$13.\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\alpha}}, \\ x = \dfrac{b}{\sqrt{1+q^2-2q\cos\beta}}, \\ x = \dfrac{c}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\gamma}}; \end{cases}$$

denen man auch, wenn man die Hülfswinkel $\Theta$, $\Theta'$, $\Theta''$ mittelst der Formeln

$$14.\ \tang\Theta = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{p}}{1-p},\ \tang\Theta' = \frac{2\sin\frac{1}{2}\beta\sqrt{q}}{1-q},\ \tang\Theta'' = \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\sqrt{pq}}{p-q}$$

berechnet, die zur logarithmischen Rechnung bequemere Form

$$15.\quad x = \pm\frac{a\cos\Theta}{1-p},\ x = \pm\frac{b\cos\Theta'}{1-q},\ x = \pm\frac{c\cos\Theta''}{p-q},$$

wo die Zeichen immer so zu nehmen sind, dass $x$ positiv wird, geben kann.

Die Entfernungen $y$ und $z$ ergeben sich nun endlich mittelst der aus dem Obigen (2.) bekannten Formeln

$$16.\quad y = px,\ z = qx.$$

## 2.

Nachdem wir jetzt die Entfernungen des Punktes $O$ von den drei Punkten $A$, $B$, $C$ zu bestimmen im Stande sind, wollen wir uns, weil die Lage der drei Punkte $A$, $B$, $C$ im Raume meistens durch ihre Coordinaten in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges



Digitized by Google

Coordinatensystem bestimmt sein wird, nun ferner überhaupt die folgende Aufgabe vorlegen:

Wenn in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges System die Coordinaten dreier Punkte im Raume und die Entfernungen eines vierten Punktes von diesen drei Punkten gegeben sind: die Coordinaten des in Rede stehenden vierten Punktes in Bezug auf das angenommene System zu finden.

Die Coordinaten der drei gegebenen Punkte seien

$$m,\ n,\ k;\ m_1,\ n_1,\ k_1;\ m_2,\ n_2,\ k_2;$$

und $a$, $a_1$, $a_2$ seien die Entfernungen des vierten Punktes, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z$ gesucht werden, von diesen drei Punkten; so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die folgenden Gleichungen:

$$17.\quad \begin{cases} (x-m)^2+(y-n)^2+(z-k)^2=a^2, \\ (x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-k_1)^2=a_1^2, \\ (x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-k_2)^2=a_2^2; \end{cases}$$

welche auch leicht auf die Form

$$(x-m)^2+(y-n)^2+(z-k)^2=a^2,$$
$$\{(x-m)+(m-m_1)\}^2+\{(y-n)+(n-n_1)\}^2 + \{(z-k)+(k-k_1)\}^2=a_1^2,$$
$$\{(x-m)+(m-m_2)\}^2+\{(y-n)+(n-n_2)\}^2 + \{(z-k)+(k-k_2)\}^2=a_2^2$$

gebracht werden können. Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich aber ferner, wenn der Kürze wegen

$$18.\quad \begin{cases} i_1=\frac{1}{2}\{a_1^2-a^2-(m-m_1)^2-(n-n_1)^2-(k-k_1)^2\}, \\ i_2=\frac{1}{2}\{a_2^2-a^2-(m-m_2)^2-(n-n_2)^2-(k-k_2)^2\} \end{cases}$$

gesetzt wird, leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$(m-m_1)\ (x-m)+(n-n_1)\ (y-n)+(k-k_1)\ (z-k)=i_1,$$
$$(m-m_2)\ (x-m)+(n-n_2)\ (y-n)+(k-k_2)\ (z-k)=i_2;$$

welche nach gehöriger Elimination, wenn der Kürze wegen

$$19.\quad \begin{cases} p=\dfrac{(k-k_2)\ i_1-(k-k_1)\ i_2}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}, \\ s=-\dfrac{(n-n_2)\ i_1-(n-n_1)\ i_2}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}; \end{cases}$$

und

$$20.\quad \begin{cases} q=-\dfrac{(m-m_1)\ (k-k_2)-(m-m_2)\ (k-k_1)}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}, \\ t=\dfrac{(m-m_1)\ (n-n_2)-(m-m_2)\ (n-n_1)}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)} \end{cases}$$

gesetzt wird, zu den folgenden Ausdrücken von $y-n$ und $z-k$ führen:

$$21.\quad y-n=p+q(x-m),\ z-k=s+t(x-m).$$

Digitized by Google

Setzt man diese Ausdrücke in die erste der Gleichungen 17.; so erhält man nach leichter Rechnung die folgende Gleichung des zweiten Grades:

22. $p^2+s^2-a^2+2(pq+st)\,(x-m)+(1+q^2+t^2)\,(x-m)^2=0,$

deren Auflösung auf gewöhnliche Weise zu dem folgenden Ausdrucke von $x-m$ führt:

23. $x-m=\dfrac{-(pq+st)\pm\sqrt{(pq+st)^2-(1+q^2+t^2)\,(p^2+s^2-a^2)}}{1+q^2+t^2}.$

Setzt man

24. $x-m=\text{tang}\,\xi,$

so wird die Gleichung 22.

$(p^2+s^2-a^2)\cos\xi^2+(pq+st)\sin 2\xi+(1+q^2+t^2)\sin\xi^2=0,$

und folglich, wenn man

$$\cos\xi^2=\frac{1+\cos 2\xi}{2},\quad \sin\xi^2=\frac{1-\cos 2\xi}{2}$$

setzt,

$$1+p^2+q^2+s^2+t^2-a^2-(1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2)\cos 2\xi+2(pq+st)\sin 2\xi=0.$$

Setzt man nun

25. $\text{tang}\,2\omega=\dfrac{2(pq+st)}{1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2},$

so erhält man ohne Schwierigkeit

26. $\cos 2(\xi+\omega)=\dfrac{1+p^2+q^2+s^2+t^2-a^2}{1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2}\cos 2\omega.$

Bezeichnet man in dem Dreiecke, dessen Seiten $a$, $a_1$ und die Entfernung $e_1$ der Punkte $(mnk)$ und $(m_1n_1k_1)$ von einander sind, den der Seite $a_1$ gegenüberstehenden Winkel durch $\alpha_1$, in dem Dreiecke, dessen Seiten $a$, $a_2$ und die Entfernung $e_2$ der Punkte $(mnk)$ und $(m_2n_2k_2)$ von einander sind, den der Seite $a_2$ gegenüberstehenden Winkel durch $\alpha_2$; so ist

$$\cos\alpha_1=\frac{a^2+e_1^2-a_1^2}{2ae_1},\quad \cos\alpha_2=\frac{a^2+e_2^2-a_2^2}{2ae_2},$$

und folglich

$$a^2+e_1^2-a_1^2=2ae_1\cos\alpha_1,\quad a^2+e_2^2-a_2^2=2ae_2\cos\alpha_2,$$

d. i.

$$a_1^2-a^2-(m-m_1)^2-(n-n_1)^2-(k-k_1)^2=-2ae_1\cos\alpha_1,$$
$$a_2^2-a^2-(m-m_2)^2-(n-n_2)^2-(k-k_2)^2=-2ae_2\cos\alpha_2;$$

also nach 18.

27. $i_1=-ae_1\cos\alpha_1,\quad i_2=-ae_2\cos\alpha_2,$

mittelst welcher Formeln die Grössen $i_1$ und $i_2$ sehr leicht berechnet werden können, wenn die Entfernungen $e_1$, $e_2$ und die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ bekannt sind.



Digitized by Google

Berechnet man die Hülfswinkel $\mu$ und $\varphi$, $\psi$, $\chi$ mittelst der Formeln

$$28.\quad \text{tang}\,\mu = \frac{i_2}{i_1}$$

und

$$29.\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{m-m_2}{m-m_1},\ \text{tang}\,\psi = \frac{n-n_2}{n-n_1},\ \text{tang}\,\chi = \frac{k-k_2}{k-k_1};$$

so hat man zur Berechnung der Grössen $p$, $q$, $s$, $t$ die folgenden Formeln:

$$30.\quad \begin{cases} p = \dfrac{i_1}{n-n_1} \cdot \dfrac{\sin(\mu-\chi)\cos\psi}{\sin(\psi-\chi)\cos\mu}, \\ q = -\dfrac{m-m_1}{n-n_1} \cdot \dfrac{\sin(\varphi-\chi)\cos\psi}{\sin(\psi-\chi)\cos\varphi}, \\ s = \dfrac{i_1}{k-k_1} \cdot \dfrac{\sin(\mu-\psi)\cos\chi}{\sin(\chi-\psi)\cos\mu}, \\ t = -\dfrac{m-m_1}{k-k_1} \cdot \dfrac{\sin(\varphi-\psi)\cos\chi}{\sin(\chi-\psi)\cos\varphi}. \end{cases}$$

Nach dem Vorhergehenden lässt unsere Aufgabe, wenn sie überhaupt möglich ist, jederzeit zwei Auflösungen zu, und es erhellet auch auf der Stelle aus geometrischen Gründen, dass es, wenn die Aufgabe möglich ist, immer zwei derselben genügende Punkte geben muss, welche auf entgegengesetzten Seiten der durch die drei gegebenen Punkte $(mnk)$, $(m_1n_1k_1)$, $(m_2n_2k_2)$ bestimmten Ebene liegen, übrigens aber gegen diese Ebene eine ganz gleiche Lage haben. Um also die Lage des gesuchten Punktes $(xyz)$ mittelst des Obigen vollkommen bestimmen zu können, muss man aus andern Gründen wissen, auf welcher Seite der durch die drei gegebenen Punkte $(mnk)$, $(m_1n_1k_1)$, $(m_2n_2k_2)$ bestimmten Ebene derselbe liegt.

3.

Die in 1. aufgelöste Aufgabe, in Verbindung mit dem in 2. gelösten Problem, würde sehr geeignet sein, mit Hülfe dreier ihrer Lage nach bekannter Punkte im Raume die Lage eines vierten Punktes im Raume zu bestimmen, wenn zu der Lösung derselben nicht, wie aus 1. bekannt ist, eine Gleichung des vierten Grades erforderlich wäre, deren Auflösung schon an sich weitläufig ist, und die auch, wenn die Aufgabe überhaupt möglich ist, jederzeit entweder zwei oder vier Auflösungen für dieselbe liefert. Ständen diese theoretischen Schwierigkeiten *) nicht entgegen, so würde man, wenn z. B. auf der Spitze eines Berges die drei Winkel gemessen worden wären, welche von den von derselben nach drei ihrer Lage nach bekannten Punkten im Raume gezogenen Gesichtslinien eingeschlossen werden, die Lage dieser Bergspitze im Raume, also auch, wenn man nur, was in allen Fällen das zweckmässigste sein dürfte, eine der drei Coordinatenebenen horizontal angenommen hat, ihre Höhe in Bezug auf diese Horizontalebene bestimmen

*) Als ein der Anwendung der in Rede stehenden Aufgabe im Wege stehendes Hinderniss, wenn man nämlich sehr grosse Genauigkeit verlangt, ist in praktischer Beziehung noch die Refraction zu bemerken.

Digitized by Google

können. Das eigentliche nach Pothenot benannte Problem liefert nur zwei Coordinaten des gesuchten Punktes, und kann seiner Natur nach nicht mehr liefern; unsere oben aufgelöste Aufgabe liefert dagegen alle drei Coordinaten des gesuchten Punktes, welches ein wesentlicher Vorzug derselben vor jenem Problem ist.

Die in Rede stehenden theoretischen Schwierigkeiten scheinen es aber nothwendig zu machen, dass man, wenn man die in 1. aufgelöste Aufgabe in der Praxis mit Leichtigkeit anwenden will, einen von der dort gegebenen allgemeinen Auflösung verschiedenen Weg einschlägt, den wir nun noch in der Kürze andeuten wollen.

Die drei gegebenen Punkte im Raume seien wie früher $A$, $B$, $C$, und $O$ sei der gesuchte Punkt; auch sollen überhaupt die in 1. eingeführten Bezeichnungen jetzt ihre dortige Bedeutung behalten, und wir wollen nur bloss noch

$$\angle BAO = \varphi,\ \angle CAO = \varphi'$$
$$\angle CBO = \psi,\ \angle ABO = \psi'$$
$$\angle ACO = \chi,\ \angle BCO = \chi'$$

setzen; so ist offenbar

$$31.\quad \begin{cases} \psi + \chi' = 180^\circ - \alpha, \\ \chi + \varphi' = 180^\circ - \beta, \\ \varphi + \psi' = 180^\circ - \gamma; \end{cases}$$

und

$$32.\quad \begin{cases} AO = \dfrac{b \sin \chi}{\sin \beta} = \dfrac{c \sin \psi'}{\sin \gamma}, \\ BO = \dfrac{c \sin \varphi}{\sin \gamma} = \dfrac{a \sin \chi'}{\sin \alpha}, \\ CO = \dfrac{a \sin \psi}{\sin \alpha} = \dfrac{b \sin \varphi'}{\sin \beta}; \end{cases}$$

also wegen 31.

$$33.\quad \begin{cases} \dfrac{a \sin \psi}{\sin \alpha} = \dfrac{b \sin (\beta + \chi)}{\sin \beta}, \\ \dfrac{b \sin \chi}{\sin \beta} = \dfrac{c \sin (\gamma + \varphi)}{\sin \gamma}, \\ \dfrac{c \sin \varphi}{\sin \gamma} = \dfrac{a \sin (\alpha + \psi)}{\sin \alpha}. \end{cases}$$

Man messe nun ausser den drei Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jederzeit entweder noch einen der drei Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ oder einen der drei Winkel $\varphi'$, $\psi'$, $\chi'$, welcher gerade die sicherste und bequemste Messung gestattet. Weil jedoch vermöge der Gleichungen 31., wenn einer der drei Winkel $\varphi'$, $\psi'$, $\chi'$ bekannt ist, immer auch einer der drei Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ bekannt ist; so sind wir berechtigt, bloss diesen letzten Fall in Betrachtung zu ziehen, und wollen zugleich, um die Begriffe zu fixiren, annehmen, dass der Winkel $\varphi$ gemessen worden sei. Dann kann man mittelst der aus 33. und einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie fliessenden Ausdrücke

$$34.\quad \sin \chi = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} \sin (\gamma + \varphi) = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \frac{\sin C}{\sin B} \sin (\gamma + \varphi)$$

Digitized by Google

den Winkel $\chi$ berechnen, wodurch man aber für $\chi$ jederzeit zwei sich zu 180° ergänzende Werthe erhält, und mittelst der Ausdrücke

$$35.\quad \sin\psi = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}\sin(\beta+\chi) = \frac{\sin\alpha\sin B}{\sin\beta\sin A}\sin(\beta+\chi)$$

kann man $\psi$ berechnen, wodurch man aber, da $\chi$ zwei Werthe hat, offenbar im Allgemeinen vier Werthe von $\psi$, überhaupt also vier Systeme von Werthen der Grössen $\chi$, $\psi$ erhält. Um nun zu entscheiden, welches dieser vier Systeme man zu wählen hat, muss man mittelst der Ausdrücke

$$36.\quad \sin\varphi = \frac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha}\sin(\alpha+\psi) = \frac{\sin\gamma\sin A}{\sin\alpha\sin C}\sin(\alpha+\psi)$$

den Winkel $\varphi$ berechnen, und muss untersuchen, welches der in Rede stehenden vier Systeme von Werthen der Grössen $\chi$, $\psi$ wieder, wenigstens so nahe als möglich, zu dem Werthe von $\varphi$, von welchem man ausging, zurückführt. Auf diese Weise erhält man Werthe von $\varphi$, $\psi$, $\chi$, welche als erste Näherungswerthe dieser Grössen zu betrachten sind, und im Folgenden durch $\varphi$, $\psi$, $\chi$ selbst bezeichnet werden sollen. Bezeichnet man nun die wahren Werthe der Winkel

$$BAO,\ CBO,\ ACO$$

respective durch

$$\varphi+d\varphi,\ \psi+d\psi,\ \chi+d\chi,$$

und setzt der Kürze wegen

$$37.\quad \begin{cases} f = \dfrac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha} = \dfrac{\sin\gamma\sin A}{\sin\alpha\sin C}, \\ g = \dfrac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha\sin B}{\sin\beta\sin A}, \\ h = \dfrac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = \dfrac{\sin\beta\sin C}{\sin\gamma\sin B}; \end{cases}$$

so hat man nach 33. die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin(\varphi+d\varphi) - f\sin(\alpha+\psi+d\psi) = 0,$$
$$\sin(\psi+d\psi) - g\sin(\beta+\chi+d\chi) = 0,$$
$$\sin(\chi+d\chi) - h\sin(\gamma+\varphi+d\varphi) = 0;$$

d. i. nach den bekannten Principien der Differentialrechnung die drei Gleichungen des ersten Grades in Bezug auf $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ als unbekannte Grössen:

$$38.\quad \begin{cases} \sin\varphi - f\sin(\alpha+\psi) + \cos\varphi d\varphi - f\cos(\alpha+\psi)\,d\psi = 0, \\ \sin\psi - g\sin(\beta+\chi) + \cos\psi d\psi - g\cos(\beta+\chi)\,d\chi = 0, \\ \sin\chi - h\sin(\gamma+\varphi) + \cos\chi d\chi - h\cos(\gamma+\varphi)\,d\varphi = 0; \end{cases}$$

aus denen nun $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ bestimmt werden müssen. Mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination und einiger leichten goniometrischen Transformationen erhält man, wenn der Kürze wegen

$$39.\quad N = \cos\varphi\cos\psi\cos\chi - fgh\cos(\alpha+\psi)\cos(\beta+\chi)\cos(\gamma+\varphi)$$

gesetzt wird, zur Bestimmung der gesuchten Correctionen $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ die folgenden Ausdrücke:

Digitized by Google

$$40.\quad \begin{cases} -N d\varphi = \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\chi - f\,\sin\alpha\,\cos\chi - fg\,\sin\beta\,\cos(\alpha+\psi) \\ \qquad\qquad -fgh\,\cos(\alpha+\psi)\,\cos(\beta+\chi)\,\sin(\gamma+\varphi), \\ -N d\psi = \cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\chi - g\,\sin\beta\,\cos\varphi - gh\,\sin\gamma\,\cos(\beta+\chi) \\ \qquad\qquad -fgh\,\sin(\alpha+\psi)\,\cos(\beta+\chi)\,\cos(\gamma+\varphi), \\ -N d\chi = \cos\varphi\,\cos\psi\,\sin\chi - h\,\sin\gamma\,\cos\psi - hf\,\sin\alpha\,\cos(\gamma+\varphi) \\ \qquad\qquad -fgh\,\cos(\alpha+\psi)\,\sin(\beta+\chi)\,\cos(\gamma+\varphi). \end{cases}$$

Hat man aber z. B. $d\varphi$ mittelst des ersten dieser drei Ausdrücke gefunden, so kann man $d\psi$ und $d\chi$ auch leicht mittelst der folgenden aus den Gleichungen 38. sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke finden:

$$41.\quad \begin{cases} d\psi = \dfrac{\sin\varphi - f\,\sin(\alpha+\psi) + \cos\varphi\, d\varphi}{f\,\cos(\alpha+\psi)} \\ d\chi = -\dfrac{\sin\chi - h\,\sin(\gamma+\varphi) - h\,\cos(\gamma+\varphi)\,d\varphi}{\cos\chi}. \end{cases}$$

Wie man auf dieselbe Art, wie man vorher von den Näherungswerthen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ zu den neuen Näherungswerthen $\varphi+d\varphi$, $\psi+d\psi$, $\chi+d\chi$ gelangte, von diesen Näherungswerthen wieder zu neuen Näherungswerthen übergehen, und auf diese Art überhaupt immer weiter fortschreiten kann, bedarf hier keiner besondern Erläuterung. Bemerken wollen wir jedoch noch, dass die obigen Formeln die Correctionen $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ natürlich in Theilen des Halbmessers, welcher bekanntlich immer der Einheit gleich gesetzt wird, ausgedrückt liefern. Will man aber diese Correctionen in Secunden ausdrücken, so dienen dazu die folgenden leicht verständlichen Formeln:

$$42.\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\ .\ d\varphi, \\ \dfrac{d\psi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\ .\ d\psi, \\ \dfrac{d\chi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\ .\ d\chi. \end{cases}$$

Hat man auf die vorhergehende Art die Winkel

$$BAO,\ CBO,\ ACO$$

gefunden; so erhält man die Entfernungen $AO$, $BO$, $CO$ mittelst der Formeln

$$43.\quad \begin{cases} AO = \dfrac{b\,\sin ACO}{\sin\beta} = \dfrac{c\,\sin(\gamma+BAO)}{\sin\gamma}, \\ BO = \dfrac{c\,\sin BAO}{\sin\gamma} = \dfrac{a\,\sin(\alpha+CBO)}{\sin\alpha}, \\ CO = \dfrac{a\,\sin CBO}{\sin\alpha} = \dfrac{b\,\sin(\beta+ACO)}{\sin\beta}; \end{cases}$$

und kann dann ferner, wenn die Coordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben sind, die Coordinaten des Punktes $O$ mittelst der in 2. entwickelten Formeln berechnen.

Will man unsere Aufgabe bei geodätischen Messungen in Anwendung bringen, so muss man natürlich mit einem Instrumente

Digitized by Google

versehen sein, welches, wie z. B. der Spiegelsextant, der Spiegelkreis, und insbesondere der Bordaische Kreis, die Messung der Winkel in allen Lagen derselben gegen den Horizont gestattet. Ein gewöhnlicher Theodolit, mit welchem sich bekanntlich bloss die horizontalen Projectionen der Winkel messen lassen, ist dagegen zu dem in Rede stehenden Gebrauche nicht geeignet, wohl aber zur Anwendung der gewöhnlichen Pothenotschen Aufgabe, für welche u. A. in No. XIV. S. 92. eine Auflösung gegeben worden ist, hinreichend.

# XXXVI.

## Untersuchungen über Projectionen und neuere Geometrie.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

### 1.

Die perspectivische Projection in ihrer einfachsten Gestalt entsteht bekanntlich dadurch, dass man zwei auf einander senkrechte Ebenen $MO$, $MQ$, die wir kurz $(E)$ und $(e)$ nennen, annimmt und von allen Gebilden der Ebene $(E)$ nach einem Projectionspunkt $P$ Gerade (Strahlen) zieht, welche $(e)$ in entsprechenden Punkten durchschneiden, die in ihrer Vereinigung die Projection des primitiven Gebildes abgeben. Wir wollen nun in dem Folgenden die Gebilde in $E$ und $e$, von denen das letztere die Projection des ersteren ist, entsprechende Gebilde nennen.

Zuerst ist klar, dass die Projection einer Geraden wieder eine Gerade sein wird, dass es also für die Bestimmung der Lage der Projection hinreicht, wenn man zwei Punkte der primitiven Geraden projicirt. Ist nun $MN$ (Taf. III. Fig. 1.) der Durchschnitt der Ebenen $(E)$ und $(e)$ und darin $C$ der Punkt, in welchem $MN$ von der zu projicirenden Geraden $CT$ in $(E)$ geschnitten wird, so fallen in $C$ die einander entsprechenden Punkte zusammen, oder $C$ ist die Projection seiner selbst. — Ferner ist klar, dass, je weiter man die Gerade $CT$ verlängert, der Projectionsstrahl $PT$ sich successive der Lage $Pt \parallel CT$ nähern wird. Lassen wir also $T$ sich

Digitized by Google

unendlich weit von $MN$ entfernen, so geht der Projectionsstrahl $PT$ ganz in die Lage $Pt \parallel CT$ über, und es ist dann $t$ die Projection des unendlich entfernten Punktes $T$ und die begränzte Gerade $Ct$ die der unbegränzten $CT$. Die Bestimmung des Punktes $t$ hat nicht die mindeste Schwierigkeit mehr, da die Ebene $Pot \parallel$ der Ebene $(E)$ mithin auch $ot \parallel MN$ und wie vorher $Ot \parallel CT$ ist.

Man bemerkt aber leicht, dass diese Bestimmung des Punktes $t$ gar nicht von der Lage des Punktes $C$ in $MN$ abhängt, dass also für eine Gerade $C'T' \parallel CT$ ganz dieselbe Construktion gilt, und also $C't$ die Projection von $C'T'$ ist. Daraus ergiebt sich der Satz

„Einem Systeme paralleler Geraden in $(E)$ entspricht ein Strahlbüschel in $(e)$."

Wenn sich der Winkel $MCT$ ändert, wird offenbar $t$ sich auf der Geraden $ot \parallel MN$ bewegen; also:

„Die Mittelpunkte aller Strahlbüschel, welche verschiedenen Systemen paralleler Geraden entsprechen, liegen in einer Geraden."

Unter den verschiedenen Werthen, die der Winkel $MCT$ annehmen kann, sind besonders zwei hervorzuheben. Ist nämlich $\angle MCT = R$, so fällt $t$ mit $o$ zusammen; ist aber $\angle MCT = \frac{1}{2}R$, so wird $ot = Po$ und also schon bekannt, weil die Entfernung des Projectionspunktes gegeben ist. Daraus ergiebt sich leicht ein Verfahren, um die Projection jedes beliebigen Punktes $J$ aufzufinden Taf. III. Fig. 2. *). Denn fällen wir das Perpendikel $HJ$ und machen $HK = HJ$, so lässt sich $J$ als Durchschnitt zweier Geraden betrachten, von denen die eine $MN$ unter einem rechten, die andere unter einem halben rechten Winkel schneidet. Ist $ot$ wieder die Entfernung des Projectionspunktes von $(e)$, so ist $Ho$ die Projection der unbestimmt verlängerten $HJ$, $kt$ die von $KJ$ also der Durchschnitt $i$ die Projection von $J$.

2.

Man kann aber auch von der Ebene $(e)$ ausgehen, sich die Gebilde derselben als gegeben denken und von ihnen auf die der Ebene $(E)$ zurückschliessen, indem man über $ot$ einen Projectionspunkt denkt, durch welchen umgekehrt die Gebilde in $(E)$ entstehen. Dann hat man folgenden Satz:

„Allen Strahlbüscheln in $(e)$, deren Mittelpunkte in einer Geraden $(ot)$ liegen, entsprechen in $(E)$ gleich viele Systeme paralleler Geraden."

Aus diesem und dem ihm analogen Satze in (1) lassen sich nun für eine Menge von Sätzen aus der Situationsgeometrie die einfachsten Beweise herleiten, wofür nun einige Beispiele dienen sollen.

Sei Taf. III. Fig. 6. $cpf$ ein beliebiger Winkel und ausser ihm ein Punkt $q$ angenommen, von welchem aus durch jenen Winkel beliebig viele Strahlen $aq$, $bq$, $cq$ . . gezogen sind. Zieht man in den so entstandenen Vierecken die Diagonalen, so liegen die Durchschnitte derselben mit $p$ in einer Geraden.

*) Die Figur stellt Alles in einer Ebene dar, so dass man sich $(E)$ um $MN$ als Axe gedreht denken kann, bis sie mit $(e)$ zusammenfällt.

Digitized by Google

Denn nehmen wir die Gerade $pq$ als die Gerade $ot$ in Taf. III. Fig. 1. an, so entsprechen dem Winkel $cpf$ zwei Parallelen $AC$, $DF$, den Strahlen $aq$, $bq$, $cq$ . . die Parallelen $AD$, $BE$, $CF$ . . . . Folglich sind die entsprechenden Vierecke Parallelogramme. Die Durchschnitte $M$, $M'$ . . der Diagonalen in denselben liegen aber nach sehr bekannten Sätzen in einer Geraden, welche zugleich $\| AC$ und $DF$ ist. Folglich müssen nach (1) die Projectionen von $M$, $M'$, . . ebenfalls in einer Geraden liegen, welche auch durch $p$ geht, w. z. b. w.

Von diesem Satze lassen sich bekanntlich viele fruchtbare Anwendungen machen, die wie hier übergehen müssen.

3.

Taf. III. Fig. 4. Wenn die drei Geraden $aa'$, $bb'$, $cc'$, welche die Spitzen zweier Dreiecke mit einander verbinden, sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Durchschnitte $p$, $q$, $r$ der verlängerten gleichnamigen Seiten, $ab$ und $a'b'$, $ac$ und $a'c'$, $bc$ und $b'c'$, in einer Geraden.

Nehmen wir die Gerade $pq$ als die Linie $ot$ in Taf. III. Fig. 1. an, so entspricht dem Strahlbüschel $am$, $bm$, $cm$ ein anderer $AM$, $BM$, $CM$, in welchem $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Nun folgt daraus nach bekannten Eigenschaften ähnlicher Dreiecke $BC \| B'C'$, also entsprechen diesen Geraden zwei andere $bc$, $b'c'$, deren Durchschnitt mit auf $pq$ liegt.

4.

Taf. III. Fig. 5. In einem Dreiecke $LMNO$ ist die Grundlinie $LN$ in $M$ halbirt, der Strahl $MO$ und noch $OQ \| MN$ gezogen; der so entstandene Strahlbüschel heisst bekanntlich ein harmonischer und es giebt darüber die beiden Sätze:

„Jede Gerade, die einen harmonischen Strahlbüschel schneidet, wird von demselben harmonisch getheilt;“

und

„Jeder Strahlbüschel, dessen Strahlen durch die harmonischen Theilpunkte einer Geraden gehen, ist ein harmonischer.“

Nach dem ersteren Satze werden also $abcd$ und $ABCD$ harmonisch getheilt sein. Nun kann man sich aber diese beiden Geraden in ganz beliebigen verschiedenen Ebenen und $O$ als Projectionspunkt dazu denken; dann hat man den Satz, dass die perspectivische Projection einer Harmonischen wieder eine Harmonische ist; oder:

„Einer harmonisch getheilten Geraden entspricht jederzeit wieder eine Harmonische.“

Daraus ergiebt sich, wenn man über den beiden entsprechenden Harmonischen Strahlbüschel construirt und den einen als Projection des andern betrachtet, leicht der analoge Satz:

„Einem harmonischen Strahlbüschel entspricht jederzeit wieder ein harmonischer Strahlbüschel.“

Diese einfachen Sätze werden die Quelle sehr fruchtbarer Untersuchungen, von denen wir einige andeuten wollen.

Taf. III. Fig. 6. Es sei $abcd$ ein Viereck, dessen Gegenseiten sich in $m$ und $n$ schneiden. Wir betrachten die Gerade $mn$ als die

Digitized by Google

Linie *ot* in Taf. III. Fig. 1., so dass den Strahlen *am*, *cm* die Parallelen *AM*, *CM*, ebenso *an*, *cn* die Parallelen *AN*, *CN* entsprechen. Dem Viereck *abcd* entspricht also das Parallelogramm *ABCD*. Da sich nun die Diagonalen *AC*, *BD* desselben halbiren, so können wir die unendlich verlängerten *AP*, *BQ* harmonisch getheilt nennen, und folglich sind es auch die Diagonalen *ap*, *bq*. Ziehen wir *JF* || *CD*, *JG* || *BC*, so läuft *FG* || *DQ* und wird von *JC* halbirt. Folglich ist der Strahlbüschel *JN*, *JP*, *JM*, *JQ* ein harmonischer, also ist es auch der entsprechende *in*, *im*, *ip*, *iq*, und daher muss auch *mq* harmonisch getheilt sein. Nennt man die Figur in (*e*) ein vollständiges Viereck und *ap*, *bq*, *mq* die Diagonalen desselben, so hat man den bekannten Satz:

„Die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks theilen einander harmonisch,"

woraus sich noch eine Menge Folgerungen ziehen lässt.

5.

Taf. III. Fig. 7. Bekanntlich nennt man die Durchschnitte der äusseren und inneren Tangenten zweier ausser einander liegenden Kreise den äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt jener Kreise.

Nun kann man aber dieses Gebilde als Projection eines Cylinders ansehen, wenn man den Projectionspunkt irgend wo in dem durch *a* auf der Ebene der Zeichnung errichteten Perpendikel und die Projectionsebene (*e*) parallel den Ebenen jener Kreise annimmt. Vergleichen wir nun unsere Figur mit der daneben gestellten correspondirenden, so ergiebt sich gleich, dass *M*, *J*, *N* und der unendlich entfernte Punkt *H* harmonisch liegen, also ist diess auch links der Fall; oder:

„Die Mittelpunkte beider Kreise liegen mit den Aehnlichkeitspunkten harmonisch."

Taf. III. Fig. 8. Projiciren wir ein System dreier Cylinder von gleichen Grundflächen, so entsteht ein System von drei ungleichen Kreisen (da die Grundflächen jener Cylinder ungleich weit von der ihnen parallelen Projectionsebene entfernt sind) zu welchen drei äussere und ebensoviel innere Aehnlichkeitspunkte gehören. Da nun links alle äusseren Tangenten einander parallel sind, so liegen rechts die Durchschnitte derselben in einer Geraden, (welche die Gerade *ot* in Taf. III. Fig. 1. ist); oder:

„Die äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in einer Geraden."

Betrachten wir links die inneren Aehnlichkeitspunkte $J_1$, $J_2$, so erhellt gleich, dass die Gerade $J_1 J_2$ || den äusseren Tangenten an *M* und *R* läuft. Dies giebt für die Figur rechts sogleich den Satz:

„Jeder der drei äusseren Aehnlichkeitspunkte liegt mit zwei inneren in einer Geraden."

Also giebt es im Ganzen vier Aehnlichkeitsstrahlen.

6.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Kegelschnitte, und zwar ist gerade hier die Untersuchung mittelst projectivischer Eigenschaften die zweckmässigste, da der Kegelschnitt seiner Entstehung nach nichts anders als die perspectivische Projection eines

Digitized by Google

Kreises ist. Wir nehmen wie bisher immer den einfachsten Fall an, dass die Projections- (hier die Schnitt-) ebene senkrecht auf ($E$) (der Busisebene) stehe, da sich hierauf jeder andere Fall leicht reduziren lässt.

Taf. III. Fig. 9. Hier gewinnt nun die Gerade $ot$ Taf. III. Fig. 1., welche schon bisher die bedeutendste Rolle spielte eine ganz besondere Wichtigkeit und wir werden sie daher künftig die Polare des Kegelschnitts nennen. Sei nun $k$ ein beliebiger Kegelschnitt, den wir als Projection eines Kreises $K$ ansehen, $ot$ die Polare (auf der sich also die Projectionen aller Geraden schneiden, die in ($E$) Parallelen sind) und $m$ die Projection des Kreismittelpunkts, die wir den Pol des Kegelschnitts nennen, so ist klar, dass jede Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kreises $K$ geht, von $M$ und dem Kreise halbirt, d. h. sammt dem unendlich entfernten Punkte harmonisch getheilt wird. Also wird jede Gerade, welche durch den Pol des Kegelschnitts geht, vom Pol, der Curve und der Polare harmonisch getheilt. Ziehen wir ferner irgend einen Durchmesser $AB$ des Kreises und legen Tangenten an $A$ und $B$, so laufen diese einander jederzeit parallel. Nun entsprechen: dem Durchmesser: eine durch den Pol gehende Gerade, welche Berührungssehne heissen mag, den parallelen Tangenten am Kreise: zwei Tangenten am Kegelschnitt, deren Durchschnitt, „das Berührungscentrum," auf der Polare liegt. Wie sich nun auch $AB$ um $M$ drehen mag, so bleiben doch die Tangenten an $A$ und $B$ Parallelen, d. h. wenn sich die Berührungssehne um den Pol dreht, so durchläuft das Berührungscentrum die Polare; oder:

„Die Polare ist der Ort aller Berührungscentra, deren Berührungssehnen durch den Pol gehen,"

und auch umgekehrt

„Der Pol ist der Punkt, durch den alle Berührungssehnen gehen, deren Berührungscentra auf der Polare liegen."

Daraus lassen sich leicht die Auflösungen der Aufgaben ableiten:

„Den Pol zu finden, wenn die Polare gegeben ist,"

„Die Polare zu finden, wenn der Pol gegeben ist."

## 7.

In dem Vorigen wurde das Ziehen von Tangenten an den Kegelschnitt verlangt, aber es ist noch nicht gezeigt worden, auf welche Weise diess geschieht, und deshalb geben wir folgende Construktion dazu:

Taf. III. Fig. 10. Wenn vom Punkte $p$ an den Kegelschnitt $k$ Tangenten gelegt werden sollen, so ziehe man beliebig zwei Strahlen $ap$, $bp$, die den Kegelschnitt noch in $c$ und $d$ schneiden werden. Dann ziehe man $ab$, $cd$, die sich in $f$, $ad$, $bc$ die sich in $g$ schneiden und die Gerade $fg$. Diese schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten $u$, $v$, welche die Berührungspunkte der, von $p$ aus zu legenden Tangenten sind.

Denn man nehme $p$ als Punkt einer beliebigen Polare und $k$ als Projection eines Kreises $K$ an, so entsprechen den Strahlen $ac$, $bd$ zwei Parallelen $AC$, $BD$. Nun ist aber klar, dass durch die Construktion in ($E$), $U$ und $V$ die Berührungspunkte von Tangenten sind, welche $\| AC \| BD$ laufen. Also entsprechen ihnen

Digitized by Google

in ($e$) die Berührungspunkte der Tangenten, welche durch $p$ gehen, w. z. b. w.

Es hat nun auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe: durch zwei gegebene Punkte eines Kegelschnitts an denselben Tangenten zu ziehen nicht die mindeste Schwierigkeit, weshalb wir sie übergehen.

## 8.

**Die Durchschnitte der drei Paar Gegenseiten jedes, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer Geraden.**

Taf. III. Fig. 11. $abcdef$ sei das Sechseck (Sehnensechseck), $p$, $q$ mögen die Durchschnitte von den zwei Paar Gegenseiten $af$, $cd$ und $bc$, $ef$ heissen. Nimmt man $pq$ als Polare und den Kegelschnitt als Projection eines Kreises an, so entsprechen jenen zwei Paaren die Sehnen $AF \parallel CD$ und $BC \parallel EF$. Aber bekanntlich fassen parallele Sehnen gleiche Bogen zwischen sich, also ist, wenn wir die Bogen stets rechts herum nennen:

$$\text{arc } AC = \text{arc } DF$$
$$\text{arc } CE = \text{arc } FB$$

also durch Addition arc $AE$ (der grössere dieses Namens) = arc $DB$ (ebenso). Ziehen wir beide vom Kreisumfang ab, so bleibt arc $AE$ = arc $BD$, woraus $AB \parallel DE$ folgt.

Also liegt der Durchschnitt $r$ von $ab$ und $de$ mit auf der Polare d. h. in einer Geraden mit $p$ und $q$.

Der Satz gilt auch umgekehrt, was sich apagogisch sehr leicht zeigen lässt.

**In jedem, einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke schneiden sich die Diagonalen, welche zwei Gegenecken verbinden in einem Punkte.**

Taf. III. Fig. 12. $abcdef$ sei dieses Sechseck (Tangentensechseck), $ad$, $be$, $cf$ jene Diagonalen (Hauptdiagonalen). Man nehme den Durchschnitt $m$ der ersten beiden als Pol des Kegelschnitts und diesen als Projection eines Kreises an, so entspricht dem Pol $m$ der Mittelpunkt $M$ und jenem Sechseck ein anderes, dessen beide ersten Hauptdiagonalen durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gehen.

Es ist nun bloss zu zeigen, dass auch die 3te Hauptdiagonale $CF$ durch $M$ geht, was sehr leicht (namentlich apagogisch) geschieht. Daraus folgt denn, dass $cf$ durch $m$ geht.

Auch dieser Satz gilt umgekehrt.

Diese beiden Sätze bilden bekanntlich die Grundlage für die Theorie der Reciprocität bei den Kegelschnitten, indem man die Punkte der Gebilde in dem einen Kegelschnitt als Berührungscentra für einen zweiten Kegelschnitt ansieht, wodurch dann ein bekanntes Correlationssystem entsteht, dessen Ausführung hier aber zu weit führen würde.

Lässt man in den beiden vorigen Sätzen eine Seite verschwinden und zur Tangente werden, so gelangt man zu bekannten Sätzen vom Fünfeck, und ebenso vom Viereck und Dreieck, die sich natürlich auch leicht besonders beweisen lassen.

Digitized by Google

9.

Es kann endlich noch die Frage aufgeworfen werden, wie man, wenn der Kegelschnitt und der Pol oder die Polare gegeben ist, die Lage des Projectionspunktes $P$ (Taf. III. Fig. 1.) d. h. die Spitze des Kegels findet, der dann die Eigenschaft hat, dass er von der Ebene $(E)$ in einem Kreise geschnitten wird, was allerdings zur Vervollständigung dieser Anwendung der Projectionen durchaus nöthig ist.

Diese Aufgabe ist jederzeit bestimmt und nach dem früher über Pole und Polaren, Berührungscentra und Berührungssehnen Gesagten sehr leicht zu lösen, wenn man die in (1) geführte Untersuchung über die Lage von $o$ und $t$ dabei zu Hülfe nimmt. Indess würde diess die Gränzen dieses Aufsatzes unnöthigerweise überschreiten, da ich ohnediess diesen Gegenstand ausführlich noch besonders behandeln werde.

---

# XXXVII.

## Neue Auflösung der cubischen Gleichungen von Herrn J. Cockle.

Aus Cambridge Mathematical Journal No. XII. (Mai, 1841). Vol. II. p. 248. frei übersetzt von

dem Herausgeber.

---

Jede cubische Gleichung kann auf die Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

gebracht werden.

Zuerst wollen wir den speciellen Fall betrachten, wenn zwischen den Coefficienten $a$, $b$, $c$ die Gleichung $3ac = b^2$ Statt findet. Bringt man in diesem Falle die Gleichung auf die Form

$$-x^3 = ax^2 + bx + c$$

und multiplicirt auf beiden Seiten mit $3ab$, so erhält man

$$-3abx^2 = 3a^2x^2 \,.\, b + 3ax \,.\, b^2 + 3abc,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $3ac = b^2$, also $3abc = b^3$ ist,

$$-3abx^2 = 3a^2x^2 \,.\, b + 3ax \,.\, b^2 + b^3.$$

Addirt man jetzt auf beiden Seiten $a^3x^3$, so erhält man

Digitized by Google

$$a(a^3-3b)x^3=a^3x^3+3a^2x^2\,.\,b+3ax\,.\,b^2+b^3,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten die Cubikwurzel auszieht,

$$x\sqrt[3]{a(a^3-3b)}=ax+b,$$

also

$$x=\frac{b}{\sqrt[3]{a(a^3-3b)}-a}.$$

Wenn ferner die Gleichung $3ac=b^2$ nicht Statt findet, so setze man $y+z$ für $x$, wodurch die gegebene Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

die folgende Form erhält:

$$y^3+(3z+a)y^2+(3z^2+2az+b)y+z^3+az^2+bz+c=0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$A=3z+a,$$
$$B=3z^2+2az+b,$$
$$C=z^3+az^2+bz+c$$

gesetzt wird, die Form

$$y^3+Ay^2+By+C=0.$$

Soll nun diese letztere Gleichung nach dem Vorhergehenden auflösbar sein, so ist erforderlich, dass die Gleichung

$$3AC=B^2,$$

d. i. die Gleichung

$$3(3z+a)\,(z^3+az^2+bz+c)=(3z^2+2az+b)^2$$

erfüllt ist, und aus dieser letztern Gleichung muss also die Grösse $z$ bestimmt werden. Entwickelt man dieselbe gehörig, so findet man, dass die $z^4$ und $z^3$ enthaltenden Glieder sich gegenseitig aufheben, und die Gleichung daher eine Gleichung des zweiten Grades ist, die man leicht auf die Form

$$(a^2-3b)z^2+(ab-9c)z+b^2-3ac=0$$

oder

$$z^2+\frac{ab-9c}{a^2-3b}z+\frac{b^2-3ac}{a^2-3b}=0$$

bringt. Bestimmt man nun aus dieser Gleichung $z$ auf gewöhnliche-Weise, so erhält man nach dem Obigen ferner $y$ mittelst der Formel

$$y=\frac{B}{\sqrt[3]{A(A^2-3B)}-A},$$

wo für $A$, $B$, $C$ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe zu setzen sind, und $x$ ergiebt sich endlich mittelst der Formel

$$x=y+z=\frac{B}{\sqrt[3]{A(A^2-3B)}-A}+z.$$

Digitized by Google

Führt man für $A$, $B$, $C$ ihre obigen Werthe wirklich ein, so ergiebt sich nach leichter Rechnung für $x$ der Ausdruck

$$x = z + \frac{3z^2 + 2az + b}{\sqrt[3]{(a^2 - 3b)\ (3z + a)} - (3z + a)},$$

wo nach dem Obigen $z$ aus der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \frac{ab - 9c}{a^2 - 3b}\, z + \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b} = 0$$

zu bestimmen ist. Den Ausdruck von $z$ kann man auch unter der Form

$$x = z + \frac{(3z + a)z + az + b}{\sqrt[3]{(a^2 - 3b)\ (3z + a)} - (3z + a)}$$

darstellen.

Ist die gegebene cubische Gleichung z. B.

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0,$$

so ist $3ac = 36 = b^2$, und folglich nach dem Obigen

$$x = \frac{b}{\sqrt[3]{a(a^2 - 3b)} - a} = \frac{6}{\sqrt[3]{8} + 4}.$$

Berücksichtigt man nun jetzt bloss den reellen Werth von $\sqrt[3]{8}$, nämlich 2, so erhält man $x = 1$. Die beiden imaginären Werthe, welche $\sqrt[3]{8}$ noch hat, würden für $x$ noch zwei imaginäre Werthe liefern.

Ist die gegebene cubische Gleichung ferner

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 13 = 0,$$

wo nicht $3ac = b^2$ ist, so ist die quadratische Gleichung, aus welcher $z$ bestimmt werden muss, folgende:

$$z^2 - \frac{7}{2}\, z = -\frac{5}{2}.$$

Diese Gleichung hat die beiden reellen Wurzeln 1 und $\frac{5}{2}$. Setzt man $z = 1$, so ergiebt sich nach dem Obigen

$$x = 1 + \frac{6}{\sqrt[3]{8} + 4},$$

und folglich, wenn man jetzt wieder bloss den reellen Werth 2 von $\sqrt[3]{8}$ berücksichtigt, $x = 2$. Die beiden imaginären Werthe, welche $\sqrt[3]{8}$ noch haben kann, liefern für $x$ natürlich noch zwei imaginäre Werthe. Dass man auch $z = \frac{5}{2}$ setzen könnte, versteht sich von selbst; natürlich würde aber dieser Werth von $z$ zu denselben Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung führen wie der vorhergehende Werth von $z$.

Weitere Betrachtungen über den Fall, wenn die quadratische Gleichung, aus welcher die Grösse $z$ bestimmt werden muss, zwei

Digitized by Google

imaginäre Wurzeln hat, überlassen wir dem Leser, da dieselben keine Schwierigkeiten haben, und sich leicht mit der gewöhnlichen Theorie der Auflösung der cubischen Gleichungen werden in Verbindung setzen lassen.

Wenn uns auch diese neue Auflösung der cubischen Gleichungen des Herrn Cockle vor der bekannten Auflösung des Cardanus keine wesentlichen Vorzüge zu haben, und die Theorie der Gleichungen des dritten Grades durch dieselbe nicht eben gefördert zu werden scheint, so verdiente sie doch in dem Archive aufbewahrt zu werden.

---

# XXXVIII.

## Beiträge zur Entwickelung der Integrale in Reihen.

Von

Herrn N. W. Schulze,

Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt.

---

Es sei ein zu integrirendes Differenzial vorerst dieses:

$$\frac{dx}{1+x}.$$

Man füge dem Nenner eine identische Gleichung bei,

$$p-p=0,$$

nämlich: $\frac{dx}{1+x}=\frac{dx}{(1+p)-(p-x)}=[(1+p)-(p-x)]^{-1}.dx,$

und entwickele nach dem Binomischen Satze, so dass $p-x$ in aufsteigenden Potenzen fortgeht, so ist

$$1)\ [(1+p)-(p-x)]^{-1}.dx=\left[\frac{1}{1+p}+\frac{(p-x)}{(1+p)^2}+\frac{(p-x)^2}{(1+p)^3}+\ldots\right]dx.$$

Man integrire und nehme $p$ als beständig, also

$$2)\ \int\left[\frac{1}{1+p}+\frac{(p-x)}{(1+p)^2}+\ldots\right].dx$$

$$=\frac{x}{1+p}+\frac{px-\frac{1}{2}x^2}{(1+p)^2}+\frac{p^2x-px^2+\frac{1}{3}x^3}{(1+p)^3}+\frac{p^3x-\frac{3}{2}p^2x^2+px^3-\frac{1}{4}x^4}{(1+p)^4}+\ldots.$$

Es kommt nun darauf an, $p$ so zu bestimmen, dass die Reihe schnell convergirt; dies würde sich ergeben, wenn man auf einander folgende Glieder, was vom 2ten an geschehen darf, zusammen $=0$



Digitized by Google

setzte, den Werth für $p$ suchte und selbigen in das erste Glied und etwa noch in die übrigen letzteren substituirte. Da aber durch die höheren Gleichungen die Rechnung unbequem würde, so setze ich bloss das 2te Glied $= 0$, nämlich

$$\frac{px - \frac{1}{2}x^2}{(1+p)^2} = 0, \text{ also } p = \frac{1}{2}x.$$

Setzt man in 2) rechter Hand überall $\frac{1}{2}x$ statt $p$, dann gestaltet sich die Reihe so, dass das 4te, 6te, 8te u. s. w. Glied auch $= 0$ sind, und wir bekommen nach gehöriger Abkürzung:

$$3) \int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) =$$

$$2\left[\frac{x}{2+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2+x}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x}{2+x}\right)^7 + \ldots\right] + [\text{Const.} = 0]$$

also eine auf anderm Wege bereits schon gefundene bekannte Reihe; und ist die Uebereinstimmung des Resultats dieser Methode mit dem anderer für dieses Beispiel nur ein besonderer Fall, wie wir an den folgenden sehen werden.

Es sei das Differenzial der Kreisfläche gegeben, so ist, nach Beifügung des obigen $p$,

$$dx\sqrt{2x - x^2} = dx \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot (2-x)^{\frac{1}{2}} = [(2+p) - (p+x)]^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx;$$

also

$$4) \int [(2+p) - (p+x)]^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \int [x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2+p} - \frac{(px^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})}{2\sqrt{2+p}} - \frac{(p^2x^{\frac{1}{2}} + 2px^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})}{8(2+p)\sqrt{2+p}} - \ldots] \cdot dx$$

$$= \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2+p} - \frac{(\frac{2}{3}px^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})}{2\sqrt{2+p}} - \frac{(\frac{2}{3}p^2x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}px^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})}{8(2+p)\sqrt{2+p}} - \ldots.$$

Setzt man wiederum in letzterer Reihe das 2te Glied $= 0$, woraus erhalten wird $p = -\frac{4}{5}x$, und substituirt diesen Werth für $p$ in den Ausdruck des Integrals 4), so wird nach gehöriger Abkürzung erhalten:

$$5) \int dx\sqrt{2x - x^2} = \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{10-3x}}{3\sqrt{5}} -$$

$$\left[\frac{1}{35} - \frac{2x}{315(10-3x)} + \frac{29x^2}{924(10-3x)^2} - \ldots\right] \cdot \frac{x^3\sqrt{x}\cdot\sqrt{5}}{(10-3x)\sqrt{10-3x}} + (C=0).$$

Für $x = 1$ erhält man, wenn $A$ das Integral bezeichnet,

$$6) \quad A = \frac{2\times 2{,}64575}{3\times 2{,}23606} - (0{,}0285714 - 0{,}0009070 + 0{,}0006405) \times \frac{2{,}23606}{7\times 2{,}64575}$$

$$= 0{,}78881306 - \frac{0{,}0283049 \times 2{,}23606}{7 \times 2{,}64575} = 0{,}78539|56$$

Diese vier Glieder sind demnach hinreichend, um den Flächeninhalt des Quadranten für den Radius $= 1$ bis zur fünften Decimalstelle genau zu geben.

Es sei ferner vorgelegt das sich nicht direct integriren lassende Differenzial

$$dx\sqrt{x + 2\sqrt{x}} = dx \cdot x^{\frac{1}{4}}(2 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

so ist nach dieser Methode:

$$7)\ \int dx\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,[(2+p)-(p-x^{\frac{1}{2}})]^{\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{5}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2+p} - \frac{(\frac{2}{5}px^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{1}{2}})}{2\sqrt{2+p}} - \frac{(\frac{4}{5}p^2x^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{5}px^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}x^{\frac{1}{2}})}{8(2+p)\sqrt{2+p}} - \ldots.$$

Wird, wie gewöhnlich, das zweite Glied annullirt, so ergiebt sich $p=\frac{4}{7}x^{\frac{1}{2}}$, und durch Substitution desselben in 7) erhält man, wenn $A'$ das Integral bedeutet,

$$8)\ A' = \tfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x}\times\frac{\sqrt{14+5\sqrt{x}}}{\sqrt{7}} - \left[\frac{1}{63\,(14+5\sqrt{x})} + \frac{2}{231\,(14+5\sqrt{x})^2}\right]\times\frac{2x\sqrt[4]{x}\,.\sqrt{7}}{\sqrt{14+5\sqrt{x}}}.$$

Für $x=1$ erhält man die sehr schnell zusammenlaufende Reihe:

$$9)\ A' = 1{,}318000 - [0{,}0008350 + 0{,}0000235]\times 0{,}60697\times 2$$
$$= 1{,}318000 - 0{,}0010421 = 1{,}316958\,..$$

Wenn die Entwickelung von $\int dx\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,(2+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ durch eine gewöhnliche Reihe bewerkstelligt wird, so erhält man erst nach Entwickelung von 8 Gliedern das Resultat 1,316967.., mit dem jenes, nur aus 3 Gliedern entstanden, beinahe bis zur fünften Stelle übereinstimmt.

Nicht für jede Form liefert der directe Gebrauch dieser Methode durch Annullirung des zweiten Gliedes eine schnell convergirende Reihe. Dies ist der Fall bei dieser Form:

$$\frac{dx}{1+x^2}.$$

Denn wenn man nach obiger Verfahrungsweise aus selbiger die weiteren Resultate zieht, so ergiebt sich, dass vom dritten Gliede an die schnelle Convergenz nachlässt. Durch eine passende Umformung wird aber selbige wieder hergestellt. Es sei daher

$$x=z^{\frac{1}{2m}},\ \text{also}\ dx=\frac{1}{2m}z^{\frac{1-2m}{2m}}.dz,\ \text{daher}\ \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2m}.z^{\frac{1-2m}{2m}}\times(1+z^{\frac{1}{m}})^{-1}\,dz.$$

Der Ausdruck rechter Hand lässt sich in folgende Brüche zerlegen:

$$10)\ \frac{dz}{z^{\frac{2m-1}{2m}}\,.\,(1+z^{\frac{1}{m}})} = \frac{dz}{z^{\frac{2m-1}{2m}}} - \frac{dz}{z^{\frac{2m-3}{2m}}} + \frac{dz}{z^{\frac{2m-5}{2m}}} - \frac{dz}{z^{\frac{2m-7}{2m}}} + \frac{dz}{z^{\frac{2m-9}{2m}}} - \ldots. \pm \frac{dz}{z^{\frac{1}{2m}}[1+z^{\frac{1}{m}}]}\,.$$

Die Zahl der Glieder dieser Reihe hängt sonach von der Grösse $m$ ab, und wir haben

für $m=1$

$$11)\ \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\,(1+z)} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\,(1+z)};$$

für $m=2$

$$12)\ \frac{dz}{z^{\frac{1}{4}}\,(1+z^{\frac{1}{2}})} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{4}}} - \frac{dz}{z^{\frac{1}{4}}\,(1+z^{\frac{1}{2}})};$$



Digitized by Google

für $m = 3$

$$13)\quad \frac{dz}{z^{\frac{1}{3}}(1+z^{\frac{1}{3}})} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{3}}} - \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} + \frac{dz}{z^{\frac{1}{3}}(1+z^{\frac{1}{3}})}$$

u. s. w.

Das letzte Glied, allgemein genommen wie in 10), nach unserer Methode durch Beifügung von $p - p$ behandelt, ist

$$14)\quad \int z^{-\frac{1}{2m}} \cdot [(1+p) - (p - z^{\frac{1}{m}})]^{-1} \cdot dz$$

$$= \frac{z^{\frac{2m-1}{2m}}}{(2m-1)(1+p)} + \frac{pz^{\frac{2m-1}{2m}} - z^{\frac{2m+1}{2m}}}{(1+p)^2} \cdot 2m$$

$$+ \frac{p^2 z^{\frac{2m-1}{2m}} - 2pz^{\frac{2m+1}{2m}} + z^{\frac{2m+3}{2m}}}{(1+p)^3} \cdot 2m$$

$$+ \frac{p^3 z^{\frac{2m-1}{2m}} - 3p^2 z^{\frac{2m+1}{2m}} + 3pz^{\frac{2m+3}{2m}} - z^{\frac{2m+5}{2m}}}{(1+p)^4} \cdot 2m$$

$$+ \frac{p^4 z^{\frac{2m-1}{2m}} - 4p^3 z^{\frac{2m+1}{2m}} + 6p^2 z^{\frac{2m+3}{2m}} - 4pz^{\frac{2m+5}{2m}} + z^{\frac{2m+7}{2m}}}{(1+p)^5} \cdot 2m$$

$$+ \frac{\left\{\begin{array}{l} p^5 z^{\frac{2m-1}{2m}} - 5p^4 z^{\frac{2m+1}{2m}} + 10p^3 z^{\frac{2m+3}{2m}} \\ - 10p^2 z^{\frac{2m+5}{2m}} + 5pz^{\frac{2m+7}{2m}} - z^{\frac{2m+9}{2m}} \end{array}\right\} \cdot 2m}{(1+p)^6}$$

$$+ \frac{\left\{\begin{array}{l} p^6 z^{\frac{2m-1}{2m}} - 6p^5 z^{\frac{2m+1}{2m}} + 15p^4 z^{\frac{2m+3}{2m}} - 20p^3 z^{\frac{2m+5}{2m}} \\ + 15p^2 z^{\frac{2m+7}{2m}} - 6pz^{\frac{2m+9}{2m}} + z^{\frac{2m+11}{2m}} \end{array}\right\} \cdot 2m}{(1+p)^7} + \ldots$$

Man erhält, nach Annullirung des zweiten Gliedes,

$$p = \frac{(2m-1)z^{\frac{1}{m}}}{2m+1}.$$

Diesen Werth in den vorigen Ausdruck (14) gesetzt und zugleich durch $2m$ dividirt, ergiebt sich

Digitized by Google

$$15)\ \frac{1}{2m}\cdot\int z^{-\frac{1}{2m}}\cdot(1+z^{\frac{1}{m}})^{-1}\cdot dz$$

$$=\frac{(2m+1)z^{\frac{2m-1}{2m}}}{(2m-1)\,[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}]}+\frac{4\,(2m+1)z^{\frac{2m+3}{2m}}}{(2m+3)\,[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}]^3}$$

$$+\frac{16(2m-3)\,(2m+1)z^{\frac{2m+6}{2m}}}{(2m+3)\,(2m+5)\,[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}]^4}+\ldots.$$

Stellt man die Werthe von $x$ wieder her, und dividirt überall, wie zuletzt geschehen, durch $2m$, so bekommt man:

$$16)\ \text{Arc.}\,[\text{tang}=x]=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$$

$$+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{13}x^{13}-\ldots.$$

$$\pm(2m+1)\,x^{2m}\times\left[\frac{x-1}{(2m-1)\,.\,[2m+1+(2m-1)\,x^2]}\right.$$

$$\left.+\frac{4x^3}{(2m+3)[2m+1+(2m-1)x^2]^2}+\frac{16\,(2m-3)\,x^5}{(2m+3)(2m+5)[2m+1+(2m-1)x^2]^3}\right]$$

Erstere Reihe, welche die nämliche ist wie die sogenannte Leibnitzische, will ich die Grundreihe, und letztere, aus dem involutorischen Integraltheile entstanden, die Ergänzungsreihe nennen. Diese Reihe, in welcher die Constante $=0$ ist, convergirt für $x<1$ bis $x=1$.

16°. Es kommt nun darauf an, zu bestimmen, wie viel man Glieder aus der Grundreihe sowohl als aus der Ergänzungsreihe mit einander verbinden müsse, um für einen gewissen Werth von $m$ das entsprechende Resultat zu erhalten. Die Ergänzungsreihe gestaltet sich so, dass sie in ihrer Convergenz um so weiter geht, je grösser $m$ wird und für ein bestimmtes $m$ irgendwo aufhört, schnell zusammenzulaufen.

Für $m=1$ convergirt sie bis zum 2ten Gliede, für $m=2$ bis zum 3ten, für $m=3$ bis zum 4ten u. s. f., wie man aus folgenden Beispielen ersieht, wenn nämlich $x=1$ genommen wird.

Es sei nun $m=1$, so ist nach 10, 11, 12 u. f. aus der Grundreihe noch kein Glied zu nehmen. Bezeichne ich die auf einanderfolgenden Näherungswerthe mit $B$, $B'$, $B''\ldots$, so ist

$$17)\ B=3\,[0{,}25000+0{,}01250-0{,}00178]=0{,}78\,|\,216.$$

Für $m=2$ hat man aus der Grundreihe ein Glied zu nehmen, folglich

$$18)\ B'=1-5\,.\,[0{,}041666+0{,}001116+0{,}000062]$$
$$=1-5\times0{,}042844=0{,}785\,|\,780\,..$$

Für $m=3$ kommen auf die Grundreihe 2 Glieder, also:

$$19)\ B''=1-\tfrac{1}{3}+7\,(0{,}0166666+0{,}0002829+0{,}00002338+0{,}0000109)$$
$$=0{,}6666666+7\times0{,}016960=0{,}7853\,|\,87\ldots$$

Digitized by Google

Für $m = 4$ ist Obigem zufolge

$$20)\ B''' = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 9 \times (0{,}0089286$$
$$+ 0{,}0000888 + 0{,}0000085 + 0{,}0000030 + 0{,}0000007 + \ldots)$$
$$= 0{,}8666667 - 9 \times 0{,}0090297 = 0{,}78539 \mid 94 \ldots$$

wenn nämlich in einigen Gliedern des letzteren Falles die 8te Stelle weggelassen und die 7te um 1 grösser genommen wird.

Für $m = 5$ ist ferner

$$21)\ B'''' = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + 11\ (0{,}00555556$$
$$+ 0{,}00003847 + 0{,}00000359 + 0{,}00000106 + 0{,}00000023 + 0{,}00000006 + \ldots)$$
$$= 0{,}72380952 + 11 \times 0{,}00559897 = 0{,}7853981 \mid 9 \ldots$$

Hier ist die 8te Stelle um 1 vergrössert und die folgende dafür weggelassen.

Hier sieht man eine hinlängliche Convergenz unserer Reihe, und wie die Näherungswerthe von $B$, $B'$, $B''$... jeder folgende dem wahren Werthe, welcher den halben Quadranten für den Radius $= 1$ ausdrückt, mehr als um eine Stelle näher kömmt, und dass der von $B''''$ mit dem 4ten Theil der Ludolphischen Zahl bis zur 7ten Stelle genau übereinstimmt.

22) Nimmt man aus 17) für $B$ bloss die ersten 2 Glieder, so ist das Resultat 0,7875000, also etwas genauer als obiges $B = 0{,}78216\ldots$

Und entwickelt man für $B'$ (18) in der Ergänzungsreihe 4 Glieder, so ist das 4te $5 \times 0{,}000061 \ldots$, also fast eben nicht kleiner als das 3te $5 \times 0{,}000062 \ldots$

Auf das Letztere (22) ist das (16°) Gesagte bezogen.

(Diese Beiträge werden späterhin fortgesetzt werden.)

Digitized by Google

# XXXIX.

## Entwickelung einiger Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

### §. 1.

Vorerst müssen wir uns die bekannte Formel

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x \ldots \quad (1)$$

ins Gedächtniss zurückrufen. Die Reihe rechts, welche offenbar immer convergirt, gilt dem Ausdrucke links so lange gleich, als $x < \pi$ ist; an dieser Gränze selbst aber tritt eine Unstetigkeit in ihren Werthen ein, und daher kann in diesem Falle obige Gleichung nicht mehr bestehen.

Schreiben wir $\pi - x$ für $x$, so wird das allgemeine Glied $\sin n(\pi - x) = -\cos n\pi \sin nx$ d. i. $= \mp \sin nx$ jenachdem $n$ gerade oder ungerade ist; also aus (1)

$$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots \quad (2).$$

Diese Gleichung besteht umgekehrt zwar für $x = \pi$, aber nicht für $x = 0$.

### §. 2.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen beschäftigen wir uns mit dem Ausdrucke

$$1 + 2\{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots\} = 1 + 2\sum_1^{\infty} \cos nx$$

den wir kurz mit $Fx$ bezeichnen wollen. Von einer Summe dieser Reihe kann offenbar gar nicht die Rede sein, da dieselbe nicht convergirt. Man braucht z. B. nur $x$ gleich einem aliquoten Theile von $\pi$ zu nehmen, um sofort zu einem Resultate der Form

$$a - a + a - a + \ldots$$

zu gelangen.

Nichtsdestoweniger ist aber doch der Ausdruck

$$Fx = 1 + 2\sum_1^{\infty} \cos nx \ldots \quad (3)$$

in so fern von Werth, als derselbe mit $dx$ multiplicirt und integrirt, eine convergente Reihe liefert, nämlich

Digitized by Google

$$\int Fx\ dx = x + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx + \text{Const}$$

Integriren wir, um die Const. wegzuschaffen, zwischen 0 und $c$, so kommt

$$\int_0^c Fx\ dx = c + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nc \ldots (4)$$

Ist nun $c > 0$ und $\leqq \pi$, so findet (2) seine Anwendung und giebt sogleich

$$\int_0^c Fx\ dx = \pi.$$

Ist $c > \pi$ und $< 2\pi$, so kann man $c = \pi + b$ setzen, wo $b < \pi$ ist. Dann wird das allgemeine Glied $\frac{1}{n} \sin n(\pi + b) = \frac{1}{n} \cos n\pi \,.\, \sin nb = \pm \frac{1}{n} \sin nb$ jenachdem $n$ gerade oder ungerade ist; also weil die Reihe mit $n = 1$, ungerade, anfängt

$$\int_0^c Fx\ dx = \pi + b - 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nb,$$

wobei rechts die Formel (1) anwendbar ist und giebt

$$\int_0^c Fx\ dx = \pi.$$

Also haben wir

$$\int_0^c Fx\ dx = \pi,\ 2\pi > c > 0 \ldots (5).$$

## §. 3.

Wir wollen nun die beiden Integrale

$$\int_0^c Fx \cos hx\ dx,\ \int_0^c Fx \sin hx\ dx,$$

worin $h$ eine ganze Zahl ist, betrachten.

Setzen wir für $Fx$ seinen Werth (3) und zerlegen $2 \cos nx \cos hx$ in eine Cosinussumme, so ist

$$\int Fx \cos hx\ dx = \frac{\sin hx}{h} + \sum_{1}^{\infty} \int [\cos(h-n)x + \cos(h+n)x]\ dx$$

$$= \frac{\sin hx}{h} + \sum_{1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(h-n)x}{h-n} + \frac{\sin(h+n)x}{h+n} \right].$$

Bemerkt man, dass das vordere Glied dem Werthe $n = 0$ entspricht, so ist für $h \pm n = m$

$$\int Fx \cos hx\ dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

oder weil für negative $m$ der Ausdruck der nämliche wie für positive ist und wenn wir noch das Glied worin $h - n = m = 0$ ist, ausscheiden

$$\int Fx \cos hx\ dx = \frac{\sin 0x}{0} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

d. i. weil $\frac{\sin mx}{m}$ für $m = 0$ sich in $x$ verwandelt

Digitized by Google

$$\int Fx \cos hx\, dx = x + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

Nehmen wir, um die etwaige Constante der Integration wegzuschaffen, die Gränzen 0 und $c$, so wird

$$\int_0^c Fx \cos hx\, dx = c + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin mc}{m}$$

d. i. wenn $2\pi > c > 0$, wie früher schon

$$\int_0^c Fx \cos hx\, dx = \pi,\ 2\pi > c > 0 \ldots \quad (6).$$

Zerlegen wir ähnlich $2\sin hx \cos nx$ in eine Sinussumme, so ist

$$\int Fx \sin hx\, dx = \frac{-\cos hx}{h} + \sum_{1}^{\infty} \int [\sin (h-n)x + \sin (h+n)x]\, dx$$

$$= \frac{-\cos hx}{h} - \sum_{1}^{\infty} \left[ \frac{\cos (h-n)x}{h-n} + \frac{\cos (h+n)x}{h+n} \right]$$

d. i. für $h \pm n = m$,

$$\int Fx \sin hx\, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{m}.$$

Da nun $\frac{\cos mx}{m}$ für negative $m$, $= \frac{-\cos mx}{m}$ wird, so bleibt bloss das dem Werthe $h - n = m = 0$ entsprechende Glied übrig; also

$$\int Fx \sin hx\, dx = \frac{\cos 0x}{0},$$

und wenn wir die Gränzen 0, $c$ nehmen

$$\int_0^c Fx \sin hx\, dx = \frac{\cos 0c}{0} - \frac{\cos 0}{0}$$

$$= \frac{\cos 0}{0} - \frac{\cos 0}{0}.$$

Obgleich nun $\frac{\cos 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$ ist, so wird doch unser Integral $= 0$, da beide $\infty$ durch die nämliche Operation entstanden sind; mithin

$$\int_0^c Fx \sin hx\, dx = 0 \ldots (7).$$

## §. 4.

Wendet man auf die beiden Formeln (6) und (7) den bekannten Satz von den bestimmten Integralen an, dass für

$$u = \int_a^b f(x, h)\, dx,\ \frac{du}{dh} = \int_a^b \frac{df(x,h)}{dh}\, dx$$

ist, so erhält man durch mehrmaliges Differenziiren nach $h$, leicht aus (6)

$$\int_0^c x \sin hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

Digitized by Google

$$\int_0^c x^3 \sin hx\ Fx\ dx = 0$$

$$\int_0^c x^4 \cos hx\ Fx\ dx = 0$$

etc.

und aus (7)

$$\int_0^c x \cos hx\ Fx\ dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \sin hx\ Fx\ dx = 0$$

$$\int_0^c x^3 \cos hx\ Fx\ dx = 0$$

etc.

Ist also $m$ eine ganze Zahl, so kann man durch Differenzialquotienten der einen oder der anderen Gleichung (6) oder (7) immer zu dem Ausdrucke

$$\int_0^c x^m \cos hx\ Fx\ dx = 0$$

gelangen. Da nun $h$ eine beliebige ganze Zahl sein kann, so nehmen wir $h = 0$, und erhalten

$$\int_0^c x^m\ Fx\ dx = 0\ . \quad (8).$$

## §. 5.

Wir können nun leicht ein sehr allgemeines Theorem beweisen. Bezeichnen wir die successiven Differenzialquotienten von $fx$ nach $x$ mit $f^1x$, $f^2x$, . . . etc.; so ist bekanntlich nach Maclaurin's Satze

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} f^1(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f^2(0) + \ldots$$

also, weil $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)$ . . Constanten sind,

$$\int_0^c Fx\, fx\ dx = f(0) \int_0^c Fx\ dx + \frac{f^1(0)}{1} \int_0^c x\ Fx\ dx + \frac{f^2(0)}{1 \cdot 2} \int_0^c x^2\ Fx\ dx + \ldots$$

d. i. nach (5) und (8)

$$\int_0^c Fx\ fx\ dx = \pi f(0),\ 2\pi > c > 0. \quad (9).$$

Von diesem Theoreme werden wir nun eine sehr fruchtbare Anwendung machen.

In dem Ausdrucke (3) möge $z - \alpha$ für $x$ stehen; multipliciren wir noch mit den Faktoren $fz\ dz$, und integriren zwischen den Gränzen 0, $\pi$, so wird

$$\int_0^\pi F(z-\alpha) fz\ dz = \int_0^\pi fz\ dz + 2 \sum_1^\infty \int_0^\pi fz \cos n(z-\alpha) dz \quad (10)$$

Für $z - \alpha = \Theta$ wird $fz = f(\Theta + \alpha)$ und, wenn $z = \pi$, ist $\Theta = \pi - \alpha$, wenn $z = 0$, ist $\Theta = -\alpha$ geworden; also

Digitized by Google

$$\int_0^{\pi} F(z-\alpha) fz\, dz = \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} F\Theta\, f(\Theta+\alpha) d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi-\alpha} F\Theta\, f(\Theta+\alpha) d\Theta - \int_0^{-\alpha} F\Theta\, f(\Theta+\alpha) d\Theta.$$

Nehmen wir im zweiten Integrale $\Theta$ negativ, so ist, weil $F(-\Theta)=F\Theta$, unser Ausdruck

$$= \int_0^{\pi-\alpha} F\Theta\, f(\alpha+\Theta)\, d\Theta + \int_0^{\alpha} F\Theta\, f(\alpha-\Theta)\, d\Theta.$$

Knüpfen wir nun an $\alpha$ die Bedingung, dass es $>0$ und $<\pi$ sei, so ist auf jedes dieser Integrale die Formel (9) anwendbar, und

$$\int_0^{\pi} F(z-\alpha)\, fz\, dz = \pi\, f(\alpha+0) + \pi\, f(\alpha-0)$$
$$= 2\pi\, f\alpha;$$

also durch Einführung dieses Werthes in (10)

$$f\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} fz\, dz + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} fz \cos n(z-\alpha)\, dz. \quad (11).$$

Nehmen wir in (10) $\alpha$ negativ, so wird links für $z+\alpha=\Theta$,

$$\int_0^{\pi} F(z+\alpha)\, fz\, dz = \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} F\Theta\, f(\Theta-\alpha)\, d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi+\alpha} F\Theta\, f(\Theta-\alpha)\, d\Theta - \int_0^{\alpha} F\Theta\, f(\Theta-\alpha)\, d\Theta$$

und wenn wieder $\alpha>0$ und $<\pi$,

$$\int_0^{\pi} F(z+\alpha)\, fz\, dz = \pi\, f(-\alpha) - \pi\, f(-\alpha) = 0.$$

also

$$0 = \int_0^{\pi} fz\, dz + 2 \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} fz \cos n\,(z+\alpha)\, dz$$

oder auch

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} fz\, dz + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} fz \cos n(z+\alpha)\, dz. \quad (12).$$

Ziehen wir (12) von (11) ab und beachten, dass $\cos n(z-\alpha) - \cos n(z+\alpha) = 2 \sin n\alpha \,.\, \sin nz$, so ist

$$f\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \sin n\alpha \int_0^{\pi} fz \sin nz\, dz \quad (13)$$

und in ähnlicher Weise, wenn wir (12) zu (11) addiren,

$$f\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} fz\, dz + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \cos n\alpha \int_0^{\pi} fz \cos nz\, dz \quad (14).$$

Diess sind die beiden wichtigen Formeln, deren u. A. Poisson in seiner Mechanik §. 325. gedenkt.

Setzt man $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} fz \sin nz\, dz = a_n$, $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} fz \cos nz\, dz = b_n$, und schreibt $x$ für $\alpha$, so hat man

$$fx = \sum_1^{\infty} a_n \sin nx,\ fx = \tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^{\infty} b_n \cos nx$$

Digitized by Google

so dass sich mithin allgemein jede Function in eine Reihe von den Formen

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$

oder $\frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots$

entwickeln lässt, sobald man $a_n$ und $b_n$ jenen bestimmten Integralen gleich nimmt.

---

# XI.

## Ueber die Bedingungen der Ungleichheit, von den Mittelgrössen und von den imaginären Grössen *).

Von

dem Herausgeber.

---

### I.

### Von den Bedingungen der Ungleichheit.

#### §. 1.

**Erklärung.** Die Grösse $a$ ist der Grösse $b$ gleich, es ist $a = b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

verschwindet. Die Grösse $a$ ist grösser als die Grösse $b$, es ist $a > b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

*) Wenn auch die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze fast sämmtlich nicht neu sind, so hielten wir es jedoch für nöthig, was auch dem Zwecke des Archivs ganz gemäss ist, dieselben einmal in einem geordneten Ganzen möglichst vollständig zusammenzustellen. Eine solche Zusammenstellung so bald als möglich dem Archive einzuverleiben, war aber um so nöthiger, weil diese Sätze die vorzüglichste Grundlage vieler Untersuchungen aus den höheren Theilen der Mathematik, vorzüglich über die Convergenz und Divergenz der Reihen, bilden, welche in den folgenden Heften mitgetheilt werden sollen. Ohne eine solche Zusammenstellung, auf welche nun im Folgenden in jedem Falle verwiesen werden kann, würde eine zu häufige und zu unangenehme Unterbrechung der in Rede stehenden, zum Theil sehr schwierigen Untersuchungen nöthig gewesen sein. Dies wird sich schon im nächst folgenden Hefte, so weit sich jetzt schon über dessen Inhalt urtheilen lässt, zeigen.

Digitized by Google

positiv ist und nicht verschwindet. Die Grösse $a$ ist kleiner als die Grösse $b$, es ist $a < b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

negativ ist.

§. 2.

*Lehrsatz.* Wenn

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots.$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots.$$

ist, so verschwindet nach §. 1. keine der Differenzen

$$a - b,\ a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \ldots.$$

und diese Differenzen sind sämmtlich positiv. Also verschwindet offenbar auch die Summe

$$(a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots.$$

dieser Differenzen nicht und ist positiv. Weil nun

$$(a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots.$$
$$= (a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.)$$

ist, so verschwindet auch die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

nicht und ist positiv, woraus sich nach §. 1. unmittelbar ergiebt, dass

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

*Zusatz.* Wenn

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3 < b_3,\ \ldots.$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung offenbar

$$b > a,\ b_1 > a_1,\ b_2 > a_2,\ b_3 > a_3,\ \ldots.$$

ist, so ist nach §. 2.

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots > a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

und folglich

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots,$$

wie bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

§. 4.

*Lehrsatz.* Wenn

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots;$$
$$\alpha = \beta,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3,\ldots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots$$

Beweis. Weil nach §. 2.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

ist, so verschwindet die Differenz

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

nicht und ist positiv. Nach der Voraussetzung und nach §. 1. verschwinden die Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \alpha_1 - \beta_1,\ \alpha_2 - \beta_2,\ \alpha_3 - \beta_3, \ldots.$$

sämmtlich, und es verschwindet folglich auch die Summe

$$(\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) + \ldots.$$

dieser Differenzen, d. i. die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots).$$

Hieraus geht hervor, dass die Summe der Differenzen

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

und

$$(a + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots),$$

d. i. die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$$
$$- (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots)$$

nicht verschwindet und positiv ist. Folglich ist nach §. 1.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

*Zusatz.* Wenn

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3 < b_3,\ \ldots;$$
$$\alpha = \beta,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3,\ldots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$< b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b > a,\ b_1 > a_1,\ b_2 > a_2,\ b_3 > a_3, \ldots.;$$
$$\beta = \alpha,\ \beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_3, \ldots.$$

Digitized by Google

ist, so ist nach §. 4.

$$b+b_1+b_2+b_3+\ldots+\beta+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots$$
$$>a+a_1+a_2+a_3+\ldots+\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots,$$

und folglich

$$a+a_1+a_2+a_3\ldots+\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.$$
$$<b+b_1+b_2+b_3+\ldots+\beta+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots.,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 6.

*Lehrsatz.* Wenn

$$a>b \text{ und } a_1 \overset{=}{<} b_1$$

ist, so ist

$$a-a_1>b-b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a>b \text{ und } b_1 \overset{=}{>} a_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a+b_1>b+a_1.$$

Weil nun

$$-a_1-b_1=-a_1-b_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a+b_1-a_1-b_1>b+a_1-a_1-b_1,$$

d. i.

$$a-a_1>b-b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 7.

*Zusatz.* Wenn

$$a<b \text{ und } a_1 \overset{=}{>} b_1$$

ist, so ist

$$a-a_1<b-b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b>a \text{ und } b_1 \overset{=}{<} a_1$$

ist, so ist nach §. 6.

$$b-b_1>a-a_1,$$

und folglich

$$a-a_1<b-b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

§. 8.

*Lehrsatz.* Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 > b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 < b - b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a = b \text{ und } b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 < b + a_1.$$

Weil nun

$$-a_1 - b_1 = -a_1 - b_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 - a_1 - b_1 < b + a_1 - a_1 - b_1,$$

d. i.

$$a - a_1 < b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

*Zusatz.* Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 < b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 > b - b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b = a \text{ und } b_1 > a_1$$

ist, so ist nach §. 8.

$$b - b_1 < a - a_1,$$

und folglich

$$a - a_1 > b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 10.

*Lehrsatz.* Wenn die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, \ldots a_n > b_n$$

ist, so ist auch

$$aa_1 a_2 \ldots a_n > bb_1 b_2 \ldots b_n.$$

Beweis. Nach der Voraussetzung sind die Differenzen

$$a - b, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \ldots.$$

Digitized by Google

sämmtlich positiv und keine derselben verschwindet. Weil nun die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

nach der Voraussetzung sämmtlich positiv sind, so sind auch die Producte

$$(a-b)\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n = aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - ba_1\,a_2\,a_3\ldots a_n,$$
$$(a_1-b_1)\,ba_2\,a_3\ldots a_n = ba_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,a_2\,a_3\ldots a_n,$$
$$(a_2-b_2)\,bb_1\,a_3\ldots a_n = bb_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,b_2\,a_3\ldots a_n,$$

u. s. w.

$$(a_{n-1}-b_{n-1})\,bb_1\ldots b_{n-2}a_n = bb_1\ldots b_{n-2}a_{n-1}a_n - bb_1\ldots b_{n-2}b_{n-1}a_n,$$
$$(a_n-b_n)\,bb_1\,b_2\ldots b_{n-1} = bb_1\,b_2\ldots b_{n-1}\,a_n - bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

sämmtlich positiv. Weil die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2, \ldots a_n > b_n$$

ist, so verschwindet offenbar keine der Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_n$, und auch die Differenz $a-b$ verschwindet nicht. Also verschwindet auch das erste der obigen Producte, nämlich das Product

$$(a-b)\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n$$

nicht. Weil nun die obigen Producte sämmtlich positiv sind und das erste nicht verschwindet, so ist auch die Summe aller dieser Producte, d. i. nach dem Obigen die Differenz

$$aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

positiv und verschwindet nicht, woraus sich nach §. 1. unmittelbar ergiebt, dass

$$aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n > bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

## §. 11.

*Zusatz.* Wenn die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2, \ldots a_n < b_n$$

ist, so ist

$$aa_1\,a_2\ldots a_n < bb_1\,b_2\ldots b_n.$$

Dies ist eine unmittelbare Folge aus dem vorigen Lehrsatze.

## §. 12.

*Lehrsatz.* Wenn $a > b$ ist und die Grösse $n$ nicht verschwindet, so ist $na > nb$ oder $na < nb$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung $a > b$ ist, so ist nach §. 1. die Differenz $a-b$ positiv und verschwindet nicht. Ist

nun das nicht verschwindende $n$ positiv, so ist offenbar auch das Product

$$n\,(a-b)=na-nb$$

positiv und verschwindet nicht; also ist nach §. 1. $na>nb$. Ist aber $n$ negativ, so ist das Product

$$n\,(a-b)=na-nb$$

offenbar negativ, und nach §. 1. ist folglich $na<nb$.

Anmerkung. Für $n=0$ wäre natürlich $na=nb=0$.

§. 13.

*Zusatz.* Wenn $a<b$ ist und die Grösse $n$ nicht verschwindet, so ist $na<nb$ oder $na>nb$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b>a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $nb>na$ oder $nb<na$, d. i. $na<nb$ oder $na>nb$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n=o$ wäre natürlich $na=nb=0$.

§. 14.

*Lehrsatz.* Wenn $a>b$ ist und $n$ nicht verschwindet, so ist $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil

$$\frac{a}{n}=a\,.\,\frac{1}{n},\quad \frac{b}{n}=b\,.\,\frac{1}{n}$$

und $\frac{1}{n}$ mit $n$ gleichzeitig positiv und negativ ist, so folgt der Satz unmittelbar aus §. 12.

§. 15.

*Zusatz.* Wenn $a<b$ ist und $n$ nicht verschwindet, so ist $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b>a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $\frac{b}{n}>\frac{a}{n}$ oder $\frac{b}{n}<\frac{a}{n}$, d. i. $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$, jenachdem $n$ positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 16.

*Lehrsatz.* Wenn die Grössen $a$, $b$; $a_1$, $b_1$ sämmtlich positiv sind und

$$a\gtreqless b,\ a_1<b_1$$

ist, in dem Falle $a=b$ aber die Grössen $a$, $b$ nicht verschwinden, auch nicht $a_1=0$ ist, so ist

$$\frac{a}{a_1}>\frac{b}{b_1}.$$

Digitized by Google

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$b_1 > a_1,\ a \gtreqless b$$

ist, so ist nach §. 10. und §. 12.

$$ab_1 > a_1 b,$$

und folglich nach §. 14.

$$\frac{ab_1}{a_1 b_1} > \frac{a_1 b}{a_1 b_1},\ \text{d. i.}\ \frac{a}{a_1} > \frac{b}{b_1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 17.

*Zusatz.* Wenn die Grössen $a$, $b$; $a_1$, $b_1$ sämmtlich positiv sind und

$$a \gtreqless b,\ a_1 > b_1$$

ist, in dem Falle $a = b$ aber die Grössen $a$, $b$ nicht verschwinden, auch nicht $b_1 = 0$ ist, so ist

$$\frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1}.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b \gtreqless a,\ b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 16.

$$\frac{b}{b_1} > \frac{a}{a_1},\ \text{also}\ \frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 18.

*Lehrsatz.* Wenn die Grössen $a$, $b$ positiv sind und $a > b$ ist, so ist $a^n > b^n$ oder $a^n < b^n$, jenachdem das nicht verschwindende $n$ positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil die Grössen $a$, $b$ positiv sind und $a > b$ ist, so ist

$$\frac{b}{a} < 1.$$

Also ist offenbar

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n < 1 \text{ oder } \left(\frac{b}{a}\right)^n > 1,$$

jenachdem das nicht verschwindende $n$ positiv oder negativ ist. Weil nun

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

ist, so ist

$$\frac{b^n}{a^n} < 1 \text{ oder } \frac{b^n}{a^n} > 1,$$



Digitized by Google

d. i. $a^n > b^n$ oder $a^n < b^n$, jenachdem das nicht verschwindende $n$ positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 0$ ist $a^n = b^n = 1$.

§. 19.

*Zusatz.* Wenn die Grössen $a$, $b$ positiv sind und $a < b$ ist, so ist $a^n < b^n$ oder $a^n > b^n$, jenachdem das nicht verschwindende $n$ positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b > a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $b^n > a^n$ oder $b^n < a^n$, d. i. $a^n < b^n$ oder $a^n > b^n$, jenachdem das nicht verschwindende $n$ positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 0$ ist $a^n = b^n = 1$.

§. 20.

*Lehrsatz.* Wenn $a$ positiv und $m > n$ ist, so ist $a^m > a^n$ oder $a^m < a^n$, jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, die Grössen $m$ und $n$ mögen positiv oder negativ sein.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung die Differenz $m - n$ positiv ist und nicht verschwindet, so ist offenbar

$$a^{m-n} > 1 \text{ oder } a^{m-n} < 1,$$

jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist.

Weil nun

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

ist, so ist auch

$$\frac{a^m}{a^n} > 1 \text{ oder } \frac{a^m}{a^n} < 1,$$

d. i. $a^m > a^n$ oder $a^m < a^n$,

jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $a = 1$ ist $a^m = a^n = 1$.

§. 21.

*Lehrsatz.* Wenn die beiden Grössen $a$ und $b$ nicht einander gleich sind, so ist immer

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen $a$ und $b$ nicht einander gleich sind, so verschwindet die Grösse $(a - b)^2$ nicht und ist, wie jedes Quadrat, positiv. Also verschwindet die Differenz

$$a^2 + b^2 - 2ab$$

nicht und ist positiv. Folglich ist nach §. 1.

$$a^2 + b^2 > 2ab,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn $a = b$ ist, so ist

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = 0,$$

Digitized by Google

und folglich

$$a^2 + b^2 = 2ab.$$

§. 22.

*Lehrsatz.* Wenn, unter der Voraussetzung, dass $n$ grösser als die Einheit ist, die $n$ Grössen $a, b, c, d, e, \ldots$ nicht sämmtlich unter einander gleich sind, und der Kürze wegen

$$S = a + b + c + d + e + \ldots$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & ab + ac + ad + ae + \ldots \\ & + bc + bd + be + \ldots \\ & + cd + ce + \ldots \\ & + de + \ldots\end{aligned}$$

gesetzt wird, so ist immer

$$(n-1)\, S^2 > 2n\Sigma.$$

Beweis. Nach dem in §. 21. bewiesenen Satze ist

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab,\ a^2 + c^2 \geqq 2ac,\ a^2 + d^2 \geqq 2ad,\ a^2 + e^2 \geqq 2ae, \ldots$$

$$b^2 + c^2 \geqq 2bc,\ b^2 + d^2 \geqq 2bd,\ b^2 + e^2 \geqq 2be, \ldots$$

$$c^2 + d^2 \geqq 2cd,\ c^2 + e^2 \geqq 2ce, \ldots$$

$$d^2 + e^2 \geqq 2de, \ldots$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen $a, b, c, d, e, \ldots$ nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so sind im Vorhergehenden nach §. 21. nicht überall die oberen Zeichen zu nehmen, und man erhält also, wenn man auf beiden Seiten der Zeichen addirt, nach §. 4.

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots) > 2\Sigma.$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten die Grösse $2(n-1)\Sigma$ addirt, nach §. 4. auch

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots + 2\Sigma) > 2n\Sigma.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{aligned}S^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots \\ & + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \ldots \\ & + 2bc + 2bd + 2be + \ldots \\ & + 2cd + 2ce + \ldots \\ & + 2de + \ldots\end{aligned}$$

d. i.

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots + 2\Sigma,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$(n-1)\, S^2 > 2n\Sigma,$$

wie bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

Anmerkung. Wenn die Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, .... sämmtlich unter einander gleich sind, so ist

$$a^2+b^2=2ab,\ a^2+c^2=2ac,\ a^2+d^2=2ad,\ a^2+e^2=2ae,\ ....$$
$$b^2+c^2=2bc,\ b^2+d^2=2bd,\ b^2+e^2=2be,\ ....$$
$$c^2+d^2=2cd,\ c^2+e^2=2ce,\ ....$$
$$d^2+e^2=2de,\ ....$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt,

$$(n-1)\ (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+....)=2\Sigma.$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten $2(n-1)\Sigma$ addirt,

$$(n-1)\ (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ ...+2\Sigma)=2n\Sigma.$$

Nun ist aber wie oben

$$S^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+...+2\Sigma,$$

und folglich in diesem Falle

$$(n-1)\ S^2=2n\Sigma.$$

## §. 23.

*Lehrsatz.* Wenn $a$ und $b$ zwei ungleiche positive Grössen sind und $n$ eine die Einheit übersteigende positive ganze Zahl ist, so ist immer

$$na^n+b^n>a^n+na^{n-1}b.$$

Beweis. Weil

$$(na^n+b^n)-(a^n+na^{n-1}b)=na^{n-1}(a-b)-(a^n-b^n),$$

und, wie man leicht durch gewöhnliche Multiplication findet,

$$a^n-b^n=(a-b)\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

ist, so ist

$$(na^n+b^n)-(a^n+na^{n-1}b)$$
$$=(a-b)\ (na^{n-1}-a^{n-1}-a^{n-2}b-...-ab^{n-2}-b^{n-1}).$$

Ist nun $a>b$, so ist offenbar

$$na^{n-1}>a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1},$$

und eben so leicht erhellet, dass, wenn $a<b$ ist, jederzeit

$$na^{n-1}<a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

ist. Also haben die beiden Factoren

des Products

$$(a-b)\ (na^{n-1}-a^{n-1}-a^{n-2}b-...-ab^{n-2}-b^{n-1})$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, und keiner dieser beiden Factoren verschwindet. Daher ist dieses Product, und nach dem Obigen also auch die Differenz

$$(na^n+b^n)-(a^n+na^{n-1}b),$$

jederzeit positiv und verschwindet nicht. Folglich ist nach §. 1.

Digitized by Google

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 1$ ist offenbar

$$na^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = a + b.$$

Für $a = b$ ist immer

$$na^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = (n+1)\,a^n.$$

§. 24.

*Zusatz.* Weil unter denselben Voraussetzungen wie vorher

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b,$$
$$b^n + na^{n-1}b = b^n + na^{n-1}b$$

ist, so ist nach §. 6.

$$na^n + b^n - b^n - na^{n-1}b > a^n + na^{n-1}b - b^n - na^{n-1}b,$$

d. i.

$$na^n - na^{n-1}b > a^n - b^n$$

oder

$$na^n\,(1-\frac{b}{a}) > a^n\,\{1-(\frac{b}{a})^n\}.$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch die positive Grösse $a^n$, so erhält man nach §. 14.

$$n\,(1-\frac{b}{a}) > 1-(\frac{b}{a})^n.$$

§. 25.

*Lehrsatz.* Wenn die Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

jederzeit kleiner als das Product

$$\sqrt{n}\,.\,\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

Beweis. Ohne alle Schwierigkeit erhellet die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)^2 \\
&+ (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 - a_4)^2 + \ldots + (a_1 - a_n)^2 \\
&\quad + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \ldots + (a_2 - a_n)^2 \\
&\quad\quad + (a_3 - a_4)^2 + \ldots + (a_3 - a_n)^2 \\
&\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots \\
&\quad\quad\quad\quad + (a_{n-1} - a_n)^2 \\
&= n\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n)^2.
\end{aligned}$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen

Digitized by Google

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so verschwinden die Differenzen

$$\begin{aligned} a_1 - a_2,\ a_1 - a_3,\ a_1 - a_4, \ldots . a_1 &- a_n; \\ a_2 - a_3,\ a_2 - a_4, \ldots . a_2 &- a_n; \\ a_3 - a_4, \ldots . a_3 &- a_n; \\ \ldots &\ldots \\ a_{n-1} &- a_n \end{aligned}$$

nicht sämmtlich, und es ist also

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n)^2 < n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2);$$

folglich ist offenbar der absolute Werth von

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

kleiner als

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

sämmtlich unter einander gleich sind, so ergiebt sich aus dem Beweise des obigen Satzes leicht, dass der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n$$

der Grösse

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)}$$

gleich ist.

## §. 26.

*Zusatz.* Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth von

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n}{n}$$

kleiner als die Grösse

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

## §. 27.

*Lehrsatz.* Wenn $n > 1$ ist und die Brüche

$$\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \frac{a_3}{a_3}, \frac{a_4}{a_4}, \ldots \frac{a_n}{a_n}$$

Digitized by Google

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist der Werth der Summe

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n$$

immer kleiner als das Product

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.$$
$$\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)}.$$

Beweis. Weil, wie leicht erhellet,

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n)^2$$
$$+(a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)^2 + (a_1\alpha_3 - a_3\alpha_1)^2 + (a_1\alpha_4 - a_4\alpha_1)^2 + \ldots + (a_1\alpha_n - a_n\alpha_1)^2$$
$$+(a_2\alpha_3 - a_3\alpha_2)^2 + (a_2\alpha_4 - a_4\alpha_2)^2 + \ldots + (a_2\alpha_n - a_n\alpha_2)^2$$
$$+(a_3\alpha_4 - a_4\alpha_3)^2 + \ldots + (a_3\alpha_n - a_n\alpha_3)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+(a_{n-1}\alpha_n - a_n\alpha_{n-1})^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)$$

ist, und weil nach der Voraussetzung die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \frac{a_4}{\alpha_4}, \ldots \frac{a_n}{\alpha_n}$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, die Differenzen, deren Quadrate in der obigen Gleichung vorkommen, also nicht sämmtlich verschwinden, so ist

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n)^2$$
$$< (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2),$$

und folglich offenbar der absolute Werth von

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots a_n\alpha_n$$

kleiner als die Grösse

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.$$
$$\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)},$$

wie behauptet wurde.

Anmerkung. Wenn die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \frac{a_4}{\alpha_4}, \ldots \frac{a_n}{\alpha_n}$$

sämmtlich unter einander gleich sind, so ist, wie sich aus dem Beweise des obigen Satzes leicht ergiebt, der absolute Werth der Summe

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n$$

jederzeit dem Producte

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.$$
$$\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)}$$

gleich.

## §. 28.

*Zusatz.* Wenn $n > 1$ und die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \frac{a_4}{\alpha_4}, \ldots \frac{a_n}{\alpha_n}$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist der absolute Werth der Grösse

$$\frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n}{n}$$

jederzeit kleiner als das Product

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ldots+a_n^2}{n}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\ldots+\alpha_n^2}{n}}.$$

§. 29.

*Lehrsatz.* Wenn $n > 1$ ist und die positiven Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist jederzeit

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n},$$

oder das sogenannte geometrische Mittel zwischen mehreren positiven nicht sämmtlich unter einander gleichen Grössen ist immer kleiner als das sogenannte arithmetische Mittel zwischen diesen Grössen.

Beweis. 1. Für die zwei Grössen $a_1$, $a_2$ ist, wie leicht erhellet,

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung die Grössen $a_1$, $a_2$ ungleich sind,

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2,$$

also

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}.$$

Für $a_1 = a_2$ ist offenbar

$$\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1+a_2}{2}.$$

2. Sind die vier Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ gegeben, so muss es unter denselben nach der Voraussetzung wenigstens zwei einander nicht gleiche geben. Wenn nun $a_1$, $a_2$ diese beiden einander nicht gleichen Grössen sind, so ist nach 1.

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2, \quad a_3 a_4 \leqq \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2,$$

und folglich

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}\right)^2.$$

Nach 1. ist aber

$$\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2} \leqq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2,$$

Digitized by Google

und folglich

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$a_1a_2a_3a_4 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$$

oder

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ist offenbar

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

3. Sind die acht Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$, $a_8$ gegeben; so wird es nach der Voraussetzung unter denselben immer vier geben, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind. Wenn nun $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ diese vier Grössen sind; so ist nach 2.

$$a_1a_2a_3a_4 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4,\quad a_5a_6a_7a_8 \leqq \left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4,$$

und folglich

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4.$$

Nach 1. ist aber

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4} \leqq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4 \leqq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8$$

oder

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}.$$

Für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8$ ist offenbar

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}.$$

4. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Ueberhaupt ist nach dem Vorhergehenden, wenn wir der Kürze wegen $2^n = \mu$ setzen,

Digitized by Google

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_\mu < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_\mu}{\mu}\right)^\mu$$

oder

$$\sqrt[\mu]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\mu} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_\mu}{\mu}.$$

5. Man nehme nun, welches offenbar immer möglich ist, $m$ so gross, dass $2^m > n$ oder $\mu > n$ ist, und setze

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n} = x.$$

Dann ist nach 4.

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n x^{\mu-n} < \left\{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+(\mu-n)x}{\mu}\right\}^\mu$$

oder

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n x^{\mu-n} < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n-nx+\mu x}{\mu}\right)^\mu,$$

d. i., weil

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n = nx$$

ist,

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n x^{\mu-n} < x^\mu,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $x^{\mu-n}$ dividirt,

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n < x^n,$$

d. i.

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n}\right)^n$$

oder

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $\ldots a_n$ sämmtlich unter einander gleich sind; so ist offenbar

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n}.$$

## §. 30.

*Zusatz.* Wenn $a$ und $b$ zwei ungleiche positive Grössen und $m$ und $n$ zwei positive ganze Zahlen sind; so ist nach §. 29.

$$\sqrt[m+n]{(a^{m+n})^n \cdot (b^{m+n})^m} < \frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n}$$

oder

$$\sqrt[m+n]{(a^nb^m)^{m+n}} < \frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n};$$

Digitized by Google

folglich

$$a^n b^m < \frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n}$$

oder

$$na^{m+n} + mb^{m+n} > (m+n)a^n b^m.$$

§. 31.

*Lehrsatz.* Wenn $a$, $b$ zwei positive Grössen sind und $a > b$ ist; so ist $\log a > \log b$ oder $\log a < \log b$, jenachdem die Basis des Systems, welchem diese Logarithmen angehören, grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Beweis. Bezeichnet $B$ die Basis des logarithmischen Systems, so ist

$$a = B^{\log a},\ b = B^{\log b},$$

und folglich

$$\frac{a}{b} = B^{\log a - \log b}.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\frac{a}{b} > 1$$

ist; so ist offenbar

$$\log a - \log b > 0 \text{ oder } \log a - \log b < 0,$$

d. i. $\log a > \log b$ oder $\log a < \log b$, jenachdem $B > 1$ oder $B < 1$ ist, wie behauptet wurde.

§. 32.

*Lehrsatz.* Wenn $a$ und $b$ zwei positive Grössen sind und $\log a > \log b$ ist; so ist $a > b$ oder $a < b$, jenachdem die Basis des Systems, welchem die in Rede stehenden Logarithmen angehören, grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Beweis. Wir wollen zuerst annehmen, dass die Basis des logarithmischen Systems grösser als die Einheit sei. Wäre unter dieser Voraussetzung $a < b$, so wäre nach dem vorigen Satze $\log a < \log b$; wäre $a = b$, so wäre $\log a = \log b$. Da Beides gegen die Voraussetzung $\log a > \log b$ streitet, so kann weder $a < b$, noch $a = b$ sein, und es ist folglich $a > b$, wie behauptet wurde.

Ferner wollen wir annehmen, dass die Basis des logarithmischen Systems kleiner als die Einheit sei. Wäre unter dieser Voraussetzung $a > b$, so wäre nach dem vorigen Satze $\log a < \log b$; wäre $a = b$, so wäre $\log a = \log b$. Da Beides gegen die Voraussetzung $\log a > \log b$ streitet, so kann weder $a > b$, noch $a = b$ sein, und es ist also $a < b$, wie behauptet wurde.

Hierdurch ist unser Satz nun vollständig bewiesen.

II.

Von den Mittelgrössen.

§. 33.

Erklärung. Jede Grösse, welche nicht kleiner als die klein-

Digitized by Google

ste und nicht grösser als die grösste unter mehreren gegebenen Grössen $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ..... ist, heisst eine Mittelgrösse oder ein Mittel zwischen diesen Grössen, und soll im Folgenden überhaupt durch

$$M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .)$$

bezeichnet werden.

Es erhellet aus dieser Definition, dass es zwischen Grössen, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind, unendlich viele verschiedene Mittelgrössen geben kann. Sind aber die gegebenen Grössen sämmtlich unter einander gleich, so kann man nur jede dieser Grössen selbst eine Mittelgrösse zwischen allen nennen.

§. 34.

*Zusatz.* Jede Grösse, welche eine Mittelgrösse zwischen zwei beliebigen der Grössen $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ... ist, ist eine Mittelgrösse zwischen allen diesen Grössen.

§. 35.

*Lehrsatz.* Wenn $a$ und $b$ zwei beliebige Grössen sind; so ist das Product

$$\{a - M(a, b)\}\ \{M(a, b) - b\},$$

wo $M(a, b)$ eine beliebige Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$ bezeichnet, jederzeit positiv, wenn man nur dieses Product auch dann, wenn es verschwindet, als positiv betrachtet.

Beweis. Wenn $a > b$ ist, so sind nach §. 33. die Differenzen

$$a - M(a, b),\ M(a, b) - b$$

beide positiv, und das Product

$$\{a - M(a, b)\}\ \{M(a, b) - b\}$$

ist folglich positiv.

Wenn $a < b$ ist, so ist nach dem so eben Bewiesenen das Product

$$\{b - M(a, b)\}\ \{M(a, b) - a\}$$

positiv. Folglich ist auch das Product

$$\{a - M(a, b)\}\ \{M(a, b) - b\}$$

positiv.

Wenn $a = b$ ist, so verschwinden die Differenzen

$$a - M(a, b),\ M(a, b) - b$$

beide, und das Product

$$\{a - M(a, b)\}\ \{M(a, b) - b\}$$

ist folglich, weil es verschwindet, wieder positiv.

§. 36.

*Lehrsatz.* Wenn das Product

$$(a - A)\ (A - b)$$

Digitized by Google

positiv ist, so ist $A$ jederzeit eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$, oder es ist

$$A = M(a, b).$$

Beweis. Wenn das Product

$$(a - A)\ (A - b)$$

verschwindet, so ist entweder $A = a$ oder $A = b$, in beiden Fällen also $A$ nach §. 33. eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$. Wenn aber das Product

$$(a - A)\ (A - b)$$

nicht verschwindet; so verschwindet keiner seiner beiden Factoren, und die beiden Factoren haben, weil das in Rede stehende Product nach der Voraussetzung positiv ist, gleiche Vorzeichen. Ist also $a - A > 0$, so ist auch $A - b > 0$, oder es ist $a > A > b$, und folglich $A$ nach §. 33. eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$. Ist dagegen $a - A < 0$, so ist auch $A - b < 0$, oder es ist $a < A < b$, und folglich $A$ nach §. 33. wieder eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$. Im ersten Falle ist offenbar $a > b$, im zweiten ist $a < b$.

## §. 37.

*Lehrsatz.* Wenn

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.)$$

ist, so ist für jedes positive oder negative $\varrho$

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$$

seien respective $\alpha$ und $\gamma$; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Folglich ist nach §. 35. das Product

$$(\alpha - A)\ (A - \gamma)$$

positiv. Weil nun $\varrho^2$ positiv ist, so ist auch das Product

$$\varrho^2(\alpha - A)\ (A - \gamma),$$

d. i. das Product

$$\varrho(\alpha - A)\ .\ \varrho(A - \gamma)$$

oder das Product

$$(\varrho\alpha - \varrho A)\ (\varrho A - \varrho\gamma)$$

positiv, und folglich nach §. 36.

$$\varrho A = M(\varrho\alpha, \varrho\gamma).$$

Weil nun die Grössen $\varrho\alpha$ und $\varrho\gamma$ offenbar unter den Gliedern der Reihe

$$\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

Digitized by Google

$$\varrho A = M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4,\ \ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 38.

*Lehrsatz.* Wenn

$$A = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.)$$

ist; so ist für jedes $\varrho$ mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho,\ \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots..$$

seien respective $\alpha$ und $\gamma$; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha,\ \gamma).$$

Also ist nach §. 35. das Product

$$(\alpha - A)\ (A - \gamma),$$

und folglich offenbar auch das Product

$$\{\alpha \pm \varrho - (A \pm \varrho)\}\ \{A \pm \varrho - (\gamma \pm \varrho)\}$$

positiv. Daher ist nach §. 36.

$$A \pm \varrho = M(\alpha \pm \varrho,\ \gamma \pm \varrho).$$

Weil nun die Grössen $\alpha \pm \varrho$ und $\gamma \pm \varrho$ offenbar beide unter den Gliedern der Reihe

$$a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho,\ a_4 \pm \varrho,\ \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho.\ \ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 39.

*Lehrsatz.* Wenn die Grössen $a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.$ sämmtlich positiv sind und

$$A = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.)$$

ist; so ist für jedes $\varrho$

$$A^\varrho = M(a^\varrho,\ a_1{}^\varrho,\ a_2{}^\varrho,\ a_3{}^\varrho,\ a_4{}^\varrho,\ \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.$$

seien respective $\alpha$ und $\gamma$; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha,\ \gamma).$$

Ist nun $A$ einer der beiden Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich, so verschwindet das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho),$$

Digitized by Google

und ist folglich positiv. Ist aber $A$ keiner der beiden Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich, so ist

$$\alpha < A < \gamma.$$

Ist nun $\varrho$ positiv, so ist, weil die Grössen $\alpha$, $\gamma$ nach der Voraussetzung positiv sind, und auch

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.)$$

offenbar positiv ist, nach §. 19.

$$\alpha^\varrho < A^\varrho < \gamma^\varrho.$$

Folglich sind die Differenzen

$$\alpha^\varrho - A^\varrho,\ A^\varrho - \gamma^\varrho$$

beide negativ, und das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

ist folglich positiv. Ist dagegen $\varrho$ negativ, so ist nach §. 19.

$$\alpha^\varrho > A^\varrho > \gamma^\varrho,$$

und die Differenzen

$$\alpha^\varrho - A^\varrho,\ A^\varrho - \gamma^\varrho$$

sind folglich beide positiv, das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

ist also wieder positiv. Weil nun das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

stets positiv ist, so ist nach §. 36.

$$A^\varrho = M(\alpha^\varrho, \gamma^\varrho).$$

Da aber die Grössen $\alpha^\varrho$ und $\gamma^\varrho$ offenbar unter den Gliedern der Reihe

$$a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$A^\varrho = M(a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \ldots.),$$

wie behauptet wurde.

§. 40.

*Lehrsatz.* Wenn $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ..... beliebige Grössen sind, $\varrho$ aber positiv und

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.)$$

ist; so ist jederzeit

$$\varrho^A = M(\varrho^a, \varrho^{a_1}, \varrho^{a_2}, \varrho^{a_3}, \varrho^{a_4}, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$$

seien respective $\alpha$ und $\gamma$; so ist nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Ist nun $A$ einer der beiden Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich, so verschwindet das Product



Digitized by Google

$$(\varrho^{\alpha} - \varrho^{A})\ (\varrho^{A} - \varrho^{\gamma}),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen $A$ keiner der Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich, so ist

$$\alpha < A < \gamma.$$

Weil nun nach der Voraussetzung $\varrho$ positiv ist; so ist nach §. 20.

$$\varrho^{\alpha} < \varrho^{A} < \varrho^{\gamma}$$

oder

$$\varrho^{\alpha} > \varrho^{A} > \varrho^{\gamma},$$

jenachdem $\varrho > 1$ oder $\varrho < 1$ ist. Für $\varrho = 1$ wäre

$$\varrho^{\alpha} = \varrho^{A} = \varrho^{\gamma}.$$

In allen Fällen haben folglich die Differenzen

$$\varrho^{\alpha} - \varrho^{A},\ \varrho^{A} - \varrho^{\gamma}$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$(\varrho^{\alpha} - \varrho^{A})\ (\varrho^{A} - \varrho^{\gamma})$$

ist also positiv. Daher ist nach §. 36.

$$\varrho^{A} = M(\varrho^{\alpha},\ \varrho^{\gamma}).$$

Weil aber die Grössen $\varrho^{\alpha}$ und $\varrho^{\gamma}$ unter den Gliedern der Reihe

$$\varrho^{a},\ \varrho^{a_1},\ \varrho^{a_2},\ \varrho^{a_3},\ \varrho^{a_4},\ \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$\varrho^{A} = M(\varrho^{a},\ \varrho^{a_1},\ \varrho^{a_2},\ \varrho^{a_3},\ \varrho^{a_4},\ \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

## §. 41.

*Lehrsatz.* Wenn $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, .... positive Grössen sind und

$$A = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.)$$

ist, so ist für jedes logarithmische System

$$\log A = M(\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.$$

seien respective $\alpha$ und $\gamma$; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha,\ \gamma).$$

Ist nun $A$ einer der beiden Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich; so verschwindet das Product

$$(\log \alpha - \log A)\ (\log A - \log \gamma),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen $A$ keiner der beiden Grössen $\alpha$, $\gamma$ gleich, und folglich

$$\alpha < A < \gamma;$$

so haben, wie aus §. 31. sogleich hervorgeht, die Factoren des Products

Digitized by Google

$$(\log \alpha - \log A)\ (\log A - \log \gamma)$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, und dieses Product ist also wieder positiv. Folglich ist nach §. 36.

$$\log A = M(\log \alpha, \log \gamma).$$

Weil aber die Grössen $\log \alpha$ und $\log \gamma$ offenbar unter den Grössen

$$\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3,\ \log a_4,\ \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$\log A = M(\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3,\ \log a_4,\ \ldots.),$$

wie behauptet wurde.

§. 42.

*Lehrsatz.* Wenn $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$ beliebige, dagegen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots.$ sämmtlich Grössen mit einerlei Vorzeichen sind, deren Anzahl in beiden Reihen dieselbe ist; so ist jederzeit

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots.\right).$$

Beweis. Wenn $\alpha$ und $\gamma$ die kleinste und grösste unter den Grössen

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots.$$

sind; so sind die Differenzen

$$\frac{a}{b} - \alpha, \frac{a_1}{b_1} - \alpha, \frac{a_2}{b_2} - \alpha, \frac{a_3}{b_3} - \alpha, \ldots..$$

und auch die Differenzen

$$\gamma - \frac{a}{b}, \gamma - \frac{a_1}{b_1}, \gamma - \frac{a_2}{b_2}, \gamma - \frac{a_3}{b_3}, \ldots..$$

sämmtlich positiv. Da nun nach der Voraussetzung die Grössen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots.$ alle gleiche Vorzeichen haben; so haben auch die Producte

$$b\left(\frac{a}{b} - \alpha\right),\ b_1\left(\frac{a_1}{b_1} - \alpha\right),\ b_2\left(\frac{a_2}{b_2} - \alpha\right),\ b_3\left(\frac{a_3}{b_3} - \alpha\right), \ldots..;$$

$$b\left(\gamma - \frac{a}{b}\right),\ b_1\left(\gamma - \frac{a_1}{b_1}\right),\ b_2\left(\gamma - \frac{a_2}{b_2}\right),\ b_3\left(\gamma - \frac{a_3}{b_3}\right), \ldots..;$$

und folglich auch die diesen Producten gleichen Differenzen

$$a - \alpha b,\ a_1 - \alpha b_1,\ a_2 - \alpha b_2,\ a_3 - \alpha b_3, \ldots..;$$

$$\gamma b - a,\ \gamma b_1 - a_1,\ \gamma b_2 - a_2,\ \gamma b_3 - a_3, \ldots.$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen. Also haben auch die Summen

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. - \alpha(b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.),$$

$$\gamma(b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.) - (a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.),$$

und folglich auch die Quotienten

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.} - \alpha,\quad \gamma - \frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.}$$



Digitized by Google

oder

$$\alpha - \frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.}, \frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.} - \gamma$$

gleiche Vorzeichen. Daher ist das Product

$$(\alpha - \frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.})\,(\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.} - \gamma)$$

positiv, und folglich nach §. 36.

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.} = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach §. 34. auch

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots}{b+b_1+b_2+b_3+\dots} = M(\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 43.

Zusatz. Setzt man im vorigen Satze $b=b_1=b_2=b_3=\dots=1$, und bezeichnet die Anzahl der in jeder der beiden Reihen $a, a_1, a_2, a_3, \dots.$ und $b, b_1, b_2, b_3, \dots.$ enthaltenen Glieder durch $n$; so ergiebt sich aus dem vorigen Satze die Gleichung

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{n} = M(a, a_1, a_2, a_3, \dots.),$$

wo $a, a_1, a_2, a_3, \dots.$ ganz beliebige Grössen bezeichnen.

Hieraus sieht man, dass das arithmetische Mittel

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{n}$$

zwischen den $n$ beliebigen Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \dots.$ in der That jederzeit eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen ist.

§. 44.

Zusatz. Sind die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots.$$

sämmtlich unter einander gleich, so fällt jede Mittelgrösse zwischen ihnen mit ihnen selbst zusammen, und es ist folglich nach §. 42. unter dieser Voraussetzung

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\dots.}{b+b_1+b_2+b_3+\dots.} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots.$$

§. 45.

Zusatz. Sind $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots.$ beliebige Grössen mit einerlei Vorzeichen; so haben, da auch die Grössen $b, b_1, b_2, b_3, \dots.$ gleiche Vorzeichen haben, auch die Produkte

$$b\varrho, b_1\varrho_1, b_2\varrho_2, b_3\varrho_3, \dots.$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich nach §. 42.

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\dots.}{b\varrho+b_1\varrho_1+b_2\varrho_2+b_3\varrho_3+\dots.} = M(\frac{a\varrho}{b\varrho}, \frac{a_1\varrho_1}{b_1\varrho_1}, \frac{a_2\varrho_2}{b_2\varrho_2}, \frac{a_3\varrho_3}{b_3\varrho_3}, \dots.),$$

Digitized by Google

d. i.

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots.}{b\varrho + b_1\varrho_1 + b_2\varrho_2 + b_3\varrho_3 + \ldots.} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots.\right).$$

Für $b = b_1 = b_2 = b_3 = \ldots. = 1$ ist also

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots.}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots.} = M(a, a_1, a_2, a_3, \ldots.)$$

oder

$$a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots.$$
$$= (\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots.)\ M(a, a_1, a_2, a_3, \ldots.).$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Wenn $a, a_1, a_2, a_3, \ldots.$ beliebige, dagegen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots.$ Grössen mit einerlei Vorzeichen sind; so wird das Aggregat

$$a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots.$$

erhalten, wenn man das Aggregat

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots.$$

mit einer gewissen Mittelgrösse zwischen den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots.$ multiplicirt.

## §. 46.

*Lehrsatz.* Seien $a, a_1, a_2, a_3, \ldots.$ und $b, b_1, b_2, b_3, \ldots.$ zwei Reihen positiver Grössen, und in jeder dieser beiden Reihen sei die Anzahl der Glieder dieselbe; so ist

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}} = M\left(a^{\frac{1}{b}}, a_1^{\frac{1}{b_1}}, a_2^{\frac{1}{b_2}}, a_3^{\frac{1}{b_3}}, \ldots.\right).$$

Beweis. Die Logarithmen der Grössen

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}}$$

und

$$a^{\frac{1}{b}}, a_1^{\frac{1}{b_1}}, a_2^{\frac{1}{b_2}}, a_3^{\frac{1}{b_3}}, \ldots.$$

sind respective

$$\frac{\log a + \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots.}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.}$$

und

$$\frac{\log a}{b}, \frac{\log a_1}{b_1}, \frac{\log a_2}{b_2}, \frac{\log a_3}{b_3}, \ldots.,$$

und nach §. 42. ist

$$\frac{\log a + \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots.}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.}$$
$$= M\left(\frac{\log a}{b}, \frac{\log a_1}{b_1}, \frac{\log a_2}{b_2}, \frac{\log a_3}{b_3}, \ldots.\right).$$

Geht man nun von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen über, welches nach §. 40. offenbar verstattet ist; so erhält man

Digitized by Google

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}} = M(a^{\frac{1}{b}}, a_1^{\frac{1}{b}}, a_2^{\frac{1}{b_1}}, a_3^{\frac{1}{b_2}}, \ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 47.

Zusatz. Für $b = b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$ erhält man, wenn die Anzahl dieser Grössen und also auch der Grössen $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... durch $n$ bezeichnet wird,

$$\sqrt[n]{aa_1a_2a_3\ldots.} = M(a, a_1, a_2, a_3, \ldots.).$$

Die Grösse $\sqrt[n]{aa_1a_2a_3\ldots.}$ nennt man bekanntlich das geometrische Mittel zwischen den $n$ positiven Grössen $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ....., und aus dem Vorhergehenden erhellet also, dass das geometrische Mittel zwischen beliebigen positiven Grössen in der That eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen ist.

§. 48.

Zusatz. Wenn die Grössen

$$a^{\frac{1}{b}}, a_1^{\frac{1}{b_1}}, a_2^{\frac{1}{b_2}}, a_3^{\frac{1}{b_3}}, \ldots..$$

sämmtlich unter einander gleich sind; so ist, wie sich aus §. 46. unmittelbar ergiebt,

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}} = a^{\frac{1}{b}} = a_1^{\frac{1}{b_1}} = a_2^{\frac{1}{b_2}} = a_3^{\frac{1}{b_3}} = \ldots.$$

§. 49.

*Lehrsatz.* Wenn die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots..$$

alle einander gleich sind; so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \pm\frac{\sqrt{a^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots.}}{\sqrt{b^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die in Rede stehenden Brüche sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sind.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = \ldots..,$$

und folglich nach §. 44.

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = \ldots. = \frac{a^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots.}{b^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.},$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar durch Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten folgt.

Digitized by Google

## III.

## Von den imaginären Grössen.

### §. 50.

*Erklärung.* Den Modulus der imaginären Grösse $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, wo $\alpha$ und $\beta$ beliebige reelle Grössen sind, nennt man die Grösse

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

die Quadratwurzel stets positiv genommen.

Zwei imaginäre Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

heissen einander gleich, wenn sowohl die beiden reellen Theile $\alpha$, $\gamma$, als auch die beiden ebenfalls reellen Factoren $\beta$, $\delta$ von $\sqrt{-1}$ einander gleich sind, d. h. wenn $\alpha=\gamma$ und $\beta=\delta$ ist.

Zwei imaginäre Grössen von der Form

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

heissen conjugirte imaginäre Grössen.

Sowohl einander gleiche, als auch conjugirte imaginäre Grössen haben offenbar gleiche Moduli.

### §. 51.

1. Die Summe der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\ \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},\ \alpha_3+\beta_3\sqrt{-1},\ \ldots\ldots$$

ist

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+(\beta+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots)\sqrt{-1}.$$

2. Die Differenz der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1}.$$

3. Das Product der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

4. Setzt man

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1},$$

so muss

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=(\gamma+\delta\sqrt{-1})\ (p+q\sqrt{-1}),$$

d. i. nach 3.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma p-\delta q+(\delta p+\gamma q)\sqrt{-1},$$

und folglich nach §. 50.

Digitized by Google

$$\alpha = \gamma p - \delta q,\ \beta = \delta p + \gamma q$$

sein. Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen $p$ und $q$, so erhält man

$$p = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2},\ q = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Für $\delta = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}.$$

5. Nach 3. ist

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1}) = \alpha\lambda - \beta\mu + (\alpha\mu + \beta\lambda)\sqrt{-1},$$
$$(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1}) = \gamma\lambda - \delta\mu + (\gamma\mu + \delta\lambda)\sqrt{-1},$$

und folglich

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{\alpha\lambda - \beta\mu + (\alpha\mu + \beta\lambda)\sqrt{-1}}{\gamma\lambda - \delta\mu + (\gamma\mu + \delta\lambda)\sqrt{-1}}$$

Also ist nach 4.

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{(\alpha\lambda - \beta\mu)\,(\gamma\lambda - \delta\mu) + (\alpha\mu + \beta\lambda)\,(\gamma\mu + \delta\lambda)}{(\gamma\lambda - \delta\mu)^2 + (\gamma\mu + \delta\lambda)^2}$$
$$+ \frac{(\alpha\mu + \beta\lambda)\,(\gamma\lambda - \delta\mu) - (\alpha\lambda - \beta\mu)\,(\gamma\mu + \delta\lambda)}{(\gamma\lambda - \delta\mu)^2 + (\gamma\mu + \delta\lambda)^2}\sqrt{-1},$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach 4.

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})},$$

d. h. der Bruch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}}$$

bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Grösse multiplicirt.

Also ist auch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\gamma - \delta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\gamma - \delta\sqrt{-1})},$$
$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\alpha - \beta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\alpha - \beta\sqrt{-1})};$$

Digitized by Google

d. i. nach 3.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\gamma-\delta\sqrt{-1})}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta-(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{-1}}{\gamma^2+\delta^2},$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\gamma+\delta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{-1}}.$$

6. Weil nach 4.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\lambda^2+\mu^2}+\frac{\beta\lambda-\alpha\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{-1},$$

$$\frac{\gamma+\delta\sqrt{-1}}{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\frac{\gamma\lambda+\delta\mu}{\lambda^2+\mu^2}+\frac{\delta\lambda-\gamma\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu+(\beta\lambda-\alpha\mu)\sqrt{-1}}{\gamma\lambda+\delta\mu+(\delta\lambda-\gamma\mu)\sqrt{-1}},$$

und folglich nach 4.

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{(\alpha\lambda+\beta\mu)(\gamma\lambda+\delta\mu)+(\beta\lambda-\alpha\mu)(\delta\lambda-\gamma\mu)}{(\gamma\lambda+\delta\mu)^2+(\delta\lambda-\gamma\mu)^2}$$
$$+\frac{(\beta\lambda-\alpha\mu)(\gamma\lambda+\delta\mu)-(\alpha\lambda+\beta\mu)(\delta\lambda-\gamma\mu)}{(\gamma\lambda+\delta\mu)^2+(\delta\lambda-\gamma\mu)^2}\sqrt{-1},$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach 4.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})},$$

und der Bruch

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$$

wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Grösse dividirt.

## §. 52.

*Lehrsatz.* Jede imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ kann, wenn der Modulus derselben der Kürze wegen durch $\varrho$ bezeichnet wird, auf die Form

$$\varrho\,(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gebracht werden, wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Digitized by Google

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass sich die Grössen $\varrho$ und $\varphi$ so bestimmen lassen, dass der Gleichung

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$

genügt wird, und dass bei dieser Bestimmung $\varrho$ den Werth des Modulus $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ erhält. Der obigen Gleichung wird aber zufolge §. 50. genügt, wenn man die Grössen $\varrho$ und $\varphi$ so bestimmt, dass sie den beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = \alpha,\ \varrho\sin\varphi = \beta$$

zugleich genügen. Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$\varrho^2 = \alpha^2+\beta^2,\ \varrho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

wo die Quadratwurzel positiv genommen werden muss, da $\varrho$ den Werth des Modulus der gegebenen imaginären Grösse haben soll. Dividirt man mit der ersten der beiden obigen Gleichungen in die zweite, so erhält man

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

und folglich, wenn wir durch Arctang $\frac{\beta}{\alpha}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ entsprechenden Bogen bezeichnen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat,

$$\varphi = \text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha} + x\pi,$$

wo $x$ eine ganze Zahl bezeichnet, über die nun die folgende Bestimmung gegeben werden muss.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\cos\varphi = (-1)^x\,.\,\cos\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha},\ \sin\varphi = (-1)^x\,.\,\sin\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Da nun Arctang $\frac{\beta}{\alpha}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ entsprechenden Bogen bezeichnet, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so ist cos Arctang $\frac{\beta}{\alpha}$ immer positiv, sin Arctang $\frac{\beta}{\alpha}$ dagegen ist positiv oder negativ, jenachdem $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}},\ \sin\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, und folglich

$$\cos\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ \sin\text{Arctang}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

Digitized by Google

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass immer

$$\cos \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

und folglich

$$\varrho \cos \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \alpha, \quad \varrho \sin \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \beta$$

ist, wenn man nur immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist. Folglich ist nach dem Obigen

$$\varrho \cos \varphi = \pm (-1)^{\varkappa} . \alpha, \quad \varrho \sin \varphi = \pm (-1)^{\varkappa} . \beta,$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist. Nimmt man nun aber die ganze Zahl $\varkappa$ gerade oder ungerade, jenachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist, so ist jederzeit

$$\varrho \cos \varphi = \alpha, \quad \varrho \sin \varphi = \beta,$$

wie es dem Obigen zufolge erforderlich ist.

Also ist

$$\varphi = \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} + \varkappa\pi,$$

wenn man nur die an sich übrigens ganz willkührliche ganze Zahl $\varkappa$ gerade oder ungerade nimmt, jenachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist, wodurch nun sowohl $\varrho$, als auch $\varphi$, vollkommen bestimmt, und unser Satz mit aller Strenge bewiesen ist.

## §. 53.

*Lehrsatz.* Das Product der imaginären Grössen

$\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1}, \cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1}, \cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \sqrt{-1}, \ldots,$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ganz beliebige Bogen oder Winkel bezeichnen, ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots) \sqrt{-1}.$$

Beweis. Nach §. 51. 3. ist

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})\ (\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1}) \\ = \cos\varphi \cos\varphi_1 - \sin\varphi \sin\varphi_1, \\ \pm (\sin\varphi \cos\varphi_1 + \cos\varphi \sin\varphi_1) \sqrt{-1},\end{aligned}$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})\ (\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1}) \\ = \cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1) \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})\ (\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1})\ (\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \sqrt{-1}) \\ = \{\cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1) \sqrt{-1}\}\ (\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \sqrt{-1}) \\ = \cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \sqrt{-1},\end{aligned}$$

Digitized by Google

und folglich

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1})(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1})$$
$$(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1})$$
$$= \{\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) \pm \sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)\sqrt{-1}\}(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1})$$
$$= \cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) \pm \sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\sqrt{-1}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und die allgemeine Gültigkeit unsers Satzes liegt mit völliger Deutlichkeit vor Augen.

## §. 54.

*Lehrsatz.* Für jedes positive oder negative ganze $n$ ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}.$$

Beweis. Wenn $n$ eine positive ganze Zahl ist, so ergiebt sich aus §. 53. auf der Stelle, wenn man dort $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots$ setzt, und sich die Reihe $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, .... aus $n$ Gliedern bestehend denkt,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}.$$

Wenn ferner $n$ eine negative ganze Zahl ist, so setze man

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \frac{1}{(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n}}.$$

Weil nun $-n$ eine positive ganze Zahl ist, so ist nach dem so eben Bewiesenen

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n} = \cos(-n\varphi) \pm \sin(-n\varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach bekannten goniometrischen Sätzen ist aber

$$\cos(-n\varphi) = \cos n\varphi,\ \sin(-n\varphi) = -\sin n\varphi,$$

und folglich

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n} = \cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1};$$

also

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}}.$$

Weil nun nach §. 51. 5.

$$\frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}} = \frac{\cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}}{\cos n\varphi^2 + \sin n\varphi^2},$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}} = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1},$$

und unser Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

Digitized by Google

§. 55.

*Zusatz.* Wenn $m$ und $n$ positive oder negative ganze Zahlen sind, so ist immer

$$(\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi\sqrt{-1})^n = (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m.$$

Nach §. 54. ist nämlich

$$(\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi\sqrt{-1})^n = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1}$$

und

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1},$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 56.

Die Gleichung

$$1.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}),$$

wo $m$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, $n$ eine beliebige positive ganze Zahl, $\varrho$ eine reelle positive Grösse, $\psi$ ein reeller Bogen sein soll, ist jederzeit erfüllt, wenn die Gleichung

$$2.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \varrho^n(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

erfüllt ist. Weil aber nach §. 54.

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1},$$

$$(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n = \cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1}$$

ist, so ist die Gleichung 2., und folglich auch die Gleichung 1. jederzeit erfüllt, wenn die Gleichung

$$3.\quad \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1} = \varrho^n(\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1})$$

erfüllt ist. Diese Gleichung ist aber erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$4.\quad \cos m\varphi = \varrho^n \cos n\psi,\ \pm\sin m\varphi = \varrho^n \sin n\psi,$$

oder die beiden Gleichungen

$$5.\quad \cos(\pm m\varphi) = \varrho^n \cos n\psi,\ \sin(\pm m\varphi) = \varrho^n \sin n\psi$$

erfüllt sind. Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt die erhaltenen Gleichungen dann zu einander, so ergiebt sich

$$\varrho^{2n} = 1,$$

und folglich, weil $\varrho$ reell und positiv sein soll, $\varrho = 1$. Hierdurch ist $\varrho$ bestimmt, und man muss nun also $\psi$ noch so bestimmen, dass den beiden Gleichungen

$$6.\quad \cos(\pm m\varphi) = \cos n\psi,\ \sin(\pm m\varphi) = \sin n\psi$$

genügt wird.

Nach bekannten goniometrischen Sätzen erfordert die erste dieser beiden Gleichungen, dass, indem $x$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$n\psi = 2x\pi \pm m\varphi$$

Digitized by Google

oder

$$n\psi = 2x\pi \mp m\varphi$$

ist. Die zweite der beiden obigen Gleichungen erfordert dagegen, dass entweder

$$n\psi = 2x\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = (2x+1)\pi \mp m\varphi$$

ist. Da nun den beiden in Rede stehenden Gleichungen zugleich genügt werden soll, so muss man

$$n\psi = 2x\pi \pm m\varphi,$$

also

$$\psi = \frac{2x\pi \pm m\varphi}{n}$$

setzen, und es ist also nach dem Obigen für jedes positive oder negative ganze $x$

$$7.\ (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2x\varphi \pm m\varphi}{n} + \sin\frac{2x\pi \pm m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

oder, weil

$$\cos\frac{2x\pi \pm m\varphi}{n} = \cos\frac{\pm(m\varphi \pm 2x\pi)}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2x\pi}{n},$$

$$\sin\frac{2x\pi \pm m\varphi}{n} = \sin\frac{\pm(m\varphi \pm 2x\pi)}{n} = \pm\sin\frac{m\varphi \pm 2x\pi}{n}$$

ist, für jedes positive oder negative ganze $x$

$$8.\ (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi \pm 2x\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi \pm 2x\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wo aber auf der Stelle erhellet, dass man, unbeschadet der nöthigen Allgemeinheit,

$$9.\ (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2x\pi}{n}\sqrt{-1}$$

setzen kann.

Man sieht hieraus, dass die Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

weil $x$ jede beliebige positive oder negative ganze Zahl sein kann, nicht bloss einen, sondern eigentlich unendlich viele Werthe hat, wobei sich aber immer noch fragen lässt, ob diese unendlich vielen Werthe auch sämmtlich unter einander ungleich sind, oder ob nicht vielleicht unter denselben welche vorkommen, die einander gleich sind. Bei der Beantwortung dieser wichtigen Frage unterscheiden wir die folgenden Fälle.

I. $n$ sei eine gerade Zahl, nämlich

$$n = 2\mu.$$

Ueberhaupt sei nun

$$x = \pm(\lambda\mu + \mu'),$$

wo $\lambda$ eine positive ganze Zahl und $\mu' < \mu$ sein soll, so ist

Digitized by Google

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm2(\lambda\mu+\mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm2(\lambda\mu+\mu')\pi}{n};$$

d. i., weil $n=2\mu$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right).$$

Ist nun $\lambda$ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n};$$

folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist aber $\lambda$ eine ungerade, also $\lambda+1$ eine gerade Zahl, so kann man

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\}$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\mp(\lambda+1)\pi\right\}$$

setzen. Dann ist, weil $\lambda+1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1},$$

Digitized by Google

$$\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\mp 2(\mu-\mu')\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\mp 2(\mu-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Aus dieser Darstellung geht deutlich hervor, dass man in der Gleichung

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\pm\sin\frac{m\varphi+2\kappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$\kappa=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\ \pm\mu$$

zu setzen braucht, weil nach dem Vorhergehenden unter den Werthen von

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf diese Art erhält, in der That alle übrigen enthalten sind.

Für

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man auf diese Art die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so erhält man für

$$(\cos\varphi-\sin\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar $n+1$ Werthe enthalten, und es frägt sich nun, ob in jeder der beiden Reihen diese $n+1$ Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber zwei Werthe in einer der beiden Reihen einander gleich sein, so müsste, indem weder $2\lambda'$, noch $2\lambda''$ grösser als $n$ ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n}$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n}$$

sein. Im ersten Falle müsste, wenn $x$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach bekannten goniometrischen Sätzen

$$\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n} + 2x\pi,$$

d. i.

$$\pm\lambda' = \pm\lambda'' + xn,\ \pm(\lambda' - \lambda'') = xn$$

sein, welches, da weder $\lambda'$, noch $\lambda''$ grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, offenbar ungereimt ist. Im zweiten Falle müsste

$$\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n} + 2x\pi,$$

d. i.

$$\pm\lambda' = \mp\lambda'' + xn,\ \pm(\lambda' + \lambda'') = xn$$

sein, welches, weil weder $\lambda'$, noch $\lambda''$ grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, nur dann möglich ist, wenn

$$\lambda' = \lambda'' = \tfrac{1}{2}n,\ 2\lambda' = 2\lambda'' = n$$

ist, und in der That ist auch

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \cos\left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi\right) = -\cos\frac{m\varphi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \sin\left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi\right) = -\sin\frac{m\varphi}{n},$$

so dass sich also sowohl die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n}\sqrt{-1},$$

als auch die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n}\sqrt{-1}$$

auf einen Werth reduciren.

In den beiden obigen Reihen sind also, mit Ausnahme der beiden letzten, alle Werthe unter einander ungleich.

Für

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$



Digitized by Google

erhält man die folgenden $n$, sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} + \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$-\cos\frac{m\varphi}{n} - \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}$$

oder

$$\pm\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Für

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} - \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$-\cos\frac{m\varphi}{n} + \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}$$

Digitized by Google

oder

$$\pm\left(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

II. $n$ sei eine ungerade Zahl, nämlich

$$n=2\mu+1.$$

Ueberhaupt sei

$$2x=\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\},$$

wo $\lambda$ eine postive ganze Zahl und $\mu'<2\mu+1$ ist, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\}\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\}\pi}{n};$$

d. i., weil $n=2\mu+1$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right).$$

Ist nun $\lambda$ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}$$

$$\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wobei man zu bemerken hat, dass in diesem Falle, wegen der Gleichung



Digitized by Google

$$2\varkappa = \pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\},$$

$\mu'$ eine gerade Zahl und nicht grösser als $2\mu$ ist.

Ist $\lambda$ eine ungerade, also $\lambda+1$ eine gerade Zahl, so kann man wieder

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \cos\left\{\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n} \pm (\lambda+1)\pi \mp \pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \sin\left\{\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n} \pm (\lambda+1)\pi \mp \pi\right\}$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \cos\left\{\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n} \pm (\lambda+1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \sin\left\{\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n} \pm (\lambda+1)\pi\right\};$$

d. i., weil $\lambda+1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n}$$

setzen, so dass also in diesem Falle

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi\mp(n-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist. Wegen der Gleichung

$$2\varkappa = \pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\}$$

ist in diesem Falle $\mu'$ ungerade, und folglich, weil $n$ ungerade ist, $n-\mu'$ gerade; auch erhellet auf der Stelle, dass $n-\mu'$ nicht grösser als $2\mu$ sein kann.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass man im vorliegenden Falle in der Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm\mu$$

zu setzen braucht, weil auf die dadurch sich ergebenden Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen zurückkommen.

Digitized by Google

Für

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man auf diese Weise die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} + \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so ergeben sich für

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} - \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar $n$ Werthe enthalten, und es frägt sich nun, ob in jeder derselben alle darin enthaltenen $n$ Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber in einer der beiden Reihen zwei Werthe einander gleich sein, so müsste, indem weder $2\lambda'$, noch $2\lambda''$ grösser als $n-1$ ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n}$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n}$$

sein. Im ersten Falle erhält man wie in I.

$$\pm(\lambda' - \lambda'') = \varkappa n,$$

im zweiten dagegen

$$\pm(\lambda' + \lambda'') = \varkappa n.$$

Beides ist unmöglich, weil weder $\lambda'$, noch $\lambda''$ grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Daher sind die in jeder der beiden obigen Reihen enthaltenen Werthe sämmtlich unter einander ungleich. Die erste Reihe liefert $n$ sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}};$$

die zweite Reihe liefert $n$ sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

III. Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, dass man, um die sämmtlichen $n$ unter einander ungleichen Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

zu erhalten, in der Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

die Grösse $\varkappa$ nicht grösser als $+\frac{1}{2}n$ und nicht kleiner als $-\frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht, so dass man also für $\varkappa$ immer bloss alle die von $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ sich findenden ganzen Zahlen zu setzen braucht, wobei man jedoch zu bemerken hat, dass, wenn $n$ eine gerade Zahl ist, der erste und letzte der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

einander gleich sind, in dem in Rede stehenden Falle folglich immer der eine der beiden in Rede stehenden äussersten Werthe, etwa der letzte, d. i. der dem Werthe $+\frac{1}{2}n$ von $\varkappa$ entsprechende Werth, weggelassen werden muss. Befolgt man diese Regeln, so erhält man immer $n$ sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

## §. 57.

I. Soll man die imaginären Grössen

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}, \alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}, \alpha_3 \pm \beta_3\sqrt{-1}, \ldots$$

in einander multipliciren, so bringe man dieselben zuvörderst nach §. 52. auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}),$$
$$\varrho_1(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}),$$
$$\varrho_2(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1}),$$
$$\varrho_3(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

Digitized by Google

Dann ist nach §. 53.

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})\,(\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1})\,(\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1})\,(\alpha_3\pm\beta_3\sqrt{-1})\,\ldots\ldots$$
$$=\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3\ldots\{\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots)\pm\sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots)\sqrt{-1}\}.$$

II. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ durch die imaginäre Grösse $\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}$ dividiren; so bringe man diese beiden Grössen nach §. 52. erst respective auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}) \text{ und } \varrho_1(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}\cdot\frac{\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1}}$$

oder

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})\,(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1})^{-1}.$$

Weil nun aber nach §. 54.

$$(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1})^{-1}=\cos\varphi_1\mp\sin\varphi_1\sqrt{-1}$$

ist; so ist

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})\,(\cos\varphi_1\mp\sin\varphi_1\sqrt{-1})$$

oder

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})\{\cos(-\varphi_1)\pm\sin(-\varphi_1)\sqrt{-1}\},$$

und folglich nach §. 53.

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}\{\cos(\varphi-\varphi_1)\pm\sin(\varphi-\varphi_1)\sqrt{-1}\}.$$

III. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ auf die $n$te Potenz, wo $n$ eine positive oder negative ganze Zahl sein soll, erheben; so bringe man dieselbe nach §. 52. wieder zuerst auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^n,$$

und folglich nach §. 54.

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos n\varphi\pm\sin n\varphi\sqrt{-1}).$$

IV. Auch wenn man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ auf die Potenz mit dem Exponenten $\frac{m}{n}$ erheben soll, bringe man dieselbe nach §. 52. zuerst auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

und unterscheide dann die folgenden Fälle.

Digitized by Google

1. Wenn $n$ eine gerade Zahl ist; so hat nach §. 56.

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich von einander verschiedenen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1});$$

und

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

hat die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

2. Wenn $n$ eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

Digitized by Google

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

und

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

hat die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right).$$

Weil nun aber für jedes $\psi$ und $\psi_1$ bekanntlich

$$(\cos\psi\pm\sin\psi\sqrt{-1})\,(\cos\psi_1\pm\sin\psi_1\sqrt{-1})$$
$$=\cos(\psi+\psi_1)\pm\sin(\psi+\psi_1)\sqrt{-1}$$

ist; so kann man, wenn der Kürze wegen

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}=\Phi,\ \cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}=\Phi_1$$

gesetzt wird, die obigen Werthe von

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

auch auf folgende Art ausdrücken.

1. Wenn $n$ eine gerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

Digitized by Google

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Dagegen hat

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

2. Wenn $n$ eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Dagegen hat

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

## §. 58.

*Lehrsatz.* Der Modulus des Products zweier imaginären Grössen ist das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Beweis. Die beiden gegebenen imaginären Grössen seien

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1};$$

so sind die Moduli respective

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Das Product der beiden in Rede stehenden imaginären Grössen ist nach §. 51. 3.

$$\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)\sqrt{-1},$$

und der Modulus dieses Products ist also

$$\{(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun aber, wie man leicht findet,

$$(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)^2=(\alpha^2+\beta^2)\ (\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)$$

ist; so ist auch

$$\{(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}}=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)^{\frac{1}{2}},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes unmittelbar erhellet.

## §. 59.

*Zusatz.* Der Modulus des Products einer beliebigen Anzahl imaginärer Grössen ist das Product der Moduli aller imaginären Factoren.

Digitized by Google

Durch successive Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes erhellet auf der Stelle die Richtigkeit des vorliegenden Satzes.

§. 60.

*Lehrsatz.* Der Modulus der Summe und der Modulus der Differenz zweier imaginären Grössen sind jederzeit Mittelgrössen zwischen der Summe und dem absoluten Werthe der Differenz der Moduli dieser beiden imaginären Grössen.

Beweis. Bezeichnen wir die beiden gegebenen imaginären Grössen durch

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 51. 1. 2.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\pm(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha\pm\gamma+(\beta\pm\delta)\sqrt{-1},$$

und der Modulus von

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\pm(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$

ist folglich

$$\{(\alpha\pm\gamma)^2+(\beta\pm\delta)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{\alpha^2+\beta^2\pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2)\ (\gamma^2+\delta^2)$$

ist; so ist

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2\lessgtr(\alpha^2+\beta^2)\ (\gamma^2+\delta^2),$$

und der absolute Werth von $\alpha\gamma+\beta\delta$ ist folglich nie grösser als

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Daher ist offenbar die Grösse

$$\alpha\gamma+\beta\delta$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen den beiden Grössen

$$-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder nach der aus §. 33. bekannten Bezeichnung der Mittelgrössen ist

$$\alpha\gamma+\beta\delta=M\{-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Dass aber auch

$$-(\alpha\gamma+\beta\delta)$$

eine Mittelgrösse zwischen den beiden Grössen

$$-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist, ist klar, und man kann also auch die vorstehende Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$\pm(\alpha\gamma+\beta\delta)=M\{-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Hieraus ergiebt sich nach §. 37.

$$\pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)=M\{-2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ 2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\},$$

Digitized by Google

und folglich nach §. 38.

$$\alpha^2+\beta^2 \pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2$$
$$= M\left\{\begin{matrix}\alpha^2+\beta^2-2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}+\gamma^2+\delta^2,\\ \alpha^2+\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}+\gamma^2+\delta^2\end{matrix}\right\},$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2 \pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2$$
$$= M\{[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}]^2,\ [(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}]^2\}.$$

Folglich ist nach §. 39.

$$\{\alpha^2+\beta^2 \pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

eine Mittelgrösse zwischen dem absoluten Werthe der Differenz

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

und der Summe

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$\{(\alpha \pm \gamma)^2+(\beta \pm \delta)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

d. h. der Modulus der Grösse

$$\alpha+\beta\sqrt{-1} \pm (\gamma+\delta\sqrt{-1}),$$

eine Mittelgrösse zwischen dem absoluten Werthe von

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

und der Grösse

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

d. h. zwischen dem absoluten Werthe der Differenz und zwischen der Summe der Moduli der beiden imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},$$

womit unser Satz also jetzt vollständig bewiesen ist.

## §. 61.

*Zusatz.* **Der Modulus der Summe mehrerer imaginären Grössen in beliebiger Anzahl ist nie grösser als die Summe der Moduli aller einzelnen zu einander addirten imaginären Grössen.**

Weil der absolute Werth der Differenz zwischen zwei positiven Grössen nie grösser als die Summe dieser beiden positiven Grössen ist; so ergiebt sich aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze unmittelbar, dass der Modulus der Summe zweier imaginären Grössen nie grösser als die Summe der Moduli dieser beiden imaginären Grössen ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes überzeugt man sich aber auf der Stelle von der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes *).

*) An die in diesem Aufsatze in einem möglichst systematischen Ganzen zusammengestellten und mit strengen Beweisen versehenen Sätzen wird sich im folgenden Hefte unmittelbar eine Darstellung der neuesten höchst wichtigen Untersuchungen Cauchy's über die Entwickelung der Functionen in convergirende Reihen anschliessen. Dies wird die Zusammenstellung dieses meistens schon bekannten Sätze gewiss rechtfertigen.

Digitized by Google

# XLI.

## Noch etwas über Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen (Archiv T. I. Heft I. VII.).

Von dem

Herrn Doctor Hellerung

zu Wismar.

A. Die Summe der ersten $N$ oder $N_1$ ungeraden Zahlen ist $= N^2$ oder $N_1{}^2$, wovon die grösste $= 2N-1$ oder $2N_1-1$.

Setzt man nun $N = \frac{(n+1)n}{2}$ und $N_1 = \frac{n(n-1)}{2}$; so ist auch:

$$N^2 - N_1{}^2 = n^2 \text{ und } N - N_1 = n.$$

Daraus folgt nun:

1) Die Summe der $n$ auf einander folgenden ungeraden Zahlen, deren kleinste $= 2N_1 + 1 = n(n-1)+1$ und deren grösste $= 2N-1 = (n+1)n-1$ ist, ist $= n^3$ *).

2) folgt ebenso leicht:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = N^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

B. Die Summe der ersten $N$ oder $N_1$ Zahlen der Form $4.\nu+1$, ist $= N(2N-1)$ oder $N_1(2N_1-1)$, und die grösste dieser Zahlen ist $= 4N-3$ oder $4N_1-3$.

Setzt man aber $N = n^2$ und $N_1 = (n-1)^2$; so wird:

$$N(2N-1) - N_1(2N_1-1) = (2n-1)^3 \text{ und } N - N_1 = 2n-1;$$

daher ist also:

1) Die Summe der $2n-1$ auf einander folgenden Zahlen der Form $4.\nu+1$, deren kleinste $= 4N_1+1 = 4.(n-1)^2+1$ und deren grösste $= 4N-3 = 4.n^2-3$ ist, ist $= (2n-1)^3$.

2) ist nun auch:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = N(2N-1) = n^2(2n^2-1).$$

Setzt man aber in A. 2. nun $2n$ statt $n$ so ist auch:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = n^2(2n+1)^2;$$

*) Dies ist der von Turner gefundene Satz, den aber schon Kaestner am Ende seiner Anal. endl. Grössen behandelt. H.

Hr. Doctor Hellerung hat mich zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass sich Turners Satz schon in Kaestners Analysis endlicher Grössen findet. Eine neue Behandlung desselben war aber, wie die Leser aus diesem Aufsatze jetzt sehen werden, immer wünschenswerth, interessant und erspriesslich. G.

Digitized by Google

daher subtrahendo:

$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2\,.\,n^2(n+1)^2.$$

Ebendasselbe Resultat erhält man auch aus den Reihen, deren $\nu$te Glieder $=2\,.\,\nu$ und $4\,.\,\nu$ sind.

C. Die Summe der ersten $N$ oder $N_1$ Glieder der Reihe aller geraden Zahlen, ist $=N\,.\,(N+1)$ oder $N_1\,.\,(N_1+1)$, und nimmt man den Werth von $N$ und $N_1$ aus $A$.; so hat man

$$N\,.\,(N+1)-N_1\,.\,(N_1+1)=n^2+n;\text{ und }N-N_1=n.$$

Also ist 1) die Summe der $n$ auf einander folgenden Glieder aller geraden Zahlen, deren kleinste $=2N_1+2=n\,(n-1)+2$ und deren grösste $=2N=(n+1)\,.\,n$ ist, $=n^2+n$; und

2) ist auch

$$\left.\begin{matrix}1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\\+1\ +2\ +3\ +\ldots+n\end{matrix}\right\}=N(N+1)=\frac{(n+1)^2\,.\,n^2}{4}+\frac{(n+1)n}{4};$$

daher etc.

Und die Summe der ersten $N$ oder $N_1$ Zahlen der Form $4\,.\,\nu$ ist $=2N(N+1)$ oder $2N_1\,.\,(N_1+1)$; nimmt man aber die Werthe von $N$ und $N_1$ aus B., so hat man:

$$2N(N+1)-2N_1\,.\,(N_1+1)=(2n-1)^3+3(2n-1);\text{ und }N-N_1=2n-1;$$

d. h. 1) die Summe der $2n-1$ auf einander folgenden Zahlen von der Form $4\,.\,\nu$, deren kleinste $=4N_1+4=4(n-1)^3+4$ und deren grösste $=4N=4\,.\,n^2$ ist, ist $=(2n-1)^3+3\,.\,(2n-1)$.

2) Es ist

$$\left.\begin{matrix}1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3\\+3\,.\,[1\ +3\ +5\ +\ldots+(2n-1)]\end{matrix}\right\}=2N(N+1)=2n^2(n^2+1)$$

daher: $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$, wie oben.

D. Wir wollen hier noch einen kurzen Beweis für die Summen der Quadrate der geraden und der ungeraden Zahlen, zur Ergänzung des in B. Gefundenen, geben.

Da man hat: $1^2=1$

$$2^2=1+3$$
$$3^2=1+3+5$$
$$\vdots$$
$$n^2=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$$

so ist auch:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=1\,.\,n+3\,.\,(n-1)+5\,.\,(n-2)+\ldots+(2n-1)(n-n+1)$$
$$=\left\{\begin{matrix}n\,.\,[(1+3+5+\ldots+(2n-1)]\\-[1\,.\,3+2\,.\,5+3\,.\,7+\ldots+(n-1)\,(2n-1)]\end{matrix}\right.$$

d. i. $Sn^2=n^2-S(2\,.\,n^2-3n+1)$; daher

$$3\,.\,Sn^2=n^2+S(3n-1)=n^2+\frac{n(3n+1)}{2};\text{ woraus sogleich folgt:}$$

Digitized by Google

$Sn^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; und wenn wir $2n$ statt $n$ setzen, so ist auch $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$. Bezeichnen wir nun noch die Summen der Quadrate der ersten $n$ geraden und ungeraden Zahlen mit $\Sigma(2n)^2$ und $\Sigma(2n-1)^2$, so haben wir auch

$\Sigma(2n)^2 + \Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$; und nach oben ist auch:

$\Sigma(2n)^2 - \Sigma(2n-1)^2 = 3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1) = n(2n+1)$

daher $\Sigma(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$

und $\Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$.

Hierbei ist es nur etwas auffallend, dass man die Summen der Kuben der geraden und ungeraden Zahlen, und zwar auf zweifache Weise, leichter findet, als die Summe ihrer Quadrate, und dabei erhält man noch den Beweis der Lehrsätze A. 1. und B. 1. so wie C. 1. und 1. in den Kauf. Sollte es vielleicht auch noch für die Summen der Quadrate einen leichteren Weg geben?

Aber nicht allein findet man die Summen der dritten Potenzen der geraden und der ungeraden Zahlen leichter, sondern es ist nun auch der Fortschritt zu den höheren ungeraden Potenzen dieser Zahlen gegeben. Denn

E. 1) Wenn (wie in A.) $N$ die $n$te und $N_1$ die $(n-1)$te Trigonalzahl ist, so ist allgemein, für alle ganze Werthe von $\nu$

$$N^\nu - N_1{}^\nu = \frac{n^\nu}{2^{\nu-1}} \cdot \left[ \frac{\nu}{1} \cdot n^{\nu-1} + \frac{\nu.(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} \cdot n^{\nu-3} + \ldots + \begin{cases} \ldots + 1 \\ \ldots + \nu . n \end{cases} \right]$$

worin $+1$ bei ungeradem $\nu$, und $+\nu . n$ bei geradem $\nu$ die Reihe schliesst. Und es folgt sehr leicht daraus, wie in A.:

$$Sn^{2\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{\nu} . N^\nu - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2.3} . Sn^{2\nu-3} - \frac{(\nu-1)\ldots(\nu-4)}{2.3.4.5} . Sn^{2\nu-5} - \ldots$$

$$\ldots - \begin{cases} \ldots - \frac{1}{\nu} . Sn^\nu \\ \ldots - Sn^{\nu+1} \end{cases}$$ wenn überhaupt Glieder mit dem — Zeichen statt haben, also wenn $\nu > 2$ ist.

Wir fanden aber: $Sn^1 = N$

$Sn^3 = N^2$; wie dies auch aus der allgemeinen Gleichung folgt.

Daher ist also ferner: $Sn^5 = \frac{1}{3} . N^2 . (4N - 1)$

$Sn^7 = \frac{1}{3} . N^2 . (6N^2 - 4N + 1)$

$Sn^9 = \frac{1}{5} . N^2 . (16N^3 - 20N^2 + 12N - 3)$

etc. etc.

2) Wenn wir (wie in B.) $N = n^2$ und $N_1 = (n-1)^2$ setzen, so ist auch eben so allgemein für ganze $\nu$:

Digitized by Google

$$N^\nu - N_1{}^\nu = \frac{\nu}{2^{2\nu-2}} \cdot [(2n-1)^{2\nu-1} + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{2\,.\,3} \cdot (2n-1)^{2\nu-3}$$

$$+ \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cdot (2n-1)^{2\nu-5} + \ldots \cdot \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-2\nu+2)}{2\,.\,\ldots\ldots\,.\,(2\nu-1)} \cdot (2n-1)]$$

worin alle Coefficienten, wenn sie mit $\nu$ oder (wenn $\nu = 2^x\mu$ ist) mit $\mu$ multiplicirt werden, ganze Zahlen sind, und der reducirte allgemeine Factor ist eigentlich $= \frac{\mu}{2^{2\nu-2-x}}$; (auch ist diese Bemerkung auf die obige Gleichung $Sn^{2\nu-1} = \ldots$. anwendbar.)

Es folgt aber nun wieder sehr leicht:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} = \frac{2^{\nu-2-x}}{\mu} \cdot N^\nu - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{2\,.\,3} \cdot \Sigma(2n-1)^{2\nu-3}$$

$$- \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cdot \Sigma(2n-1)^{2\nu-5} - \ldots . \Sigma(2n-1)^1$$

Wir fanden aber schon, wie es die allgemeine Gleichung auch ergiebt:

$$\Sigma(2n-1)^1 = N$$

$$\Sigma(2n-1)^3 = N(2N-1)$$

daher weiter: $\Sigma(2n-1)^5 = \frac{1}{3} . N . (16N^2 - 20N + 7)$

$$\Sigma(2n-1)^7 = \frac{1}{3} . N . (48N^3 - 112N^2 + 98N - 31)$$

$$\Sigma(2n-1)^9 = \frac{1}{5} . N . (2^8 . N^4 - 2^9 . 15 . N^3 + 2^8 . 49 . N^2$$

$$- 2^3 . 155 . N + 381)$$

etc. etc.

3) Es ist also jedes $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ eine algebraische Function von $n^2$, und jedes $Sn^{2\nu-1}$ ist eine solche Function von der $n$ten Trigonalzahl $= \frac{n(n+1)}{2}$; setzt man hier nun $2n$ statt $n$, und zieht alsdann $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ ab, so ist die Differenz $= \Sigma(2n)^{2\nu-1}$, wodurch nun auch die Summen der ungeraden Potenzen der ganzen Zahlen mit abwechselndem Vorzeichen gegeben sind *).

Uebrigens ist hier nicht der Ort, eine weitere Ausführung dieser Andeutungen zu machen, wenngleich wir uns nicht erinnern, die hier so leicht gefundene einfache Form von $Sn^{2\nu-1}$ und $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ anderswo gesehen zu haben.

*) Die Resultate unserer (sei es ohne Eitelkeit gesagt) einfachen und klaren Darstellung weichen nun aber von den allgemein geltenden für den Fall, dass man $n = \infty$ setzt, ganz ungemein ab. M. s. Klügel's mathem. Wörterb. Art. Potenz §. 49. sqq. Nach Klügel haben alsdann alle diese unendlichen divergirenden Reihen endliche Werthe, wogegen wir lauter $\infty$ finden. Wie ist nun diese Discrepanz zu beseitigen? Wahrhaftig, wir wissen es nicht. Im Gegentheil scheinen uns Abel und der Herr Herausgeber sehr Recht zu haben, wenn sie so stark gegen jene Beweisart eifern, wie dies im Archiv Bd. I. Hft. I. pag. 19—21 des literar. Berichtes zu lesen ist.



Digitized by Google

# XLII.

## Einiges von den Kegelschnitten.

Von

dem Herausgeber.

---

Wenn $p$ den Parameter einer Parabel bezeichnet, $\Theta$ der Winkel ist, welchen der Radius Vector $r$ mit einer von dem Brennpunkte aus gezogenen geraden Linie einschliesst, indem man diese Winkel von der in Rede stehenden geraden Linie an immer nach derselben Seite hin von 0 bis 360° zählt, und $\omega$ den von der von dem Brennpunkte nach dem Scheitel der Parabel gezogenen geraden Linie mit der in Rede stehenden geraden Linie eingeschlossenen und auf dieselbe Weise wie $\Theta$ genommenen Winkel bezeichnet, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$1.\quad r = \frac{p}{2\{1-\cos(\Theta-\omega)\}}$$

oder

$$2.\quad \frac{1}{2}p = r\{1-\cos(\Theta-\omega)\}.$$

Folglich hat man für die drei Vectoren $r$, $r_1$, $r_2$ und die drei entsprechenden Winkel $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$ die drei folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} \frac{1}{2}p = r\{1-\cos(\Theta-\omega)\}, \\ \frac{1}{2}p = r_1\{1-\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ \frac{1}{2}p = r_2\{1-\cos(\Theta_2-\omega)\}; \end{cases}$$

aus denen wir nun die beiden Grössen $p$ und $\omega$ eliminiren wollen. Durch Elimination von $p$ erhält man sogleich

$$4.\quad r\{1-\cos(\Theta-\omega)\} = r_1\{1-\cos(\Theta_1-\omega)\} = r_2\{1-\cos(\Theta_2-\omega)\},$$

und folglich

$$r - r_1 = r\cos(\Theta-\omega) - r_1\cos(\Theta_1-\omega)$$
$$= (r\cos\Theta - r_1\cos\Theta_1)\cos\omega + (r\sin\Theta - r_1\sin\Theta_1)\sin\omega,$$
$$r - r_2 = r\cos(\Theta-\omega) - r_2\cos(\Theta_2-\omega)$$
$$= (r\cos\Theta - r_2\cos\Theta_2)\cos\omega + (r\sin\Theta - r_2\sin\Theta_2)\sin\omega;$$

also, wie man leicht findet,

$$5.\quad \begin{cases} \sin\omega = \frac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{rr_1\sin(\Theta-\Theta_1) + r_1r_2\sin(\Theta_1-\Theta_2) + r_2r\sin(\Theta_2-\Theta)}, \\ \cos\omega = -\frac{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2}{rr_1\sin(\Theta-\Theta_1) + r_1r_2\sin(\Theta_1-\Theta_2) + r_2r\sin(\Theta_2-\Theta)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Weil nun

$$\sin\omega^2 + \cos\omega^2 = 1$$

ist, so erhält man die Gleichung

6. $\{r(r_2 - r_1)\cos\Theta + r_1(r - r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1 - r)\cos\Theta_2\}^2$
$+ \{r(r_2 - r_1)\sin\Theta + r_1(r - r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1 - r)\sin\Theta_2\}^2$
$= \{rr_1\sin(\Theta - \Theta_1) + r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2) + r_2r\sin(\Theta_2 - \Theta)\}^2;$

oder

$$\begin{aligned}
7.\ & r^2(r_2 - r_1)^2 + r_1^2(r - r_2)^2 + r_2^2(r_1 - r)^2 \\
& - 2rr_1(r - r_2)(r_1 - r_2)\cos(\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1r_2(r_1 - r)(r_2 - r)\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2r(r_2 - r_1)(r - r_1)\cos(\Theta_2 - \Theta) \\
= {} & r^2r_1^2\sin(\Theta - \Theta_1)^2 + r_1^2r_2^2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)^2 + r_2^2r^2\sin(\Theta - \Theta)^2 \\
& + 2rr_1r_2\{r\sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta) + r_1\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta^1) \\
& + r_2\sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\},
\end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}
8.\ & 2(r^2r_1^2 + r_1^2r_2^2 + r_2^2r^2) - 2rr_1r_2(r + r_1 + r_2) \\
& - 2rr_1(r - r_2)(r_1 - r_2)\cos(\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1r_2(r_1 - r)(r_2 - r)\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2r(r_2 - r_1)(r - r_1)\cos(\Theta_2 - \Theta) \\
= {} & r^2r_1^2\sin(\Theta - \Theta_1)^2 + r_1^2r_2^2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)^2 + r_2^2r^2\sin(\Theta_2 - \Theta)^2 \\
& + 2rr_1r_2\{r\sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta(+r_1\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta_2) \\
& + r_2\sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\}.
\end{aligned}$$

Bringt man nun Alles, was auf der rechten Seite steht, auf die linke Seite, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen

$$\begin{aligned}
9.\ \ 0 = {} & r^2r_1^2\{1 + \cos(\Theta - \Theta_1)^2\} \\
& + r_1^2r_2^2\{1 + \cos(\Theta_1 - \Theta_2)^2\} \\
& + r_2^2r^2\{1 + \cos(\Theta_2 - \Theta)^2\} \\
& - 2rr_1r_2\left\{\begin{array}{l} r\ [1 + \sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta)] \\ + r_1\ [1 + \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta_1)] \\ + r_2\ [1 + \sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)] \end{array}\right\} \\
& - 2rr_1(r - r_2)(r_1 - r_2)\cos(\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1r_2(r_1 - r)(r_2 - r)\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2r(r_2 - r_1)(r - r_1)\cos(\Theta_2 - \Theta).
\end{aligned}$$

Weil nun aber

$$\begin{aligned}
(r - r_2)(r_1 - r_2) &= rr_1 - r_2(r + r_1 - r_2), \\
(r_1 - r)(r_2 - r) &= r_1r_2 - r(r_1 + r_2 - r), \\
(r_2 - r_1)(r - r_1) &= r_2r - r_1(r_2 + r - r_1)
\end{aligned}$$

ist, so ist, wie leicht erhellen wird,



Digitized by Google

$$10.\quad 0 = r^2 r_1^2 \{1-\cos(\Theta-\Theta_1)^2\} + r_1^2 r_2^2 \{1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)^2\} + r_2^2 r^2 \{1-\cos(\Theta_2-\Theta)^2\} - 2rr_1r_2 \left\{ \begin{array}{l} r\ [1+\sin(\Theta-\Theta_1)\sin(\Theta_2-\Theta)] \\ +r_1\ [1+\sin(\Theta_1-\Theta_2)\sin(\Theta-\Theta_1)] \\ +r_2\ [1+\sin(\Theta_2-\Theta)\sin(\Theta_1-\Theta_2)] \end{array} \right\} + 2rr_1r_2 \left\{ \begin{array}{l} (r+r_1-r_2)\cos(\Theta-\Theta_1) \\ +(r_1+r_2-r)\cos(\Theta_1-\Theta_2) \\ +(r_2+r-r_1)\cos(\Theta_2-\Theta) \end{array} \right\},$$

d. i.

$$11.\quad 0 = 4r^2r_1^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^4 + 4r_1^2r_2^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^4 + 4r_2^2r^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^4 - 2rr_1r_2 \left\{ \begin{array}{l} r[1-\cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\Theta_1-\Theta_2)-\cos(\Theta_2-\Theta) \\ \qquad +\sin(\Theta-\Theta_1)\sin(\Theta_2-\Theta)] \\ +r_1\ [1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)+\cos(\Theta_2-\Theta)-\cos(\Theta-\Theta_1) \\ \qquad +\sin(\Theta_1-\Theta_2)\sin(\Theta-\Theta_1)] \\ +r_2\ [1-\cos(\Theta_2-\Theta)+\cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\Theta_1-\Theta_2) \\ \qquad +\sin(\Theta_2-\Theta)\sin(\Theta_1-\Theta_2)] \end{array} \right\}.$$

Es ist aber, wie man mittelst einiger leichten goniometrischen Verwandlungen findet,

$$1-\cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\Theta_1-\Theta_2)-\cos(\Theta_2-\Theta)+\sin(\Theta-\Theta_1)\sin(\Theta_2-\Theta) = 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$

$$1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)+\cos(\Theta_2-\Theta)-\cos(\Theta-\Theta_1)+\sin(\Theta_1-\Theta_2)\sin(\Theta-\Theta_1) = 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^2,$$

$$1-\cos(\Theta_2-\Theta)+\cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\Theta_1-\Theta_2)+\sin(\Theta_2-\Theta)\sin(\Theta_1-\Theta_2) = 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^2;$$

und folglich

$$12.\quad 0 = r^2r_1^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^4 + r_1^2r_2^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^4 + r_2^2r^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^4 - 2rr_1r_2 \left\{ \begin{array}{l} r\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^2 \\ +r_1\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2 \\ +r_2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)^2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)^2 \end{array} \right\}$$

oder

$$13.\quad 0 = \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^4 + \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^4 + \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^4 - 2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2.$$

Digitized by Google

$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2$$
$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^2.$$

Ueberhaupt ist aber

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$
$$=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2-c^2)$$
$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c),$$

und wenn also

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0$$

ist, so muss nothwendig mindestens eine der Grössen

$$a+b+c,\ a-b-c,\ a-b+c,\ a+b-c$$

verschwinden. Wenden wir dies auf die Gleichung 13. an, so ergiebt sich, dass immer mindestens eine der vier Grössen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}$$

verschwindet.

Wenn keine der Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1),\ \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2),\ \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)$$

verschwindet, so kann immer nur eine der vier obigen Grössen verschwinden. Denn nähme man an, dass zwei derselben verschwänden, so würde sich durch deren Addition oder Subtraction immer leicht ergeben, dass auch eine der Grössen $\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$, $\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)$, $\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)$ verschwinden müsste. Wir wollen jetzt den Scheitel der Parabel durch $S$, ihren Brennpunkt durch $F$, die Endpunkte der drei Vectoren $r$, $r_1$, $r_2$ respective durch $A$, $A_1$, $A_2$ bezeichnen, so dass also $r=FA$, $r_1=FA_1$, $r_2=FA_2$ ist, und wollen annehmen, dass diese drei Vectoren auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, und ihrer Grösse nach aufsteigend von dem kleinsten bis zum grössten in der Ordnung $r$, $r_1$, $r_2$ oder $FA$, $FA_1$, $FA_2$ auf einander folgen. Setzen wir nun, was offenbar verstattet ist, $\Theta=SFA$, $\Theta_1=SFA_1$, $\Theta_2=SFA_2$, wo jeder dieser Winkel kleiner als 180° ist, so ist $\Theta_2-\Theta_1=A_1FA_2$, $\Theta_2-\Theta=AFA_2$, $\Theta_1-\Theta=AFA_1$, und nach dem vorher Bewiesenen muss also jederzeit eine der vier folgenden Gleichungen richtig sein:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

Digitized by Google

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}.$$

Welche dieser vier Gleichungen nun aber richtig ist, kann auf folgende Art entschieden werden.

Weil die Winkel $AFA_2$, $A_1FA_2$, $AFA_1$ sämmtlich kleiner als 180°, also die Winkel $\frac{1}{2}AFA_2$, $\frac{1}{2}A_1FA_2$, $\frac{1}{2}AFA_1$ sämmtlich kleiner als 90°, folglich die Grössen $\sin\frac{1}{2}AFA_2$, $\sin\frac{1}{2}A_1FA_2$, $\sin\frac{1}{2}AFA_1$ sämmtlich positiv sind, so ist die dritte der vier obigen Gleichungen offenbar unstatthaft.

Weil ferner $AFA_2>AFA_1$, also auch $\frac{1}{2}AFA_2>\frac{1}{2}AFA_1$, und jeder dieser beiden Winkel kleiner als 90° ist, so ist auch $\sin\frac{1}{2}AFA_2>\sin\frac{1}{2}AFA_1$, und folglich, weil $FA_1<FA_2$, also auch $\sqrt{FA_1}<\sqrt{FA_2}$ ist, auch

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}>\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die zweite der vier obigen Gleichungen nicht Statt finden kann, wobei man immer zu beachten hat, dass

$$\sin\tfrac{1}{2}AFA_2,\ \sin\tfrac{1}{2}A_1FA_2,\ \sin\tfrac{1}{2}AFA_1,$$

lauter positive Grössen sind.

Daher bleibt jetzt bloss noch zu entscheiden, welche von den beiden Gleichungen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}\mp\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

die richtige ist, worüber man auf folgende Art ins Klare kommen kann.

Man lasse, $FA$ und $FA_1$ als constant betrachtend, $FA_2$ von $FA_1$ an stetig wachsen, so werden sich auch die Grössen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}},\ \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}},\ \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

stetig verändern. Sollte es nun einen endlichen völlig bestimmten Werth des veränderlichen Radius Vector $FA_2$, den wir von jetzt an durch $(FA_2)$ bezeichnen wollen, von solcher Beschaffenheit geben können dass für demselben unendlich nahe kommende Werthe

Digitized by Google

des veränderlichen Radius Vector auf beiden Seiten dieses endlichen völlig bestimmten Werthes ($FA_2$), die wir durch $FA'_2$ und $FA''_2$ bezeichnen wollen, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} \pm \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA'_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}} \mp \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA''_2}}$$

wäre; so wäre

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} - \frac{\sin\frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}} \pm \left(\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA'_2}} + \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA''_2}}\right).$$

Lässt man nun $FA'_2$ und $FA''_2$ sich dem Radius Vector ($FA_2$) nähern, so nähern die Differenzen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} - \frac{\sin\frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}}, \quad \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}}$$

sich offenbar der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich nach dem Obigen offenbar auch die Summe

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA'_2}} + \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA''_2}}$$

der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade. Die Grösse, welcher sich diese Summe als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade nähert, ist aber offenbar

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{(FA_2)}},$$

und es müsste also unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{(FA_2)}} = 0, \text{ d. i. } \frac{1}{\sqrt{(FA_2)}} = 0 \text{ oder } \frac{1}{(FA_2)} = 0$$

sein, welches ungereimt ist, da $(FA_2)$ eine endliche völlig bestimmte Grösse sein soll. Also kann offenbar nie für gewisse Werthe von $FA_2$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} + \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

für andere Werthe von $FA_2$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

sein, sondern es muss immer entweder die erste oder die zweite Gleichung Statt finden. Für $FA_2 = FA_1$ ergiebt sich aber aus der zweiten dieser beiden Gleichungen, da in diesem Falle $A_1FA_2 = 0$ ist, die offenbar ungereimte Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_1}} = -\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_1}}.$$

Daher ist die zweite Gleichung in dem im Rede stehenden Falle unstatthaft, und gilt folglich nach dem Vorhergehenden überhaupt nicht. Also ist unter den gemachten Voraussetzungen immer

Digitized by Google

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} + \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}.$$

Weiterer Untersuchungen über diesen Gegenstand uns für jetzt enthaltend, wollen wir nun sogleich zu den folgenden Betrachtungen über die Ellipse fortschreiten.

Bei der Ellipse hat man, wenn $a$ die halbe grosse Axe, $e$ die Excentricität bezeichnet, $k = \frac{e}{a}$ gesetzt wird, $\Theta$ der von dem Radius Vector $r$ mit einer von dem entsprechenden Brennpunkte aus gezogenen geraden Linie eingeschlossene, von 0 bis 360° gezählte Winkel, und $\omega$ der mit derselben Linie von der von dem in Rede stehenden Brennpunkte nach dem nächsten Scheitel der grossen Axe gezogenen Linie eingeschlossene, auf dieselbe Weise wie $\Theta$ genommene Winkel ist, bekanntlich die Gleichung

$$14. \quad r = \frac{a(1-k^2)}{1+k\cos(\Theta-\omega)},$$

oder

$$15. \quad a(1-k^2) = r\{1+k\cos(\Theta-\omega)\}.$$

Für vier Vectoren $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ und die entsprechenden Winkel $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ hat man daher die vier Gleichungen

$$16. \quad \begin{cases} a(1-k^2) = r\{1+k\cos(\Theta-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_1\{1+k\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_2\{1+k\cos(\Theta_2-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_3\{1+k\cos(\Theta_3-\omega)\}; \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von $a(1-k^2)$ sich

$$\begin{aligned} & r\{1+k\cos(\Theta-\omega)\} \\ = & r_1\{1+k\cos(\Theta_1-\omega)\} \\ = & r_2\{1+k\cos(\Theta_2-\omega)\} \\ = & r_3\{1+k\cos(\Theta_3-\omega)\} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} r-r_1 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega) - r_1\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ r-r_2 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega) - r_2\cos(\Theta_2-\omega)\}, \\ r-r_3 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega) - r_3\cos(\Theta_3-\omega)\}; \end{aligned}$$

also durch Division

$$\begin{aligned} \frac{r-r_1}{r-r_2} &= \frac{r\cos(\Theta-\omega) - r_1\cos(\Theta_1-\omega)}{r\cos(\Theta-\omega) - r_2\cos(\Theta_2-\omega)}, \\ \frac{r-r_1}{r-r_2} &= \frac{r\cos(\Theta-\omega) - r_1\cos(\Theta_1-\omega)}{r\cos(\Theta-\omega) - r_3\cos(\Theta_3-\omega)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{r-r_1}{r-r_2} &= \frac{r\cos\Theta - r_2\cos\Theta_1 + (r\sin\Theta - r_1\sin\Theta_1)\tang\omega}{r\cos\Theta - r_2\cos\Theta_2 + (r\sin\Theta - r_2\sin\Theta_2)\tang\omega}, \\ \frac{r-r_1}{r-r_3} &= \frac{r\cos\Theta - r_1\cos\Theta_1 + (r\sin\Theta - r_1\sin\Theta_1)\tang\omega}{r\cos\Theta - r_3\cos\Theta_3 + (r\sin\Theta - r_3\sin\Theta_3)\tang\omega} \end{aligned}$$

ergiebt. Hieraus folgt aber ferner

Digitized by Google

17. $$\begin{cases} \text{tang } \omega = -\dfrac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2}, \\ \text{tang } \omega = -\dfrac{r(r_3-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_3)\cos\Theta_1 + r_3(r_1-r)\cos\Theta_3}{r(r_3-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_3)\sin\Theta_1 + r_3(r_1-r)\sin\Theta_3}; \end{cases}$$

woraus sich nun die Gleichung

$$\frac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2} = \frac{r(r_3-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_3)\cos\Theta_1 + r_3(r_1-r)\cos\Theta_3}{r(r_3-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_3)\sin\Theta_1 + r_3(r_1-r)\sin\Theta_3}$$

ergiebt, die man leicht auf die Form

18. $$\begin{aligned} 0 = {} & r\,r_1(r_2-r_3)\sin(\Theta-\Theta_1) \\ & + r\,r_2(r_1-r_3)\sin(\Theta-\Theta_2) \\ & + r\,r_3(r_3-r_1)\sin(\Theta-\Theta_3) \\ & + r_1r_2(r_3-r)\sin(\Theta_1-\Theta_2) \\ & + r_1r_3(r-r_3)\sin(\Theta_1-\Theta_3) \\ & + r_2r_3(r_1-r)\sin(\Theta_2-\Theta_3) \end{aligned}$$

bringt. Diese Gleichung lässt sich aber auch unter der Gestalt

19. $$\begin{aligned} 0 = {} & r\,r_1r_2\{\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\Theta_1-\Theta_2)+\sin(\Theta_2-\Theta)\} \\ & - r\,r_1r_3\{\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\Theta_1-\Theta_3)+\sin(\Theta_3-\Theta)\} \\ & + r\,r_2r_3\{\sin(\Theta-\Theta_2)+\sin(\Theta_2-\Theta_3)+\sin(\Theta_3-\Theta)\} \\ & - r_1r_2r_3\{\sin(\Theta_1-\Theta_2)+\sin(\Theta_2-\Theta_3)+\sin(\Theta_3-\Theta_1)\}, \end{aligned}$$

oder unter der Gestalt

20. $$\begin{aligned} 0 = {} & r\,r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta) \\ & - r\,r_1r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta) \\ & + r\,r_2r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta) \\ & - r_1r_2r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta_1), \end{aligned}$$

oder auch unter der Gestalt

21. $$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta_1)}{r} \\ & - \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta)}{r_1} \\ & + \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta)}{r_2} \\ & - \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{r_3} \end{aligned}$$

darstellen. Die Gleichung 18. kann man auch auf die Form

22. $$\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\Theta-\Theta_1) \\ & + \left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\Theta-\Theta_2) \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\theta-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta_1-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

bringen.

Aehnliche Betrachtungen würden sich auch über die Hyperbel anstellen lassen, wobei wir aber hier nicht länger verweilen wollen, da dieselben nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit haben.

# XLIII.

## Uebungsaufgaben für Schüler *).

1. Man soll zeigen, dass die Quadratwurzel aus der Grösse $a+\sqrt{b}$ in der Form $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ausgezogen werden kann, wenn $a^2-b$ ein vollkommenes Quadrat ist, und in der Form $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$, wenn $1-\frac{a^2}{b}$ ein vollkommenes Quadrat ist.

2. Wenn die Grössen $a$, $b$, $c$ nicht alle drei unter einander gleich sind, so ist immer $(a+b+c)^3 > 27abc < 9(a^3+b^3+c^3)$.

3. Man soll den Bruch

$$\frac{8x^3-10x^2+7x-2}{6x^3-11x^2+8x-2}$$

auf seinen einfachsten Ausdruck bringen.

4. Wenn zwei Kreise sich in $A$ und $B$ schneiden, durch den Punkt $A$ die beiden Durchmesser $AD$ und $AD'$, und die beiden Sehnen $AC$ und $AC'$, von denen eine jede denjenigen der beiden Kreise berührt, von dem sie keine Sehne ist, dieser beiden Kreise gezogen sind, ferner die Linie $AEE'$ den Winkel $DAD'$ halbirt und die beiden Kreise in $E$ und $E'$ schneidet; so ist die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sehnen $DE$ und $D'E'$, und die gemeinschaftliche Sehne $AB$ der beiden Kreise ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sehnen $BC$ und $BC'$.

5. Wenn $p$ die Länge des von dem Mittelpunkte eines mit

*) Grösstentheils ausgezogen aus Cambridge Senate-House Problems. 1837. 1840 von dem Herausgeber.

Digitized by Google

dem Radius $r$ beschriebenen Kreises auf eine Seite eines in denselben beschriebenen regulären Fünfecks gefällten Perpendikels, und $\eta$ die halbe Seite eines in denselben Kreis beschriebenen regulären Zehnecks ist, so ist immer $r^2 = 2(p^2 - \eta^2)$.

6. Wenn von einem Punkte $C'$ in der einen $AB$ von drei sich in den Punkten $A$, $B$, $C$ schneidenden Geraden in beliebiger Anzahl gerade Linien gezogen werden, welche die Linien $AC$, $BC$ schneiden, z. B. in den Punkten $B'$, $A'$, so liegen die Durchschnittspunkte eines jeden Paars der von $B$, $A$ nach den Durchschnittspunkten $B'$, $A'$ gezogenen geraden Linien $BB'$, $AA'$ in einer durch den Punkt C gehenden Geraden.

7. Wenn drei sich in $A$, $B$, $C$ schneidende gerade Linien $AB$, $BC$, $CA$ von einer dritten geraden Linie respective in $C'$, $A'$, $B'$ geschnitten werden, so ist immer (bekanntlich) $AB' \cdot BC' \cdot CA' = A'B \cdot B'C \cdot C'A$, und das Product der Flächenräume der drei Dreiecke $A'BC'$, $B'CA'$, $C'AB'$ ist jederzeit

$$\frac{(AB' \cdot BC' \cdot CA' \cdot \sin A \sin B \sin C')^2}{8 \sin A \sin B \sin C}.$$

8. Wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Entfernungen des Durchschnittspunkts der die Winkel eines ebenen Dreiecks $ABC$ halbirenden geraden Linien von den Spitzen $A$, $B$, $C$ des Dreiecks sind, so ist immer

$$\alpha^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

9. Wenn man die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks $ABC$ durch Bogen grösster Kreise halbirt, und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die zwischen deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkte und den Spitzen $A$, $B$, $C$ des Dreiecks liegenden Bogen sind, so ist jederzeit

$$\cos\alpha \sin(b-c) + \cos\beta \sin(c-a) + \cos\gamma \sin(a-b) = 0.$$

10. Wenn drei Durchmesser einer mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kugel sich unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ schneiden und $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ gesetzt wird, so ist der körperliche Inhalt des von den die Kugel in den Endpunkten der drei Durchmesser berührenden Ebenen eingeschlossenen Parallelepipedons

$$\frac{4r^3}{\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma-\alpha) \sin(\sigma-\beta) \sin(\sigma-\gamma)}}.$$

11. Wenn ein mit dem Halbmesser $r$ beschriebener Kreis eine Parabel, deren Parameter $p$ ist, in vier Punkten schneidet, so ist das Product der Entfernungen der vier Durchschnittspunkte von der Axe der Parabel, $= p^2(a^2 - r^2)$, wo $a$ die Entfernung des Scheitels der Parabel von dem Mittelpunkte des Kreises bezeichnet.

12. Wenn $PT$, $QT$ zwei an die Punkte $P$, $Q$ einer Parabel, deren Brennpunkt $F$ ist, gezogene Tangenten sind, so ist immer $FP \cdot FQ = FT^2$, und wenn $FP$, $FQ$ einen gegebenen Winkel $\alpha$ einschliessen, so ist der geometrische Ort des Punktes $T$ eine Hyperbel, welche näher zu bestimmen ist.

13. Wenn $\varrho$, $\varrho_1$ die Krümmungshalbmesser in den Endpunkten zweier conjugirten Diameter einer Ellipse sind, so ist die Summe $\varrho^{\frac{1}{3}} + \varrho_1^{\frac{1}{3}}$ eine constante Grösse.

Digitized by Google

14. Die grösste Projection eines Cubus ist ein reguläres Sechseck, dessen Seite sich zu der Seite einer Seitenfläche des Cubus wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhält.

(Diese Aufgaben, unter denen sich übrigens einiges Bekannte findet, werden fortgesetzt.)

---

# XLIV.

## Miscellen.

In Dinglers polytechnischem Journal. Band LXXIV. Heft 3. S. 194. hat Herr Doctor Mohr in Coblenz folgendes Verfahren, Barometer ohne Auskochen luftleer zu machen, angegeben.

„Das Verfahren setzt nur den Gebrauch einer Luftpumpe voraus. Man wird hieraus schon leicht errathen können, dass durch Wegnahme des atmosphärischen Drucks dieselbe Erscheinung hervorgebracht wird, als wenn man durch Hinzubringung von Wärme den Quecksilberdämpfen eine dem atmosphärischen Drucke gleiche Spannung ertheilt, und in der That beruht hierin das neue Verfahren.

Auf den Teller der Luftpumpe setzt man vermittelst eines gut geschliffenen Trichters den auf Taf. IV. Fig. 3. abgebildeten sehr einfachen Apparat, den man in kurzer Zeit aus Glasröhren und Korkstöpseln zusammensetzen kann. Der Trichter *a* in Taf. IV. Fig. 3. ist mit einer guten Kautschuckröhre an die Bleiröhre *b* befestigt, diese mit einem Korke in die etwa 14 Linien weite und 5 bis 6 Zoll lange Glasröhre, welche von irgend einem Stative getragen wird, und letztere mittelst eines Korks an die kleine Röhre *d*, an welche nun mit Kautschuckröhren die auszukochenden Barometer befestigt werden.

Nehmen wir an, man habe zu einem Gefässbarometer eine ganz gerade Röhre mit Quecksilber zu füllen. Zuerst macht man die Röhre vollkommen trocken, indem man sie erwärmt und mit dem Vacuum in Verbindung setzt; man wiederholt diese Operation einigemal, welches sehr rasch geht. Nun giesst man das Quecksilber, welches ebenfalls in einer Porzellanschale erwärmt wurde, durch einen unten sehr engen Papiertrichter in die Röhre, befestigt diese an den Apparat und pumpt die Luft aus. Die Barometerröhre liegt sehr flach auf dem Tische. Beim Entziehen der Luft schwellen alle im Quecksilber gebliebenen Luftblasen stark an und die meisten gehen von selbst nach Oben, ohne dass man etwas Weiteres zu thun nöthig hätte. Man stellt nun, wenn keine Luftblasen mehr aufsteigen, ein möglichst vollkommenes Vacuum dar, und fängt an die Barometerröhre leise schüttelnd zu bewegen, gerade wie man bei dem Auskochen auf Feuer zu thun pflegt. Die beiden Kautschuckröhren erlauben eine schon heftige Erschütterung, ohne dass der Apparat dadurch aus einander käme. Man bemerkt in der Barometerröhre ein hartes Prellen und Kliken des Quecksilbers ge-

Digitized by Google

gen das Glas, ebenfalls wie beim Auskochen, und grosse Luftblasen erscheinen an allen Stellen, wo die kleinsten Luftbläschen sitzen geblieben sind.

Durch schüttelnde Bewegung wird momentan der schwache Druck des Quecksilbers in der geneigten Röhre aufgehoben, die Luftblasen vergrössern sich, und in diesem Augenblick steigen sie, weil sie ein grösseres Volumen einnehmen, aufwärts. Durch wiederholtes Schütteln bringt man so die kleinsten Luftbläschen zum Aufwärtssteigen. Man kann auch das Aufwärtssteigen der Blasen beschleunigen, wenn man die Röhre über den Rand des Tisches etwas hinabhält, wodurch sie steiler zu liegen kommt. Einzelne sehr kleine Bläschen, welche allein nicht Steigkraft genug besitzen, weiter zu rücken, vereinigt man zu einer grössern Blase, indem man die Röhre aufrichtet. Das Quecksilber ergiesst sich in die weite Röhre *c*, und in der Barometerröhre entsteht ein Vacuum, welches nun alle jene Luftbläschen aufnimmt. Biegt man nun die Röhre wieder vorsichtig hinab, so bringt man durch dieselbe Manipulation auch diese in der Spitze gesammelte Luftblase heraus. Es ist eine bekannte Erfahrung, dass frisch ausgekochte Barometer von Neuem ein Luftbläschen zeigen, wenn man sie durch Aufrichten hat spielen lassen. Alle einzelnen noch so kleinen Luftspuren sammeln sich alsdann im leeren Raume und werden beim Wiederanlaufenlassen sichtbar. Die allerschärfste Probe eines luftleeren Barometers ist immer das sichtbar bleibende Luftbläschen beim Vollaufen der Röhre. Beim Auskochen kann man diese Probe erst nach dem Erkalten machen, bei unserm Apparate in jedem Augenblicke wiederholen. Ein 10 Linien weites Barometer war innerhalb 10 Minuten so vollkommen luftleer, dass es ein kaum sichtbares Luftbläschen zeigte. Besondere Schwierigkeiten machen Röhren, die durch Anschmelzen einer engern Röhre eine Verdünnung des Kalibers haben. Die kleinen Luftbläschen gehen nur durch heftiges Schütteln der sehr steilen Röhre über jene Einschnürung hinweg. Schmutz an der innern Seite der Röhre hält ebenfalls leicht Luftbläschen zurück.

Heberbarometer und gewöhnliche Barometer befestigt man ebenfalls mit einer Kautschuckröhre auf die Taf. IV. Fig. 3. angedeutete Art an den Apparat. Man füllt die Röhre nur bis an ihre Biegung und lässt alles übrige Quecksilber auslaufen; die fernere Behandlung wie oben." Auf diese Art hat Dr. Mohr nach seiner Angabe mehrere Barometer auf ihren Scalen luftleer gemacht, und fügt hinzu, dass dieses Verfahren sogar das sicherste sei, weil die Röhre mehr gegen mechanische Verletzung geschützt ist.

„Es ist übrigens auch gut, die Barometer erst halb mit Quecksilber zu füllen und alsdann luftleer zu machen, weil man bei dem geringeren Drucke des Quecksilbers desto stärker erschüttern kann, um gerade die äusserste Spitze des Barometers, auf die es doch besonders ankommt, luftleer zu machen. Man füllt zuletzt die ganze Röhre voll und wiederholt die Operation mit dem nachgefüllten Theile. Es geschieht auch wohl zuweilen, besonders in nicht sehr glatten Röhren, dass eine Luftblase beim Aufsteigen in mehrere kleinere zerfällt, welche schwierig aufsteigen. Man muss alsdann durch wiederholtes Tummeln und Entleeren dieselben herauszuschaffen suchen."

Jeder, wer die Unannehmlichkeiten des gewöhnlichen für Un-

Digitized by Google

geübte immer schwierigen Auskochens der Barometer aus eigner Erfahrung kennt, wird mit uns die Ueberzeugung theilen, dass die obige Methode des Herrn Dr. Mohr verdient, weiter geprüft zu werden. Bewährt sie sich, so werden Liebhaber im Stande sein, sich mittelst derselben auf wohlfeile Weise gute, zu wissenschaftlichem Gebauche taugliche Barometer zu verschaffen und sich bei einiger Uebung selbst zu verfertigen, in welcher Beziehung wir vorzüglich die Lehrer an Gymnasien und andern Schulen auf dieselbe aufmerksam machen und zu ihrer Prüfung auffordern möchten. Gute Barometer sind jetzt so kostspielige Instrumente, dass eine wohlfeilere Herstellung derselben für die physikalischen Apparate der Schulen jedenfalls sehr zu wünschen ist. Dann werden sich auch die so nützlichen Barometer-Beobachtungen gewiss noch mehr vervielfältigen als es jetzt der Fall ist.

---

Maupertuis lag einmal gähnend in seinem Lehnstuhle ausgestreckt und sagte: „Ich wünschte jetzt ein schönes Problem zu lösen, was nicht schwer wäre.“ Diese Aeusserung mahlt ihn ganz. (Aus Chamforts Werken).

Mehrere Züge, welche Maupertuis's ungemeine Eitelkeit und Sucht Aufsehen zu erregen bekunden, findet man in Bossut's Geschichte der Mathematik. Theil II. S. 337 der deutschen Uebersetzung. Er war bekanntlich einer der Mathematiker, welche im Jahre 1736 auf Veranlassung der französischen Akademie der Wissenschaften nach Lappland geschickt wurden, um dort die Grösse eines Meridiangrades der Erde zu messen. Als die Commission aus Lappland zurückgekehrt war, hatte Maupertuis nichts Angelegentlicheres zu thun, als überall, in der Akademie, im Publikum, in der grossen Welt, worin er viel lebte, das Resultat einer Operation zu verkündigen, von welcher er sich gewissermassen allen Ruhm zueignete, an welcher er indess als Mitarbeiter nur einen sehr geringen Antheil hatte. Er liess sich sogar in lappländischer Kleidung und auf die Erdkugel sich lehnend, gleichsam als wollte er ihr die sphäroidische Gestalt geben, abmahlen, und Voltaire, damals sein Freund, setzte unter den Kupferstich die vier folgenden schlechten Verse:

Ce globe mal connu, qu'il a su mesurer,
Devient un monument où sa gloire se fonde:
Son sort est de fixer la figure du monde,
De lui plaire et de l'éclairer.

---

Von dem am 23. Juli 1836 verstorbenen berühmten Cometenentdecker Jean Felix Adolphe Gambart, Director der Sternwarte zu Marseille, geboren zu Cette im Mai 1800 erzählt Pontécoulant in seinem kürzlich erschienenen Traité élémentaire de Physique céleste ou Précis d'Astronomie théorique et pratique. Paris. 1840. p. XXVIII. folgenden Zug: Je ne puis me défendre de citer ici une anecdote bien propre à faire juger, je crois, de la pénétration de Gambart, et de l'expérience qu'il avait acquise par son étude continuelle du mouvement des astres. Je me trouvais avec lui à l'Observatoire, en 1835, lorsqu'on y re-

Digitized by Google

çut la première nouvelle de l'apparition de la comète de Halley, et les observations envoyées de Rome par M. Dumouchel. A peine Gambart y eut-il jeté à la hâte un coup d'oeil rapide, qu'il me dit: „Pour quel jour avez-vous annoncé le retour de la comète au périhélie? — Pour le 13. Novembre (je n'avais point alors fait à la masse de Jupiter la correction qui m'a conduit à reculer cette époque jusqu'au 15. Novembre). — Et M. Damoiseau? continue Gambart. — Il annonce son passage pour le 4. — C'est vous qui avez raison, s'écrie-t-il, la comète sera au périhélie du 15 au 17. — Elle y passa le 16, comme on sait; ainsi un simple regard jeté sur le mouvement, pendant quelques jours, de cet astre en ascension droite et en déclinaison, avait suffi à l'habile observateur pour deviner toutes les circonstances de sa marche. — Eine Biographie Gambarts findet man in der Bibliothèque universelle de Genève. Nouvelle Série. T. IV. p. 345.

# XLV.

## Correspondenz.

### Auszug aus einem Schreiben des Herrn Majors und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover an den Herausgeber.

Hannover, 18. Mai 1841.

Durch Ihre gütigen Zeilen bin ich veranlasst worden mir das erschienene erste Heft des Archivs kommen zu lassen, dessen Inhalt bereits viel Interesse gewährt. Zu der schönen Abhandlung Nr. XIV. von Ihnen selbst darf ich mir die Bemerkung erlauben, dass eine vollständige Auflösung des Pothenot'schen Problems von mir, als Beispiel der Anwendung der Lehre vom Zuge im 3ten Hefte XV. Bandes des Crelle'schen Journals gegeben worden ist. Der Gang der Auflösung ist folgender:

Damit die Aufgabe eine bestimmte bleibe, darf weder der Umkreis der drei bekannten Punkte $A$, $B$, $C$, noch eine von den drei geraden Linien $AB$, $AC$, $BC$ durch den Messungs-Standpunkt $D$ führen. Von den drei Umkreisen, die demnach durch $D$ und zwei von den drei bekannten Punkten führen, wähle ich nun einen, z. B. den Umkreis $ABD$, und bestimme durch die allgemeine Eigenschaft der Peripherie-Winkel aus den in $D$ gemessenen Winkeln und aus den rechtwinkligen Coordinaten der Punkte $A$, $B$ zuerst die Coordinaten des Punktes $E$, in welchem die gerade Linie $DC$ den Umkreis ausser in $D$ noch trifft, und darauf mit Zuziehung der Coordinaten des Punkts $C$ die des Punkts $D$. Es ergeben sich dabei die letzteren durch Vermittelung der relativen Polar-Coordinaten des Punkts $D$, sowohl von $A$, $B$ als $E$ aus.

Digitized by Google

Zur Vergleichung beider Auflösungen mit einander füge ich folgende Uebersicht meines Rechnungsgangs an. Es mögen die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte durch die nebengesetzten Buchstaben $A(a, b)$, $B(a', b')$, $C(a'', b'')$, $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $D(x, y)$, ferner die durch Messung in $D$ bekannt werdenden Winkel $A\dot{D}B$ durch $\alpha$, $A\dot{D}C$ durch $\beta$, $B\dot{D}C$ durch $\gamma = -\alpha + \beta$ bezeichnet sein, so erhält man vorbereitend die relativen Polar-Coordinaten $(\Theta, r)$ des Punkts $B$ vom Anfangspunkte $A$ aus durch $\operatorname{tang} \Theta = \frac{b'-b}{a'-a}$, $r = \frac{b'-b}{\sin \Theta} = \frac{a'-a}{\cos \Theta}$.

Setzt man nun 1) $\Theta + \gamma = \Theta'$, 2) $r \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = r'$, so sind $(\Theta', r')$ die relativen Polar-Coordinaten des Punkts $E$ vom Anfangspunkte $A$ aus und es ist 3) $\mathfrak{A} = a + r' \cos \Theta'$, 4) $\mathfrak{B} = b + r' \sin \Theta$. Setzt man ferner

$$\begin{cases} 5. \quad \frac{b''-\mathfrak{B}}{a''-\mathfrak{A}} = \operatorname{tang} \psi \quad \text{desgleichen} \\ 6. \quad \psi - \beta = u \\ 7. \quad \psi - \gamma = u' \end{cases} \qquad \begin{cases} 8. \quad r \cdot \frac{\sin (u-\Theta')}{\sin \alpha} = \mathfrak{r} \\ 9. \quad r \cdot \frac{\sin (\psi-\Theta')}{\sin \alpha} = f \\ 10. \quad r \cdot \frac{\sin (u-\Theta)}{\sin \alpha} = f' \end{cases}$$

so sind respective $(\psi, \mathfrak{r})$, $(u, f)$, $(u', f')$ die relativen Polar-Coordinaten des Punkts $D$ von den Anfangspunkten $E$, $A$ und $B$ aus. Man hat dann

$$11. \quad \begin{cases} x = \mathfrak{A} + \mathfrak{r} \cdot \cos \psi \\ y = \mathfrak{B} + \mathfrak{r} \cdot \sin \psi \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x = a + f \cdot \cos u \\ y = b + f \cdot \sin u \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} x = a' + f' \cos u' \\ y = b' + f' \sin u' \end{cases}$$

Für die Vergleichung selbst bemerke ich, dass $\alpha$ und $\beta$ in beiden Auflösungen dasselbe bedeuten, und dass das Resultat Nr. 12. von dem Ihrigen Nr. 14. nur darin sich unterscheidet, dass für die relativen Polar Coordinaten zur gegenseitigen Lagen-Bestimmung der Punkte $D$ und $A$ bei mir der bekannte Punkt $A$ bei Ihnen der unbekannte Punkt $D$ als der relative Anfangspunkt betrachtet wird. Man hat also $f = -\varrho$ und $\operatorname{tang} u = \operatorname{tang} \varphi$.

Nur bemerke ich noch, dass die Lehre vom Zuge voraussetzt, dass der Radius-Vector-Zug eben sowohl negativ als positiv ausfallen kann, und dass die übliche Ausschliessung negativer Werthe zwar in einzelnen Fällen nützlich ist, allein mit der wahrhaft allgemeinen Auffassung im Widerspruche steht. So wird z. B. der Winkel $\varphi$, der bei Ihnen in Nr. 11. durch seine Tangente gegeben wird, stets als ein spitzer Winkel genommen werden dürfen, nämlich als ein positiver oder als ein negativer spitzer Winkel, jenachdem die Zahl, welche Nr. 11. für $\operatorname{tang} \varphi$ giebt, eine positive oder eine negative Zahl ist. Es ergiebt sich dann durch Nr. 13. von selbst, ob $\varrho$ eine positive oder eine negative Zahl ist.

Digitized by Google

# XLI.

## Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten und dritten Grades *).

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

### I. Ueber die geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Flächen des zweiten Grades.

#### §. 1.

Der allgemeinen Gleichung

$$x^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \ldots . 1)$$

der Flächen des zweiten Grades können wir noch folgende zwei Formen geben:

$$x^2 + 2x\{B'x + C'y + A''\} + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B''y + 2C''x + D = 0 \ldots 2)$$

$$y^2 + 2y\left\{\frac{A'}{B}x + \frac{C'}{B}z + \frac{B''}{B}\right\} + \frac{z^2}{B} + \frac{C}{B}x^2 + \frac{2B'}{B}xz + \frac{2A''}{B}z + \frac{2C''}{C}x + D = 0 \ldots 3)$$

In diesen Gleichungen berücksichtigen wir kein besonderes Coordinatensystem. Setzen wir in die zweite derselben statt $x$ und $y$ irgend bestimmte, übrigens aber durchaus willkührliche Werthe $x'$, $y'$, so erhalten wir die mit der Ordinatenachse der $z$ parallelen Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen die Fläche, welche wir durch eine der Gleichungen 1), 2) oder 3) ausgedrückt haben, und die wir künftig, der Kürze wegen, die Fläche $F$ nennen wollen, von der Linie $x = x'$, $y = y'$ geschnitten wird.

*) Auszug aus einem bald erscheinenden Werke über analytische Geometrie des Raums vom Vf. dieses Aufsatzes.



Digitized by Google

Durch die so eben genannte Substitution wird also die Gleichung 2) zu:

$$z^2 + 2z\{B'x' + C'y' + A''\} + B'y^2 + C'x^2 + 2A'x'y' + 2B''y' + 2C''x' + D = 0 \ldots . 4)$$

Bezeichnen wir die Ordinaten der obenbenannten Durchschnittspunkte mit $z'$ und $z_{,}$, so wissen wir aus der Theorie der Gleichungen, dass:

$$z' + z_{,} = -2(B'x' + C'y' + A'') \ldots \ldots 5)$$

Wiederholen wir dieses Verfahren, indem wir in die Gleichung 2) für $y$ die gleiche Ordinate $y'$ wie oben, statt $x$ aber irgend einen anderen bestimmten übrigens aber willkührlichen Werth $x''$ einführen, und mit $z''$ und $z_{,,}$ die Ordinaten der Durchschnittspunkte der Linie $x = x''$, $y = y'$ mit der Fläche $F$ bezeichnen; diese Ordinaten werden zugleich die Wurzeln der durch jene Substitution aus 2) entstandenen Gleichung sein, wie dieses auch bei den Ordinaten $z'$ und $z_{,}$ in Beziehung auf die Gleichung 4) der Fall ist, und wir bekommen wie vorhin die Gleichung:

$$z'' + z_{,,} = -2(B'x'' + C'y' + A'') \ldots \ldots 6)$$

Subtrahiren wir 5) von 6), so ist:

$$z'' - z' + z_{,,} - z_{,} = -2B'(x'' - x'), \text{ also } B' = -\frac{z'' - z' + z_{,,} - z_{,}}{2(x'' - x')} \ldots . 7)$$

Um diesen Ausdruck von $B'$ durch eine geometrische Construction zu bestimmen, schneiden wir Taf. IV. Fig. 1. die Fläche $F$ in den Entfernungen $OK' = x'$, $OK'' = x''$ von der Ebene der $yz$ durch zwei mit dieser parallele Ebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$, und alsdann noch in der Entfernung $OR = y'$ von der Ebene der $xz$ durch eine mit dieser parallele Ebene $Z''RX'$; diese letztere wird die beiden ersteren Ebenen in zwei mit der Achse der $z$ parallelen Linien $P'H'$, $P''H''$ schneiden; die Fläche $F$ selbst aber wird von den beiden ersteren Ebenen in irgend zwei Linien zweiten Grades $V'M_{,}U'M'$, $V''M_{,,}U''M''$, und von der letzteren Ebene in einer eben solchen Linie $LM_{,}M_{,,}FM''M'$ geschnitten, diese letzte Curve wird jede der beiden vorgenannten im Allgemeinen in zwei Punkten $M_{,}$, $M'$; $M_{,,}$, $M''$, welche zugleich auf den Durchschnittslinien $P'H'$, $P''H''$ liegen werden, schneiden, und wir haben daher im Sinne der oben angenommenen Bezeichnung $P'M_{,} = z_{,}$, $P'M' = z'$, $P''M_{,,} = z_{,,}$, $P''M'' = z''$, also, wenn wir uns in der Ebene $Z''RX'$ die Linien $M_{,}N_{,,}$, $M'N''$ parallel mit der Achse der $x$ gezogen denken:

$$z'' - z' = M''N'', \; z_{,,} - z_{,} = M_{,,}N_{,,}, \; x'' - x' = P'P'';$$

mithin ist aus 7)

$$B' = -\frac{M''N'' + M_{,,}N_{,,}}{2P'P''} \ldots . 8)$$

Setzen wir hingegen in der Gleichung 2) zuerst $x'$ und $y'$, alsdann $x'$ und $y''$ statt $x$ und $y$, so finden wir wie vorhin:

$$z' + z_{,} = -2(B'x' + C'y' + A'') \ldots \ldots 9)$$

$$z''' + z_{,,,} = -2(B'x' + C'y'' + A'') \ldots \ldots 10)$$

worin $z'''$ und $z_{,,,}$ die Wurzeln der zufolge jener Substitution aus

Digitized by Google

2) entstandenen Gleichung bezeichnen. Durch Subtraction dieser Gleichungen erhalten wir:

$$z'''-z'+z_{,,,}-z_{,}=-2C'(y''-y'),\text{ also } C'=-\frac{z'''-z'+z_{,,,}-z_{,}}{2(y''-y')}.$$

Ohne dass eine besondere Zeichnung nöthig ist, können wir uns in den Entfernungen $OR=y'$, $OR''=y''$ von der Ebene der $xz$, mit dieser zwei parallele die Fläche $F$ schneidende Ebenen $Z''RX'$, $Z'''R''X''$, und in der Entfernung $OK'=x'$ von der Ebene der $yz$ parallel mit ihr eine ebenfalls die Fläche $F$ schneidende Ebene $Z'K'Y'$ denken, und analog mit dem Vorhergehenden die mit der Achse der $z$ parallelen Durchschnittslinien $p'h'$, $p''h''$, und die Durchschnittspunkte dieser mit der Fläche $F$ respective durch $m'$, $m_{,}$; $m''$, $m_{,,}$ bezeichnen, und endlich $m'n''$, $m_{,}n_{,,}$ in der Ebene $Z'K'Y'$ parallel mit der Ebene der $yz$ bis zu ihren Durchschnitten $n_{,,}$ und $n''$ mit $p''h''$ ziehen, alsdann haben wir wieder:

$$z'''-z'=m''n'',\ z_{,,,}-z_{,}=m_{,,}n_{,,},\ y''-y'=p''p',$$

$$\text{also } C'=-\frac{m''n''+m_{,}n_{,,}}{2p'p'}\ldots\ldots\ldots 11)$$

Führen wir endlich in der Gleichung 3) nach einander $x'$ und $z'$, $x''$ und $z'$ statt $x$ und $y$ ein, wo $x'$, $z'$, $x''$ ebenfalls bestimmte aber willkührliche Werthe haben können, so entstehen zwei Gleichungen des zweiten Grades in Beziehung auf $y$; bezeichnen wir die Wurzeln derselben respective mit $y'$, $y_{,}$; $y''$, $y_{,,}$; so geben diese zugleich die Grössen der mit der Achse der $y$ parallelen Ordinaten der Durchschnittspunkte $\mu'$, $\mu_{,}$; $\mu''$, $\mu_{,,}$ der Linien ($x=x'$, $z=z'$), ($x=x''$, $z=z'$) oder ($x'h'$), ($x''h''$), mit der Fläche $F$, und wir erhalten, wenn wir uns $\mu'\nu'$, $\mu_{,}\nu_{,,}$ parallel mit der Achse der $x$ gezogen denken, wie oben:

$$y'+y_{,}=-2\left\{\frac{A'}{B}x'+\frac{C'}{C}z'+\frac{C''}{C}\right\}\ldots\ldots 12)$$

$$y''+y_{,,}=-2\left\{\frac{A'}{B}x''+\frac{C'}{C}z'+\frac{C''}{C}\right\}\ldots\ldots 13)$$

und $-\frac{y''-y'+y_{,,}-y_{,}}{2(x''-x')}=\frac{A'}{B}$ also auch $\frac{A'}{B}=-\frac{\mu''\nu''+\mu_{,}\nu_{,,}}{2\pi''\pi'}\ldots\ldots 14)$

Sobald nun $B$ bestimmt ist, kann dieser Ausdruck einen bestimmten Werth von $A'$ geben. Wie wir auch die Hülfsebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$, $Z'''R''X''$ (Taf. IV. Fig. 1.), oder bei der Bestimmung von $C'$ (wo keine Figur beigefügt ist) $Z'K'Y'$, $Z'RX'$, $Z'''R''X''$ u. s. w. parallel mit sich selbst verrücken mögen, die ersten Theile der Gleichungen 8), 11) und 14) behalten immer einen und denselben Werth, es ist auch über die Lage der Coordinatenachsen durchaus keine Bestimmung angenommen worden, mithin können wir auch die Lage der vorgenannten schneidenden Ebenen immerhin beliebig annehmen, nur muss die parallele Lage der beziehlichen Ebenen beibehalten werden. Die in Rede stehende Eigenschaft bezieht sich auch auf die besonderen Fälle, wenn die Fläche $F$ in ein System zweier paralleler Ebenen degenerirt. Die Gleichungen 5), 9), 10), 12), 13) bestehen auch dann noch, wenn die obengenannten schneidenden Ebenen der Fläche $F$ nicht mehr begegnen, denn, auch für den Fall imaginärer Wurzeln einer quadratischen Gleichung, bleibt die Summe derselben doch reell, bloss fällt in diesem Falle die geometrische Deutung hinweg.



Digitized by Google

Wir können die in 8), 11) und 14) gefundenen Ausdrücke für die Coefficienten $B'$, $C'$, $\frac{A'}{B}$ für besondere Fälle noch vereinfachen, indem wir die beziehlichen schneidenden Ebenen so bestimmen, dass

$$z_{,,} = z_{,}, \; y_{,,} = y_{,}$$

wird. Wir brauchen zu diesem Ende in der Fläche $F$ nur Linien respective parallel mit der Achse der $x$ und $y$ zu ziehen, und durch die Durchschnitte derselben mit der Fläche $F$ die parallelen Ebenen zu legen. Hierdurch fallen die Punkte $M_{,,}$ und $N_{,,}$; $m_{,,}$ und $n_{,,}$; $\mu_{,,}$ und $\nu_{,,}$ zusammen, und wir haben statt der vorgenannten Gleichungen folgende:

$$B' = -\frac{M''N''}{2P''P''}, \; C' = -\frac{m''n''}{2p''p''}, \; \frac{A'}{B} = -\frac{\mu''\nu''}{\pi''\pi''} \; \ldots\ldots \; 15)$$

Wir bemerken noch, dass wir aus den Gleichungen 5) oder 9) erhalten:

$$\frac{z' + z_{,}}{2} = -(B'x' + C'y' + A'').$$

Der erste Theil dieser Gleichung bezeichnet die Ordinate der Mitte des von der Fläche interceptirten Stücks der geradenLinie ($x = x'$, $y = y'$); bezeichnen wir diese Ordinate mit $z$, und lassen die Accente von $x'$, $y'$ weg, so erhalten wir

$$z + B'x + C'y + A'' = 0 \; \ldots\ldots \; 16)$$

Diese Gleichung erkennen wir, indem wir $x$, $y$ und $z$ als veränderlich betrachten, als eine solche, welche diejenige Diametralebene der Fläche $F$ ausdrückt, welche alle der Achse der $z$ parallele Sehnen halbirt. Auf gleiche Weise erhalten wir aus 12) die Gleichung

$$\frac{y' + y_{,}}{2} = -\left(\frac{A'}{B}x' + \frac{C'}{B}z' + \frac{C''}{C}\right)$$

oder, wenn wir $\frac{y' + y_{,}}{2} = y$ setzen und die Accente weglassen,

$$By + A'x + C'z + C'' = 0 \; \ldots\ldots \; 17)$$

Diese Gleichung drückt aber diejenige Diametralebene aus, welche alle mit der Achse der $y$ parallelen Sehnen halbirt.

## §. 2.

Wenn wir in der allgemeinen Gleichung

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \; \ldots\ldots \; 1)$$

der Flächen des zweiten Grades zuerst $x$ und $y$, alsdann $x$ und $z$, und zuletzt $y$ und $z$ gleich Null setzen, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$z^2 + 2A''z + D = 0; \; By^2 + 2B''y + D = 0; \; Cx^2 + 2C''x + D = 0 \ldots 2)$$

Diese Gleichungen werden uns die Durchschnittspunkte der Coordinatenachsen mit der Fläche $F$ (welche wieder durch die Gleichung 1) ausgedrückt werden soll) geben; bezeichnen wir näm-

Digitized by Google

lich respective mit $x'$, $x''$; $y'$, $y''$; $x'$, $x''$ die Wurzeln dieser Gleichungen, so ist bekannt, dass

$$x'x'' = D;\ y'y'' = \frac{D}{B};\ x'x'' = \frac{D}{B} \ldots\ldots 3)$$

ist; bezeichnen wir den Anfang des Coordinatensystems mit $O$, die Durchschnittspunkte der Achsen der $z$, der $y$ und der $x$ mit der Fläche $F$, respective durch $R$, $R'$; $Q$, $Q'$; $P$, $P'$; so erhalten wir aus 3)

$$OR.\,OR' = D,\ \frac{OR.OR'}{OQ.OQ'} = B,\ \frac{OR.OR'}{OP.OP'} = C \ldots\ldots 4)$$

Führen wir den so eben gefundenen Werth des Coefficienten $B$ in dem in §. 1. 14) gefundenen Werth von $\frac{A}{B}$ ein, so bekommen wir

$$A' = -\frac{(\mu''\nu' + \mu_{,,}\nu_{,,}).OR.OR'}{2\pi''\pi'.OQ.OQ'} \ldots\ldots 5)$$

Aus §. 1. 15) folgt auch, dass

$$A' = -\frac{\mu''\nu''.OR.OR'}{2\pi''\pi'.OQ.OQ'} \ldots\ldots 6)$$

Da in der allgemeinen Gleichung 1) der Werth von $B$ und $C$ der gleiche bleibt, wie wir auch den Coordinatenanfang $O$ mit Beibehaltung der gleichen Achsenrichtung verlegen mögen, so bleibt der Quotient der Producte $OR.OR'$ und $OQ.OQ'$, wie auch jener der Producte $OR.OR'$ und $OP.OP'$ derselbe für alle beliebigen Punkte, durch die wir nach bestimmter Achsenrichtung drei gerade Linien legen. Da aber auch der Quotient $\frac{\mu''\nu'' + \mu_{,,}\nu_{,,}}{\pi''\pi'}$ für jede mit sich selbst parallele Lage den Ebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$ (Taf. IV. Fig. 1.) beständig bleibt, so bleiben es auch unter der Bedingung der parallelen Achsenrichtung die in 5) und 6) gefundenen Ausdrücke für den Coefficienten $A'$. Die Construction des Ausdrucks von $D$ ist in dem Falle, dass die Achse der $z$ der Fläche wirklich begegnet, immer möglich. In demjenigen Falle aber, wenn diese Achse der Fläche $F$ nicht begegnet, giebt die Gleichung

$$z^2 + 2A''z + D = 0$$

imaginäre Wurzeln, deren Product jedoch immer reell ist. Im ersten Falle, wenn nämlich die Achse der $z$ der Fläche begegnet, ist $D$ positiv, wenn die beiden Durchschnittspunkte $R$, $R'$ auf derselben Seite des Coordinaten-Anfangs liegen, negativ hingegen im entgegengesetzten Falle. Für das Ellipsoid, das eintheilige Hyperboloid und beide Paraboloide ist also $D$ positiv oder negativ jenachdem der Coordinatenanfang ausserhalb oder innerhalb der Fläche genommen wird. Beim zweitheiligen Hyperboloid ist, wenn die Achse der $z$ beide Flächentheile trifft und der Coordinatenanfang $O$ innerhalb des einen liegt, $D$ positiv; liegt der Punkt $O$ aber zwischen beiden Flächentheilen, so ist $D$ negativ; trifft die Achse der $z$ nur einen Flächentheil und liegt der Coordinatenanfang ausserhalb desselben, so ist $D$ positiv, liegt er aber innerhalb, so ist $D$ negativ. Das Zeichen von $B$ und $C$ hängt davon ab, ob die Producte $OR.OR'$ und $OQ.OQ'$ der auf den Coordi-

Digitized by Google

natenachsen $OZ$, $OY$ abgeschnittenen Stücke, ebenso die Producte $OR.OR'$ und $OP.OP'$ der auf den Achsen der $z$ und der $x$ abgeschnittenen Stücke von gleichem oder ungleichem Zeichen sind.

Setzen wir in der allgemeinen Gleichung 1) $B=C=1$, so wird $OR.OR'=OQ.OQ'=OP.OP'$. In diesem speciellen Falle ist die Fläche $F$ eine Kugel.

§. 3.

Zur Bestimmung der Coefficienten $A''$, $B''$, $C''$ bedienen wir uns wieder der Gleichungen 2) des vorigen Paragraphen. Aus der ersten

$$z^2+2A''z+D=0$$

ist, wenn $z'$ und $z''$ die Wurzeln derselben bezeichnen,

$$z'+z''=-2A'', \text{ also } A''=-\frac{z'+z''}{2} \text{ oder } A''=-\frac{OR+OR'}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $M$ die Mitte des Segments $RR'$, so ist

$$A''=-OM \ldots\ldots 1)$$

Aus den beiden anderen Gleichungen 2) in §. 2 erhalten wir

$$\frac{B''}{B}=-\frac{y'+y''}{y}, \quad \frac{C''}{C}=-\frac{x'+x''}{2} \ldots\ldots 1')$$

Bezeichnen wir mit $M'$ und $M''$ die Mitten der Segmente $QQ'$ und $PP'$, so erhalten wir zufolge der Gleichungen 4) des vorigen Paragraphen:

$$B''=-\frac{OM'.OR.OR'}{OQ.OQ'} \ldots 2); \quad C''=-\frac{OM''.OR.OR'}{OP.OP'} \ldots 3)$$

Wir können also in dem Falle, dass die Achsen der $z$, $y$ und $x$ die Fläche $F$ wirklich schneiden, die Werthe von $A''$, $B''$ und $C''$ leicht construiren. $A''$ ist nämlich gleich dem mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstande der Mitte der auf der Achse der $z$ von der Fläche abgeschnittenen Chorde. In demjenigen Falle aber, wo die Achsen der Fläche nicht begegnen, müssen wir diese Coefficienten auf andere Weise bestimmen. Wir wollen diese Bestimmung zuerst bei dem Coefficienten $A''$ vornehmen. Gebrauchen wir hierzu die in §. 1. 16) gefundene Gleichung derjenigen Diametralebene, die alle der Achse der $z$ parallele Chorden halbirt, nämlich die Gleichung:

$$z+B'x+C'y+A''=0 \ldots\ldots 4)$$

in welcher $A''$ die Ordinate des Durchschnittspunkts dieser Ebene mit der Achse der $z$ ist, jedoch mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Ziehen wir daher irgend drei mit der Achse der $z$ parallele Sehnen, so bestimmt diejenige Ebene, welche durch die drei Halbirungspunkte dieser drei Sehnen geht, auf der Achse der $z$ eine Ordinate, die gleich $-A''$ ist. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Ebene 4) mit den beiden anderen Coordinatenachsen sind $-\frac{A''}{B'}$ und $-\frac{A''}{C'}$. Nehmen wir die Gleichungen

$$A'x+By+C'z+B''=0 \ldots\ldots 5)$$

Digitized by Google

$$Cx + Ay + B'z + C'' = 0 \ldots\ldots 6)$$

der beiden anderen Diametralebenen, welche respective die mit der Achse der $y$ und der $x$ parallelen Sehnen halbiren, so finden wir für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Ebene 5) mit den Coordinatenachsen der $z$, $y$ und $x$:

$$z_1 = -\frac{B'}{C},\ y_1 = -\frac{B'}{B},\ x_1 = -\frac{B'}{A};$$

und für jene der Ebene 6) mit den gleichen Achsen:

$$z_2 = -\frac{C''}{B},\ y_2 = -\frac{C''}{A};\ x_2 = -\frac{C''}{C}.$$

Bezeichnen wir mit $C$, $B$ und $A$ die Durchschnittspunkte der Diametralebene 4) mit den Achsen der $z$, $y$ und $x$, ebenso mit $C'$, $B'$, $A'$ und $C''$, $B''$, $A''$ die Durchschnittspunkte der Ebenen 5) und 6) mit jenen Achsen, so haben wir:

$$OC = -A',\ OB = -\frac{A'}{C},\ OA = -\frac{A'}{B};$$

$$OC' = -\frac{B'}{C},\ OB' = -\frac{B'}{B};\ OA' = -\frac{B'}{A};$$

$$OC'' = -\frac{C''}{B},\ OB'' = -\frac{C''}{A},\ OA'' = -\frac{C''}{C}.$$

Aus diesen folgt aber: $\frac{A'}{B'} = \frac{OB}{OC'}$, $\frac{A'}{C'} = \frac{OA}{OC'}$, mithin

$$B'' = -\frac{OC.OC'}{OB},\ C'' = -\frac{OC.OC''}{OA},\ A'' = -OC \ldots 7)$$

Wir haben also allen Coefficienten ihre geometrische Bedeutung gegeben; zur deutlichern Uebersicht wollen wir diese mit ihren zukommenden Werthen hier in der gleichen Ordnung, wie sie gefunden wurden, anschliessen:

$$B' = -\frac{M'N'' + M_{,,}N_{,,}}{2P''P} \text{ (§. 1. 8) oder auch } B' = -\frac{M'N''}{2P'P} \text{ (§. 1. 15)} \} \ldots 8)$$

$$C' = -\frac{m''n'' + m_{,,}n_{,,}}{2p''p} \text{ (§. 1. 11) oder auch } C' = -\frac{m'n''}{2p'p} \text{ (§. 1. 15)} \} \ldots 9)$$

$$A' = -\frac{(\mu''\nu'' + \mu_{,,}\nu_{,,}).OR.OR'}{2\pi''\pi OQ.OQ'} \text{ (§. 1. 14) oder auch } A'$$

$$= -\frac{\mu''\nu''.OR.OR'}{2\pi''\pi OQ.OQ'} \text{ (§. 1. 15)} \} \ldots 10)$$

$$B = \frac{OR.OR'}{OQ.OQ'} \ldots \text{(§. 2. 4)} \ldots 11);\ C = \frac{OR.OR'}{OP.OP'} \text{(§. 2. 4)} \ldots 12;$$

$$D = OR.OR' \text{ (§. 2. 4)} \ldots 13)$$

Wenn die Fläche $F$ von den Achsen getroffen wird; so ist

$$A'' = -OM \text{ (§. 3. 1)} \ldots 14;\ B'' = -\frac{OM'.OR.OR'}{OQ.OQ'} \text{ (§. 3. 2)} \ldots 15);$$

$$C'' = -\frac{OM'.OR.OR'}{OQ.OQ'} \text{ (§. 3. 3)} \ldots 16)$$

Digitized by Google

Wenn die Fläche $F$ von den Achsen nicht getroffen wird; so ist

$$A''=-OC\,(\S.\,3.\,7)\,..\,17);\quad B''=-\frac{OC.OC'}{OB}\,(\S.\,3.\,7)\,..\,18);$$

$$C''=-\frac{OC.OC''}{OA}\,(\S.\,3.\,7)\,..\,19)$$

## §. 4.

Wir wollen, bevor wir weitere Anwendungen von diesen Bestimmungen machen, noch untersuchen, welche geometrische Deutung die übrigen Coefficienten zulassen, wenn einer oder mehrere in der allgemeinen Gleichung

$$z^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2C'yz+2A''z+2B''y$$
$$2C''x+D=0\,...\,1)$$

der Flächen des zweiten Grades Null werden.

Wir sehen aus §. 1. 8), §. 2. 4) und §. 3. 1), dass keiner der Coefficienten $B'$, $C'$; $B$, $C$, $D$ und $A''$ von den übrigen abhängig ist, mithin kann einer oder mehrere der übrigen Coefficienten $A'$, $B''$, $C''$ zugleich Null werden, ohne dass die geometrische Bedeutung der erstern eine Aenderung erleidet. Wohl aber erkennen wir aus §. 1. 14) und §. 3. 1), dass $A'$ und $B''$ von $B$, $C'$ hingegen von $C$ abhängig ist, und dass für $B=0$ und $C=0$ im Allgemeinen auch $A'$, $B''$, $C'$ zu Null werden, in welchem Falle auch die Fläche $F$ niemals ein Ellipsoid sein kann, welches schon daraus erhellet, dass die Gleichung $By^2+2B'y+D=0$, wenn $B=0$ ist, in $2B'y+D=0$ übergeht, welche nur eine einzige, aber eine reelle Wurzel hat, weshalb die Transversale $OQQ'$ weder eine Tangente an die Fläche sein, noch dieselbe in zwei Punkten treffen kann, was doch nothwendig Statt finden müsste, wenn die Fläche $F$ ein Ellipsoid wäre und der Punkt $O$ nicht auf der Oberfläche desselben läge, welches wir aber bis jetzt noch vorausgesetzt haben. Ist aber auch $D=0$, so folgt aus §. 3. 13), dass einer der Factoren $OR$ oder $OR'$ gleich Null ist, dies kann aber nur dann Statt finden, wenn der Coordinatenanfang $O$ auf der Fläche $F$ selbst liegt, in welchem Falle aber alsdann sowohl einer der Factoren $OQ$ oder $OQ'$, wie auch $OP$ oder $OP'$, zu Null werden muss, dadurch alsdann $B$, $C$, $A'$, $B''$, $C''$ unbestimmt werden. Diese Coefficienten müssen in diesem Fall wie in §. 3. mittelst der Diametralebenen 4) 5) 6) bestimmt werden. Am gleichen Orte haben wir gefunden, dass $B''=-\frac{OC.OC'}{OB}$, und dass $OA=-\frac{B''}{A}$ ist, woraus $A=\frac{OC.OC'}{OB.OA}$ wird. Wir bemerken ferner noch, dass, wenn $B$ und $C$ zugleich negativ sind, alsdann eines der Segmente $OR$ oder $OR'$ in Beziehung auf das andere eine entgegengesetzte Richtung haben muss; dies kann aber bei dem Ellipsoid nur dann stattfinden, wenn der Punkt $O$ innerhalb der Fläche liegt, in diesem Falle haben aber auch die Segmente $OP$, $OP'$ wie auch $OQ$ und $OQ'$ entgegengesetzte Richtung, also sind die Producte $OP.OP'$, $OQ.OQ'$, so wie das Product $OR.OR'$ negativ, folglich die Quotienten $\frac{OR.OR'}{OQ.OQ'}$, $\frac{OR.OR'}{OP.OP'}$ positiv, woraus hervorgeht, dass bei dem Ellipsoid die Coefficienten $B$ und $C$ immer positiv sein müssen. Ganz

Digitized by Google

auf gleiche Art können wir zeigen, dass, wenn $z^2$ das Vorzeichen $+$ hat, die beiden Coefficienten $B$ und $C$ beim zweitheiligen Hyperboloid zugleich negativ sein müssen, beim eintheiligen Hyperboloid aber nur einer von beiden.

Ist ferner $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$, so folgt nach §. 2. 3) und §. 3. 1'), dass $\frac{z'+z''}{2}=0$, $\frac{y'+y''}{2}=0$, $\frac{x'+x''}{2}=0$, also $OR=-OR$, $OQ=-OQ$, $OP=-OP$ ist; die Punkte $R$ und $R$; $Q$, $Q$; $P$, $P$ liegen also nicht nur auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $O$, sondern auch gleich weit von demselben entfernt, auch erhellet, dass der Punkt $O$, weil kein besonderes Coordinatensystem berücksichtigt wurde, der Mittelpunkt der Fläche sein muss. Wir erhalten auch nach der zu Ende von §. 3. gegebenen Tabelle $D=-OR^2$, $B=\frac{OR^2}{OQ^2}$, $C=\frac{OR^2}{OP^2}$. Wir sehen schon aus dem so eben Angegebenen, dass, wenn auf diesem Wege die Discussion der Flächen vorgenommen würde, dieselbe weit anschaulichere Resultate als die bisher gefundenen liefern würde.

## §. 5.

Aus den am Ende von §. 3. angegebenen Coefficientenwerthen lassen sich viele merkwürdige Eigenschaften der Flächen des zweiten Grades deduciren.

Wir haben nämlich für jedes beliebige Coordinatensystem gefunden, dass

$$B=\frac{OR.OR}{OQ.OQ},\quad C=\frac{OR.OR}{OP.OP}.$$

Verlegen wir den Coordinatenanfang $O$ nach irgend einem andern beliebigen Punkt $O_1$ der Achse der $z$ oder der Linie $ORR$, und ziehen durch $O_1$ mit den vorigen Achsen der $x$ und $y$ respective die parallelen $O_1P_1P_1'$, $O_1Q_1Q_1'$, welche die Fläche $F$ ebenfalls in den reellen oder imaginären Punkten $P_1$, $P_1'$; $Q_1$, $Q_1'$ treffen, so folgt aus der Bemerkung, dass die Coefficienten $B$ und $C$ durch eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems durchaus keine Veränderung erleiden, dass ebenfalls

$$B=\frac{O_1R.O_1R}{O_1Q_1.O_1Q_1'},\quad C=\frac{O_1R.O_1R}{O_1P_1.O_1P_1'}.$$

Setzen wir die Werthe von $B$, wie auch die von $C$ einander gleich, so erhalten wir:

$$\frac{OR.OR.O_1Q_1.O_1Q_1'}{OQ.OQ.O_1R.O_1R}=1;\quad \frac{OR.OR.O_1P_1.O_1P_1'}{OP.OP.O_1R.O_1R}=1\ldots 1)$$

Verlegen wir ferner den Coordinatenanfang in einen ganz beliebigen Ort $O_2$ und nehmen ein ganz beliebiges Coordinatensystem, dessen Achsen $O_2R_1'$, $O_2Q_2'$, $O_2P_2'$ mit jenen des vorhergehenden Systems durchaus in keiner Beziehung stehen, bezeichnen endlich mit $B_1$, $C_1$ die Coefficienten von $y^2$ und $x^2$ in der allgemeinen Gleichung der Fläche $F$ (wo jedoch $B_1$ und $C_1$ ganz andere Werthe haben als $B$ und $C$), so ist ebenfalls nach §. 3. 11). 12)

$$B_1=\frac{O_2R_1.O_2R_1'}{O_2Q_2.O_2Q_2'},\quad C_1=\frac{O_2R_1.O_2R_1'}{O_2P_2.O_2P_2'}.$$

Es bezeichnen $R_1$, $R_1'$; $Q_2$, $Q_2'$; $P_2$, $P_2'$ die Durchschnittspunkte der neuen Achsen $O_2R_1'$, $O_2Q_2'$, $O_2P_2'$ der $z$, $y$ und $x$ mit der Fläche $F$. Verlegen wir jetzt den Coordinatenanfang $O_2$ nach irgend einem andern Punkt $O_3$ der Achse $O_2R_1'$ der $z$, und ziehen $O_3Q_3'$,

Digitized by Google

$O_2P_2$ respective parallel mit den Achsen $O_2Q'_2$, $O_2P'_2$ der $y$ und $x$ des nächstvorhergehenden Coordinatensystems, so haben wir, weil bei dieser Coordinaten-Veränderung die Werthe von $B_1$ und $C_1$ unverändert bleiben, wenn $Q_2$, $Q'_2$, $P_2$, $P'_2$ die Durchschnittspunkte der neuen Achsen der $y$ und $x$ mit der Fläche $F$ bezeichnen, nach den gleichen Nummern:

$$B_1 = \frac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1}{O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2}, \quad C_1 = \frac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1}{O_2P_2 \cdot O_2P'_2}.$$

Setzen wir diese Werthe von $B_1$ und $C_1$ jenen vorhin gefundenen gleich, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2}{O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2 \cdot O_2R_1 \cdot O_2R'_1} &= 1 \\ \frac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_2P_2 \cdot O_2P'_2}{O_2P_2 \cdot O_2P'_2 \cdot O_2R_1 \cdot O_2R'_1} &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2)$$

Setzen wir dieses Verfahren, wodurch wir die Gleichungen 1) und 2) erhalten haben, weiter fort, und bezeichnen die Durchschnittspunkte der Fläche $F$ mit den aufeinanderfolgenden Achsen der $z$, $y$ und $x$ respective mit

$$R_2,\ R'_2,\ R_1,\ R'_1, \ldots\ldots R_n,\ R'_n;$$
$$Q_4,\ Q'_4,\ Q_3,\ Q'_3,\ Q_2,\ Q'_2, \ldots\ldots Q_{2n+1},\ Q'_{2n+1};$$
$$P_4,\ P'_4,\ P_3,\ P'_3,\ P_2,\ P'_2, \ldots\ldots P_{2n+1},\ P'_{2n+1};$$

so erhalten wir:

$$\frac{O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot O_4Q_4 \cdot O_4Q'_4}{O_4Q_4 \cdot O_4Q'_4 \cdot O_4R_2 \cdot O_4R'_2} = 1; \quad \frac{O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot O_4P_4 \cdot O_4P'_4}{O_4P_4 \cdot O_4P'_4 \cdot O_4R_2 \cdot O_4R'_2} = 1 \Big\} 3)$$

$$\frac{O_6R_3 \cdot O_6R'_3 \cdot O_7Q_7 \cdot O_7Q'_7}{O_6Q_6 \cdot O_6Q'_6 \cdot O_7R_3 \cdot O_7R'_3} = 1; \quad \frac{O_6R_3 \cdot O_6R'_3 \cdot O_7P_7 \cdot O_7P'_7}{O_6P_6 \cdot O_6P'_6 \cdot O_7R_3 \cdot O_7R'_3} = 1 \Big\} 4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n \cdot O_{2n+1}Q_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q'_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n} \cdot O_{2n}Q'_{2n} \cdot O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n} &= 1; \\ \frac{O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n \cdot O_{2n+1}P_{2n+1} \cdot O_{2n+1}P'_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n} \cdot O_{2n}P'_{2n} \cdot O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n} &= 1 \end{aligned}\right\} 5)$$

Aus der Multiplication der Gleichungen 1) 2) ... 5) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{OR \cdot OR' \cdot O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot \ldots\ldots O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n}{O_1R \cdot O_1R' \cdot O_1R_1 \cdot O_1R'_1 \cdot O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot \ldots\ldots O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n}\right\}^2 = \\ &\frac{OP \cdot OP' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot O_2P_2 \cdot O_2P'_2 \cdot O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2 \ldots}{O_1P_1 \cdot O_1P'_1 \cdot O_1Q_1 \cdot O_1Q'_1 \cdot O_2P_2 \cdot O_2P'_2 \cdot O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2 \ldots} \\ &\qquad \ldots \frac{O_{2n}P_{2n} \cdot O_{2n}P'_{2n} \cdot O_{2n}Q_{2n} \cdot O_{2n}Q'_{2n}}{\ldots O_{2n+1}P_{2n+1} \cdot O_{2n+1}P'_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q'_{2n+1}} \end{aligned}\right\} 6)$$

Hätten wir die mit ungeraden Stellenzahlen versehenen Anfangspunkte der Coordinaten auf den Linien $OQ$, $O_2Q_2$, $O_4Q_4$, ..... oder auch auf $OP$, $O_2P_2$, $O_4P_4$ ..... genommen, so würden wir ähnliche Gleichungen, wie die in 6) erhalten haben.

Sind die sämmtlichen Achsen der $z$ nemlich $OR$, $O_1R$, $O_2R_1$, ..... so gezogen, dass sie die Fläche $F$ berühren, so

Digitized by Google

haben wir $OR = OR'$, $O_1R = O_1R'$, $O_2R_1 = O_2R'_1$, u. s. w. und die Gleichung 6. geht in folgende über:

$$\left\{\frac{OR \cdot O_2R_2 \cdot O_4R_4 \cdot \ldots \cdot O_{2n}R_{2n}}{O_1R \cdot O_1R_1 \cdot O_3R_3 \cdot \ldots \cdot O_{2n+1}R_n}\right\}^4 = \frac{OP \cdot OP' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot \ldots \cdot O_{2n}P_{2n} \cdot O_{2n}P'_{2n} \cdot O_{2n}Q_{2n} \cdot O_{2n}Q'_{2n}}{O_1P_1 \cdot O_1P'_1 \cdot O_1Q_1 \cdot O_1Q'_1 \cdot \ldots \cdot O_{2n+1}P_{2n+1} \cdot O_{2n+1}P'_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q'_{2n+1}} \quad 7)$$

Nehmen wir aber die beiden andern Achsen jedesmal tangirend, so dass also $OQ$, $O_1Q_1$, $O_2Q_2$,.....; $OP$, $O_1P_1$, $O_2P_2$..... die Fläche $F$ berühren, so wird $OQ = OQ$, $O_1Q_1 = O_1Q_1$, $O_2Q_2 = O_2Q_2$,....; $OP = OP$, $O_1P_1 = O_1P_1$, $O_2P_2 = O_2P_2$..... und wir erhalten aus 6) folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{OR \,.\, OR' \,.\, O_2R_1 \,.\, O_2R'_1 \,.\, O_4R_2 \,.\, O_4R'_2 \,\ldots\, O_{2n}R_n \,.\, O_{2n}R'_n}{O_1R \,.\, O_1R' \,.\, O_3R_1 \,.\, O_3R'_1 \,.\, O_5R_2 \,.\, O_5R'_2 \,\ldots\, O_{2n+1}R_n \,.\, O_{2n+1}R'_n} = \\ &= \frac{OP \,.\, OQ \,.\, O_2P_2 \,.\, O_2Q_2 \,.\, O_4P_4 \,.\, O_4Q_4 \,\ldots\, O_{2n}P_n \,.\, O_{2n}Q_{2n}}{O_1P \,.\, O_1Q \,.\, O_3P_2 \,.\, O_3Q_2 \,.\, O_5P_4 \,.\, O_5Q_4 \,\ldots\, O_{2n+1}P_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}Q_{2n+1}}\end{aligned}\right\} 8)$$

Sind endlich in jedem Coordinatensystem alle drei Achsen tangirend, so ist aus 6)

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{OR \,.\, O_2R_2 \,.\, O_4R_4 \,\ldots\, O_{2n}R_n}{O_1R \,.\, O_3R_1 \,.\, O_5R_2 \,\ldots\, O_{2n+1}R_n}\right\}^3 \\ &= \frac{OP \,.\, OQ \,.\, O_2P_2 \,.\, O_2Q_2 \,\ldots\, O_{2n}P_{2n} \,.\, O_{2n}Q_{2n}}{O_1P \,.\, O_1Q \,.\, O_3P_2 \,.\, O_3Q_2 \,\ldots\, O_{2n+1}P_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}Q_{2n+1}}\end{aligned}\right\} 9)$$

Vervielfachen wir die Gleichungen der nemlichen Nummern 1, 2, ... 5, jedoch so, dass die rechts und die links besondere Producte bilden, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&OR \,.\, OR' \,.\, O_1Q_1 \,.\, O_1Q'_1 \,.\, O_2R_1 \,.\, O_2R'_1 \,\ldots\, O_{2n}R_n \,.\, O_{2n}R'_n \,.\, O_{2n+1}Q_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}Q'_{2n+1} \\ &= OQ \,.\, OQ \,.\, O_1R \,.\, O_1R' \,.\, O_3Q_2 \,.\, O_3Q_2 \,\ldots\, O_{2n}Q_{2n} \,.\, O_{2n}Q_{2n} \,.\, O_{2n+1}R_n \,.\, O_{2n+1}R'_n\end{aligned}\right\} = 1 \ldots 10)$$

$$\left.\begin{aligned}&OR \,.\, OR' \,.\, O_1P_1 \,.\, O_1P'_1 \,.\, O_2R_1 \,.\, O_2R'_1 \,\ldots\, O_{2n}R_n \,.\, O_{2n}R'_n \,.\, O_{2n+1}P_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}P'_{2n+1} \\ &= OP \,.\, OP \,.\, O_1R \,.\, O_1R' \,.\, O_2P_2 \,.\, O_2P'_2 \,\ldots\, O_{2n}P_{2n} \,.\, O_{2n}P_{2n} \,.\, O_{2n+1}R_n \,.\, O_{2n+1}R'_n\end{aligned}\right\} = 1 \ldots 11)$$

Digitized by Google

Nehmen wir auch diesmal alle Achsen der $z$, $y$ und $x$ tangirend an die Fläche $F$, so ergeben sich aus diesen Gleichungen folgende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{OR.O_2R_1.O_4R_2.....O_{2n}R_n}{O_1R.O_3R_1.O_5R_2.....O_{2n+1}R_n} &= \frac{OQ.O_2Q_2.O_4Q_4.....O_{2n}Q_{2n}}{O_1Q.O_3Q_1.O_5Q_3.....O_{2n+1}Q_{2n+1}} \\ &= \frac{OP.O_2P_2.O_4P_4.....O_{2n}P_{2n}}{O_1P.O_3P_1.O_5P_3.....O_{2n+1}P_{2n+1}}\end{aligned}\right\}...12)$$

Addiren wir endlich die Gleichungen 1, 2, ... 5 in der nemlichen Ordnung, so ist:

$$\frac{OR.OR.O_2R_1.O_2R_1}{OQ.OQ.O_1R.O_1R} + \frac{O_2R_1.O_2R_1.O_4R_2.O_4R_2}{O_2Q_2.O_2Q_2.O_3R_1.O_3R_1} + ... + \frac{O_{2n}R_n.O_{2n}R_n.O_{2n+1}Q_{2n+1}.O_{2n+1}Q_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n}.O_{2n}Q_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R_n} = n+1...13)$$

$$\frac{OR.OR.O_2P_1.O_2P_1}{OP.OP.O_1R.O_1R} + \frac{O_2R_1.O_2R_1.O_4P_2.O_4P_2}{O_2P_2.O_2P_2.O_3R_1.O_3R_1} + ... + \frac{O_{2n}R_n.O_{2n}R_n.O_{2n+1}P_{2n+1}.O_{2n+1}P_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n}.O_{2n}P_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R_n} = n+1...14)$$

Sind alle diese Linien Tangenten an die Fläche $F$, so ist:

$$\left\{\frac{OR}{O_1R}\right\}^2\left\{\frac{O_1Q_1}{OQ}\right\}^2 + \left\{\frac{O_2R_1}{O_1R_1}\right\}^2\left\{\frac{O_2Q_2}{O_2Q_2}\right\}^2 + \left\{\frac{O_4R_2}{O_3R_2}\right\}^2\left\{\frac{O_3Q_3}{O_4Q_4}\right\}^2 + ... + \left\{\frac{O_{2n}R_n}{O_{2n+1}R_n}\right\}^2\left\{\frac{O_{2n+1}Q_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n}}\right\}^2 = n+1...15)$$

$$\left\{\frac{OR}{O_1R}\right\}^2\left\{\frac{O_1P_1}{OP}\right\}^2 + \left\{\frac{O_2R_1}{O_1R_1}\right\}^2\left\{\frac{O_2P_2}{O_2P_2}\right\}^2 + \left\{\frac{O_4R_2}{O_3R_2}\right\}^2\left\{\frac{O_3P_3}{O_4P_4}\right\}^2 + ... + \left\{\frac{O_{2n}R_n}{O_{2n+1}R_n}\right\}^2\left\{\frac{O_{2n+1}P_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n}}\right\}^2 = n+1...16)$$

Digitized by Google

## II. Bestimmung der geometrischen Bedeutung der Coefficienten der Gleichung der Flächen des dritten Grades.

### §. 1.

Da der Gang, den wir bei diesen Bestimmungen einschlagen, öfters mit jenem des in I. bearbeiteten Gegenstandes übereinstimmt, so werden wir uns in den betreffenden Fällen, um Wiederholungen zu vermeiden, auf denselben beziehen. Der allgemeinen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &x^3+By^3+Cx^3+3Ayz^2+3Dxz^2+3Ey^2z+3Fxyz\\ &\qquad+3Gx^2z+3Kxy^2+3Lyx^2\\ &+3A'z^2+3B'y^2+3C'x^2+3D'xy+3E'xz+3F'yz\\ &\qquad+3A''z+3B''x+3C''y+D''' \end{aligned}\right\}=0\ldots 1)$$

der Flächen des dritten Grades geben wir folgende zu unserm Zwecke dienliche Formen:

$$\left.\begin{aligned} &z^3+3z^2\{Ay+Dx+A'\}+3z\{Ey^2+Fxy+Gx^2\\ &\qquad+F'y+E'x+A''\}\\ &+By^3+3y^2\{Kx+B'\}+3y\{Lx^2+D'x+B''\}\\ &\qquad+Cx^3+3C'x^2+3C''x+D''' \end{aligned}\right\}=0\ldots..2)$$

$$\left.\begin{aligned} &y^3+3y^2\left\{\frac{E}{B}z+\frac{K}{B}x+\frac{B'}{B}\right\}+3y\left\{\frac{A}{B}z^2+\frac{F}{B}xz+\frac{L}{B}x^2\right.\\ &\qquad\left.+\frac{F'}{B}z+\frac{D'}{B}x+\frac{B''}{B}\right\}\\ &+\frac{z^3}{B}+3z^2\left\{\frac{D}{B}+\frac{A'}{B}\right\}+3z\left\{\frac{G}{B}x^2+\frac{E}{B}x+\frac{A''}{B}\right\}+\frac{C}{B}x^3\\ &\qquad+3\frac{C'}{B}x^2+3\frac{C''}{B}x+\frac{D''}{B} \end{aligned}\right\}=0\ldots.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &x^3+3x^2\left\{\frac{G}{C}z+\frac{L}{C}y+\frac{C'}{C}\right\}+3x\left\{\frac{D}{C}z^2+\frac{F}{C}yz+\frac{K}{C}y^2\right.\\ &\qquad\left.+\frac{E'}{C}z+\frac{D'}{C}y+\frac{C''}{C}\right\}\\ &+\frac{z^3}{C}+3z^2\left\{\frac{A}{C}y+\frac{A'}{C}\right\}+3z\left\{\frac{E}{C}y^2+\frac{F'}{C}y+\frac{A''}{C}\right\}+\frac{B}{C}y^3\\ &\qquad+3\frac{B'}{C}y^2+3\frac{B''}{C}y+\frac{D'''}{C} \end{aligned}\right\}=0\ldots.4)$$

Wir haben hiebei wie in I. kein besonderes Coordinatenberücksichtiget.

Wenden wir das gleiche Verfahren wie in I. §. 1. an, und bezeichnen die Wurzeln der aus 2) durch die auf einander folgenden Substitutionen von $x'$, $y'$; $x''$, $y'$; $x'$, $y''$ statt $x$, $y$ entstandenen Gleichungen respective mit $z'_1, z'_2, z'_3$; $z''_1, z''_2, z''_3$; $z'''_1, z'''_2, z'''_3$; so erhalten wir nach der Theorie der Gleichungen des dritten Grades:

Digitized by Google

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = -3(Ay' + Dx' + A') \ldots\ldots 5)$$

$$x''_1 + x''_2 + x''_3 = -3(Ay' + Dx'' + A') \ldots\ldots 6)$$

$$x'''_1 + x'''_2 + x'''_3 = -3(Ay'' + Dx' + A') \ldots\ldots 7)$$

Aus diesen ist:

$$D = -\frac{x''_1 - x'_1 + x'_2 - x'_2 + x''_3 - x'_3}{3(x'' - x')} \ldots\ldots 8)$$

$$A = -\frac{x'''_1 - x'_1 + x'''_2 - x'_2 + x'''_3 - x'_3}{3(y'' - y')} \ldots\ldots 9)$$

Bei der Construction dieser beiden Coefficienten-Werthe verfahren wir ganz gleich wie bei jener der Werthe von $B'$, $C$ in I. §. 1. Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der mit der Achse der $z$ parallelen Linien ($x = x'$, $y = y'$), ($x = x''$, $y = y'$), ($x = x'$, $y = y''$), die wir $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$ (Taf. IV. Fig. 2.) nennen wollen, und der durch die Gleichung 1) ausgedrückten Fläche $F_1$ respective mit $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$; $M''_1$, $M''_2$, $M''_3$; $M'''_1$, $M'''_2$, $M'''_3$; und denken uns von $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$ die Linien $M'_1N'_1$, $M'_2N'_2$, $M'_3N'_3$ parallel mit der Achse der $x$ bis an die Linie $P'''L'''$, und $M'_1N'''_1$, $M'_2N'''_2$, $M'_3N'''_3$ parallel mit der Achse der $y$ bis an die Linie $P'''L'''$ gezogen, so erhalten wir, wie am oben angegebenen Orte:

$$D = -\frac{M'''_1N'''_1 + M'''_2N'''_2 + M'''_3N'''_3}{3P'''P'} \ldots\ldots 10)$$

$$A = -\frac{M'''_1N'''_1 + M'''_2N'''_2 + M'''_3N'''_3}{3P'''P'} \ldots\ldots 11)$$

Durch ein ähnliches Verfahren mit den Gleichungen 3) und 4) erhalten wir:

$$\frac{K}{B} = -\frac{m'''_1n'''_1 + m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3}{3p'''p'} \ldots\ldots 12)$$

$$\frac{E}{B} = -\frac{m'''_1n'''_1 + m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3}{3p'''p'} \ldots\ldots 13)$$

$$\frac{L}{C} = -\frac{\mu'''_1\nu'''_1 + \mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3}{3\pi'''\pi'} \ldots\ldots 14)$$

$$\frac{G}{C} = -\frac{\mu'''_1\nu'''_1 + \mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3}{3\pi'''\pi'} \ldots\ldots 15)$$

In diesen Ausdrücken bedeuten $m'''_1$, $m'''_2$, $m'''_3$, $n'''_1$ u. s. w. in Beziehung auf die Fläche $F_1$ und die Linien ($x = x'$, $z = z'$); ($x = x''$, $z = z'$); ($x = x'$, $z = z''$); ($y = y'$, $z = z'$); ($y = y''$, $z = z'$): ($y = y'$, $z = z''$); die wir respective mit $p'l'$, $p''l''$, $p'''l'''$ $\pi'\lambda'$, $\pi''\lambda''$, $\pi'''\lambda'''$ bezeichnen wollen (diese Linien sind alle in der Figur angezeigt, die Punkte $m'_1, \ldots \mu'_1 \ldots \mu'''_3$, wie auch die Linie $m'_1n'_1$ u. s. w. sind weggelassen) das Gleiche, was $M''_1$, $M''_2$, $M''_3$, $N''_1$ u. s. w. in Beziehung auf die Fläche $F_1$ und die Linien $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$ bedeuten.

Ganz auf gleiche Art wie in I. §. 1. 15. können wir für besondere Fälle die in 10, 11, .... 15) gefundenen Werthe von $D$, $A$ .... u. s. w. noch vereinfachen, so dass sie die Formen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} D &= -\frac{M''_2N''_2 + M''_3N''_3}{3P''P}; \quad A = -\frac{M'''_2N'''_2 + M'''_3N'''_3}{3P'''P} \\ \frac{K}{B} &= -\frac{m''_2n''_2 + m''_3n''_3}{3p''p'}; \quad \frac{E}{B} = -\frac{m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3}{3p'''p'} \\ \frac{L}{C} &= -\frac{\mu''_2\nu''_2 + \mu''_3\nu''_3}{3\pi''\pi'}; \quad \frac{G}{C} = -\frac{\mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3}{3\pi'''\pi'} \end{aligned}\right\} \ldots . 16)$$

erhalten.

## §. 2.

Setzen wir zuerst in der Gleichung 2) $x$ und $y$; alsdann in 3) $x$ und $z$; und endlich in 4) $y$ und $z$, gleich Null, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$z^3 + 3A'z^2 + 3A''z + D''' = 0 \ldots\ldots 1)$$

$$y^3 + \frac{3B'}{B}y^2 + \frac{3B''}{B}y + \frac{D''}{B} = 0 \ldots\ldots 2)$$

$$x^3 + \frac{3C'}{C}x^2 + \frac{3C''}{C}x + \frac{D'''}{C} = 0 \ldots\ldots 3)$$

Bezeichnen wir respective die Wurzeln dieser Gleichungen mit $z_1, z_2, z_3$; $y_1, y_2, y_3$; $x_1, x_2, x_3$; so ist bekanntlich:

$$-z_1z_2z_3 = D'''; \quad -y_1y_2y_3 = \frac{D'''}{B}; \quad -x_1x_2x_3 = \frac{D'''}{C};$$

oder wenn wir, wie früher, den Coordinaten-Anfang mit $O$, die Durchschnittspunkte der Achsen der $z$, $y$ und $x$ mit der Fläche $F$ beziehlich durch $R$, $R'$, $R''$; $Q$, $Q'$, $Q''$; $P$, $P'$, $P''$ bezeichnen, so ist:

$$D''' = -OR.OR'.OR''; \quad \frac{D'''}{B} = -OQ.OQ'.OQ''; \quad \frac{D'''}{C} = -OP.OP'.OP'';$$

woraus wir sogleich:

$$D''' = -OR.OR'.OR'', \quad B = \frac{OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''}, \quad C = \frac{OR.OR'.OR''}{OP.OP'.OP''} \ldots 4)$$

erhalten. Da wir hiebei kein besonderes Coordinaten-System zu berücksichtigen brauchen, so nehmen wir dasselbe so an, dass es mit jenem in §. 1. entweder das gleiche, oder doch mit ihm parallel ist; alsdann werden wir mittelst der Substitution der soeben gefundenen Werthe von $B$ und $C$ in den Gleichungen 12, 13, .. 16 folgende Coordinaten-Werthe erhalten:

$$K = -\frac{(m''_1n''_1 + m''_2n''_2 + m''_3n''_3) \cdot OR \cdot OR' \cdot OR''}{3p''p' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot OQ''} \ldots\ldots 5)$$

$$E = -\frac{(m'''_1n'''_1 + m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3) \cdot OR \cdot OR' \cdot OR''}{3p'''p' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot OQ''} \ldots\ldots 6)$$

$$L = -\frac{(\mu''_1\nu''_1 + \mu''_2\nu''_2 + \mu''_3\nu''_3) \cdot OR \cdot OR' \cdot OR''}{3\pi''\pi' \cdot OP \cdot OP' \cdot OP''} \ldots\ldots 7)$$

$$G = -\frac{(\mu'''_1\nu'''_1 + \mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3) \cdot OR \cdot OR' \cdot OR''}{3\pi'''\pi' \cdot OP \cdot OP' \cdot OP''} \ldots\ldots 8)$$

Die abgekürzten Werthe dieser Coordinaten sind aus §. 1. 16. ebenso zu bestimmen.

Digitized by Google

§. 3.

Wir gelangen zur Bestimmung der Coefficienten $A'$, $B'$, $C'$ indem wir bemerken, dass bei der gleichen Bezeichnung wie in §. 2. aus den Gleichungen 1, 2, 3 jenes Paragraphen folgt, dass:

$$A' = -\frac{z_1+z_2+z_3}{3},\quad \frac{B'}{B} = -\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad \frac{C'}{C} = -\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

ist, und wenn wir in diese Ausdrücke die Werthe von $z_1$, $z_2$, $z_3$, $y_1$ ..... und von $B$ und $C$ einführen, so erhalten wir alsdann:

$$\left.\begin{aligned} A' &= -\frac{(OR+OR'+OR'')}{3},\quad B' = -\frac{(OQ+OQ'+OQ'')OR.OR'.OR''}{3\,OQ.OQ'.OQ''} \\ C' &= -\frac{(OP+OP'+OP'')OR.OR'.OR''}{3\,OP.OP'.OP''}. \end{aligned}\right\} 1)$$

Nun ist aber, wenn alle drei Wurzeln der Gleichung §. 2. 2) positiv sind, $\frac{OR+OR'+OR''}{3} = OR + \frac{RR'+RR''}{3}$, und wenn wir $RL = \frac{RR'+RR''}{3}$ gleich dem dritten Theile der Summe der Abstände der beiden letzten Durchschnittspunkte $R'$ und $R''$ vom ersten $R$ machen, so ist $OL$ die Entfernung des auf die eben angegebene Weise bestimmten Punktes $L$ vom Coordinatenanfange. Sind $M$ und $N$ auf den Achsen der $y$ und $x$ in Beziehung auf die Punkte $Q$, $Q'$ $Q''$; $P$, $P'$, $P''$ ebenso bestimmt wie $L$ in Beziehung auf die Punkte $R$, $R'$, $R''$; so haben wir auch zufolge 1):

$$\left.\begin{aligned} A' &= -OL^{*});\ B' = -\frac{OM.OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''};\ C' = -\frac{ON.OR.OR'.OR''}{OP.OP'.OP''} \end{aligned}\right\} 2)$$

Aus den nemlichen Gleichungen §. 2. 1. 2. 3. folgt aber auch noch, dass:

$$A'' = \frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{3},\quad \frac{B''}{B} = \frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{3},$$

$$\frac{C''}{C} = \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{3}$$

ist. Führen wir statt $z_1$, $z_2$, u. s. w., wie auch statt $B$ und $C$ ihre Werthe in diese Ausdrücke ein, so erhalten wir:

---

*) Der oben angegebene Werth von $A'$ hängt jedoch noch auf verschiedene Art von dem Vorzeichen der Wurzeln $z_1$, $z_2$ und $z_3$ ab, nemlich $A'$ kann in Beziehung auf diese Vorzeichen noch folgende Werthe haben: $-\frac{z_1-z_2+z_3}{3}$, $-\frac{z_1+z_2-z_3}{3}$, $-\frac{-z_1+z_2+z_3}{3}$, $-\frac{z_1-z_2-z_3}{3}$, $-\frac{-z_1-z_2+z_3}{3}$, $-\frac{-z_1+z_2-z_3}{3}$, von welchen jedoch die drei letztern nur das Entgegengesetzte der drei erstern sind; für diese drei finden wir auf gleiche Art wie im Texte respective: $A' = -(OR - \frac{RR'-RR''}{3})$, $A' = -(OR + \frac{RR'-RR''}{3})$, $A' = -(-OR + \frac{RR'+RR''}{3})$; ganz auf gleiche Art lassen sich auch noch für jeden der Coefficienten $B'$, $C'$ drei verschiedene Werthe finden.



Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} A'' &= \frac{OR.OR' + OR.OR'' + OR'.OR''}{3}, \\ B'' &= \frac{(OR.OR' + OR.OR'' + OR'.OR'')}{3OQ.OQ'.OQ''}.OR.OR'.OR'' \\ C'' &= \frac{(OR.OR' + OR.OR'' + OR'.OR'')}{3OP.OP'.OP''}.OR.OR'.OR'' \end{aligned}\right\} 3)$$

## §. 4.

Um geometrische Ausdrücke für die vier noch unbestimmten Coefficienten $F$, $E'$, $D$, $F'$ zu erhalten, kehren wir zu der Gleichung §. 1. 2. zurück, und setzen in jene nacheinander $x'$, $y'$; $x'$, $y''$; $x''$, $y'$; $x''$, $y''$; bezeichnen alsdann die Wurzeln der resultirenden Gleichungen respective mit $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$; $z''_1$, $z''_2$, $z''_3$; $z'''_1$, $z'''_2$, $z'''_3$; $z^{IV}_1$, $z^{IV}_2$, $z^{IV}_3$; so haben wir zufolge der Eigenschaften der cubischen Gleichungen:

$$z'_1z'_2 + z'_1z'_3 + z'_2z'_3 = 3(Ey'^2 + Fx'y' + Gx'^2 + F'y' + E'x' + A'') \ldots\ldots 1)$$

$$z''_1z''_2 + z''_1z''_3 + z''_2z''_3 = 3(Ey''^2 + Fx'y'' + Gx'^2 + F'y'' + E'x' + A') \ldots\ldots 2)$$

$$z'''_1z'''_2 + z'''_1z'''_3 + z'''_2z'''_3 = 3(Ey'^2 + Fx''y' + Gx''^2 + F'y' + E'x'' + A') \ldots\ldots 3)$$

$$z^{IV}_1z^{IV}_2 + z^{IV}_1z^{IV}_3 + z^{IV}_2z^{IV}_3 = 3(Ey''^2 + Fx''y'' + Gx''^2 + F'y'' + E'x'' + A') \ldots\ldots 4)$$

Subtrahiren wir die erste von der zweiten, und dividiren den Rest durch $y'' - y'$, so ist

Digitized by Google

$$\frac{z''_1z''_2 - z'_1z'_2 + z''_1z''_3 - z'_1z'_3 + z''_2z''_3 - z'_2z'_3}{3(y'' - y')} = E(y'' + y') + Fx' + F \ldots\ldots 5)$$

Aus der Subtraction der 3ten von der 4ten Gleichung folgt:

$$\frac{z^{IV}{}_1z^{IV}{}_2 - z'''_1z'''_2 + z^{IV}{}_1z^{IV}{}_3 - z'''_1z'''_3 + z^{IV}{}_2z^{IV}{}_3 - z'''_2z'''_3}{3(y'' - y')} = E(y'' + y') + Fx'' + F' \ldots\ldots 6)$$

Ziehen wir endlich die Gleichung 5) von der Gleichung 6) ab, so ist:

$$F = \frac{z^{IV}{}_1z^{IV}{}_2 - z'''_1z'''_2 - z''_1z''_2 + z'_1z'_2 + z^{IV}{}_1z^{IV}{}_3 - z'''_1z'''_3 - z''_1z''_3 + z'_1z'_3 + z^{IV}{}_2z^{IV}{}_3 - z'''_2z'''_3 - z''_2z''_3 + z'_2z'_3}{3(y'' - y')\,(x'' - x')} \ldots\ldots 7)$$

Digitized by Google

Es sind aber nach unserer in §. 1. angenommenen Bezeichnung $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$; $M''_1$, $M''_2$, $M''_3$; $M'''_1$, $M'''_2$, $M'''_3$; $M^{IV}_1$, $M^{IV}_2$, $M^{IV}_3$ die Durchschnittspunkte der Fläche $F$ und der mit der Achse der $z$ parallelen Linien $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$, $P^{IV}L^{IV}$, so dass also $z'_1 = P'M'_1$, $z'_2 = P'M'_2$ u. s. w. . . . . .

Durch die Einführung dieser Linien in die letzte Gleichung wird:

$$F = \frac{\left\{\begin{array}{l} P^{IV}M^{IV}_1 . P^{IV}M^{IV}_2 - P'''M'''_1 . P'''M'''_2 - P''M''_1 . P''M''_2 + P'M'_1 . P'M'_2 \\ + P^{IV}M^{IV}_1 . P^{IV}M^{IV}_3 - P'''M'''_1 . P'''M'''_3 - P''M''_1 . P''M''_3 + P'M'_1 . P'M'_3 \\ + P^{IV}M^{IV}_2 . P^{IV}M^{IV}_3 - P'''M'''_2 . P'''M'''_3 - P''M''_2 . P''M''_3 + P'M'_2 . P'M'_3 \end{array}\right\}}{3P'P' . P''P}$$

Construiren wir, um diesen Ausdruck kürzer darzustellen, zwischen $P^{IV}M^{IV}_1$ und $P^{IV}M^{IV}_2$, $P'''M'''_1$ und $P'''M'''_2$, $P''M''_1$ und $P''M''_2$, $P'M'_1$ und $P'M'_2$, $P^{IV}M^{IV}_1$ und $P^{IV}M^{IV}_3$, u. s. w. . . . . $P'M'_2$ und $P'M'_3$ die mittleren Proportionalen $S^{IV}_1 T^{IV}_2$, $S'''_1 T'''_2$, $S''_1 T''_2$, $S'_1 T'_2$, $S^{IV}_1 T^{IV}_3$, $S'''_1 T'''_3$, $S''_1 T''_3$, $S'_1 T'_3$, $S^{IV}_2 T^{IV}_3$, $S'''_2 T'''_3$, $S''_2 T''_3$, $S'_2 T'_3$; bilden alsdann aus $S^{IV}_1 T^{IV}_2$ und $S'_1 T'_2$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $s^{IV}_1 s'_2$ sein soll, ebenso bezeichnen wir:

die Hypotenuse d. rechtw. Dreiecks aus $S'''_1 T'''_2$ u. $S''_1 T''_2$ mit $s'''_1 s''_2$,

– – – – – – $S^{IV}_1 T^{IV}_2 - S'_1 T'_3 = s^{IV}_1 s'_3$,

– – – – – – $S'''_1 T'''_2 - S''_1 T''_3 = s'''_1 s''_3$,

– – – – – – $S^{IV}_2 T^{IV}_3 - S'_2 T'_3 = s^{IV}_2 s'_3$,

– – – – – – $S'''_2 T'''_3 - S''_2 T''_3 = s'''_2 s''_3$.

Führen wir diese Hypotenusen in den obigen Werth von $F$ ein, so erhalten wir:

$$F = \frac{(s^{IV}_1 s'_2)^2 + (s^{IV}_1 s'_3)^2 + (s^{IV}_2 s'_3)^2 - \{(s'''_1 s''_2)^2 + (s'''_1 s''_3)^2 + (s'''_2 s''_3)^2\}}{3P'P' . P''P} \quad 8)$$

Wir erkennen aber hierin, dass die Summe der drei ersten Quadrate der Diagonale $s^{IV}_1 s^{IV}_2$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds $s^{IV}_1 s'_1 s'_2 s^{IV}_2$, dessen Kanten $s^{IV}_1 s'_2$, $s^{IV}_1 s'_3$, $s^{IV}_2 s'_3$ sind, gleich ist, und ebenso ist die Summe der drei andern Quadrate dem Quadrate der Diagonale $s'''_1 s'''_2$ eines andern rechtwinkligen Parallelepipeds $s'''_1 s''_1 s''_2 s'''_2$ gleich, dessen Kanten $s'''_1 s''_1$, $s'''_1 s''_2$, $s'''_2 s''_2$ sind, und es wird daher der letzte Ausdruck zu:

$$F = \frac{(s^{IV}_1 s^{IV}_2)^2 - (s'''_1 s'''_2)^2}{3P'P' . P''P} \text{ oder } F = \frac{(s^{IV}_1 s'''_1)^2}{3P'P' . P''P} \quad \ldots\ldots 9)$$

wo $s^{IV}_1 s'''_1$ die zweite Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet, dessen Hypotenuse $s^{IV}_1 s^{IV}_2$, und dessen erste Cathete $s'''_1 s''_2$ ist. Mittelst dieses Werthes von $F$, und des in §. 2. 6) gefundenen Werths von $E$ erhalten wir aus der Gleichung 5), wenn wir die oben angegebenen Bezeichnungen und Hülfsconstructionen gebrauchen:

Digitized by Google

$$F' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(S''_1 T''_2)^2 + (S''_1 T''_3)^2 + (S''_2 T''_2)^2 - \{(S'_1 T'')^2 + (S'_1 T''_3)^2 + (S'_1 T''_2)^2\}}{3P''P'} \\ + \dfrac{\{m'''_1 n'''_1 + m'''_2 n'''_2 + m'''_3 n'''_3\}(K'P'' + K'P')OR \,.\, OR' \,.\, OR''}{3p'''p' \,.\, OQ \,.\, OQ' \,.\, OQ''} \\ - \dfrac{(s^{IV}_1 s'''_1)^2 \,.\, OK}{3P''P' \,.\, P'''P'} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots 10)$$

Auch in diesem Ausdrucke kann das erste Glied des zweiten Theils, wie in 8., einfacher dargestellt werden. Subtrahiren wir 2. von 4. und dividiren den Rest mit $3(x'' - x')$, so ist:

$$E' + G(x'' + x') + Fy'' = \frac{z^{IV}_1 z^{IV}_2 + z^{IV}_1 z^{IV}_3 + z^{IV}_2 z^{IV}_3 - \{z''_1 z''_2 + z''_1 z''_3 + z''_2 z''_3\}}{3(x'' - x')}.$$

Substituiren wir hierin den vorhin gefundenen Werth von $F$, und den in §. 2. 8. angegebenen Werth von $G$, und gebrauchen die im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Bezeichnungen, so erhalten wir wie in 10.

Digitized by Google

$$E' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(S^{IV}{}_1 T^{IV}{}_2)^2 + (S^{IV}{}_1 T^{IV}{}_3)^2 + (S^{IV}{}_2 T^{IV}{}_3)^2 - \{(S''{}_1 T''{}_2)^2 + (S''{}_1 T''{}_3)^2 + (S''{}_2 T''{}_3)^2\}}{3P'P'} \\ + \dfrac{\{\mu'''{}_1 \nu'''{}_1 + \mu'''{}_2 \nu'''{}_2 + \mu'''{}_3 \nu'''{}_3\}\,(OK' + OK'')OR \,.\, OR' \,.\, OR''}{3\pi'\pi' \,.\, OP \,.\, OP' \,.\, OP''} \\ - \dfrac{(s^{IV}{}_1 s'''{}_1)^2 \,.\, K'P''}{3P'P' \,.\, P'''P'} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots 11)$$

Um endlich den Coefficienten $D'$ zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung §. 1. 3. nach einander $x'$, $z'$; $x''$, $z'$ statt $x$ und $z$; so folgt wie oben, dass, wenn wir mit $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$; $y''_1$, $y''_2$, $y''_3$ die Wurzeln der resultirenden Gleichungen bezeichnen:

$$y'_1 y'_2 + y'_1 y'_3 + y'_2 y'_3 = 3\left\{\frac{A}{B}z'^2 + \frac{F}{B}x'z' + \frac{L}{B}x'^2 \quad \frac{F'}{B}z' + \frac{D'}{B}x' + \frac{B''}{B}\right\} \quad 12)$$

$$y''_1 y''_2 + y''_1 y''_3 + y''_2 y''_3 = 3\left\{\frac{A}{B}z'^2 + \frac{F}{B}x''z' + \frac{L}{B}x''^2 + \frac{F'}{B}z' + \frac{D'}{B}x'' + \frac{B''}{B}\right\} \quad 13)$$

Diese Gleichungen von einander subtrahirt, und den Rest mit $3(x'' - x')$ dividirt, geben:

Digitized by Google

$$\frac{D'}{B}+\frac{L}{B}(x''+x')+\frac{F}{B}z'=\frac{y''_1y''_2+y''_1y''_3+y''_2y''_3-\{y'_1y'_2+y'_1y'_3+y'_2y'^2\}}{3(x''-x')}.$$

Aus dieser Gleichung finden wir durch Einführung der Werthe von $y'_1$, $y'_2$, u. s. w., ferner von $B$, $L$ und $F$, folgenden Werth von $D'$:

$$D'=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''}\cdot\dfrac{p''m''_1.p''m''_2+p''m''_1.p''m''_3+p''m''_2.p''m''_3-(p'm'_1.p'm'_2+p'm'_1.p'm'_3+p'm'_2.p'm'_3)}{3p''p'}\\ -\dfrac{(s^{IV}_1s_1''')^2.P'M'_1}{3P''P'.P''P'}-\dfrac{(\mu''_1\nu''_1+\mu''_2\nu''_2+\mu''_3\nu''_3)(OK''+OK').OR.OR'.OR''}{3\pi''\pi'.OP.OP'.OP''}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots 14)$$

Da die Coefficienten $B, C, A, D, E, F, G, K, L$ ihre Werthe unverändert beibehalten, wohin wir auch das Coordinatensystem parallel mit sich selbst verrücken, so können wir ähnliche Eigenschaften der Transversalen in Beziehung auf die Flächen des dritten Grades herleiten, wie wir es in I. §. 5. bei den Flächen des zweiten Grades gethan haben; da aber die Herleitung ganz die gleiche ist, wie a. a. O., so brechen wir hier diese Untersuchungen ab, bis wir an einem andern Orte diesen Gegenstand ausführlicher behandeln.

# XLVII.

## Ueber Bernoullische Zahlen und die Coefficienten der Sekantenreihen.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Die folgenden Entwickelungen beruhen auf zwei wichtigen bestimmten Integralen, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1} \sin x\,\Theta\, d\Theta = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \quad (2)$$

die sich im Zusammenhange mit der Lehre von den bestimmten Integralen nebst einer Menge ähnlicher leicht entwickeln lassen, die man aber auch mittelst der beiden Formeln von Fourier

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \eta\Theta d\eta \int_0^\infty \varphi(\Theta)\cos x\Theta d\Theta$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \eta\Theta d\eta \int_0^\infty \varphi(\Theta)\sin x\Theta d\Theta$$

leicht verificiren kann, indem man im ersten Fall $\varphi(\Theta) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}$ und im zweiten $\varphi(\Theta) = \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}$ setzt. Durch die erste Integration, welche man nach (1) und (2) ausführt, gelangt man zu einem Ausdrucke, der wieder ganz ähnlich aussieht und sich auf gleiche Weise

Digitized by Google

integriren lässt, so dass man zuletzt ein identisches Resultat bekommt, wie diess der Fall sein muss, wenn die Integrale (1) und (2) richtig sein sollen.

Multipliciren wir (1) mit (2), so wird auf der rechten Seite

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})} = \frac{1}{\cos\sqrt{-1}x} = \sec\sqrt{-1}x.$$

Nun giebt aber die Division $\frac{1}{\cos x}$, wenn man für $\cos x$ die bekannte, nach Potenzen von $x$ geordnete Reihe setzt, eine neue Reihe von der Form

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

wo $B_0$, $B_2$, $B_4$, ... gewisse Zahlen sind, die eine interessante Analogie zu den Bernoullischen Zahlen $B_1$, $B_3$, $B_5$, ... besitzen, welche letztere bekanntlich in der Cosecantenreihe eine wichtige Rolle spielen.

Schreiben wir $\sqrt{-1}x$ für $x$, so wird

$$\sec\sqrt{-1}x = B_0 - \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 - \ldots$$

also, wenn wir diese Reihe substituiren

$$2\int_0^\infty \frac{\cos x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = B_0 - \frac{B_2}{1.2}x^2 + \ldots$$

Den Nenner des Integrals wollen wir kurz mit $N$ bezeichnen, und $\cos x\Theta$ in die bekannte Reihe entwickeln, wobei wir die Potenzen von $x$, welches in Bezug auf die Integration Constante ist, vor das Integralzeichen setzen können. Wir erhalten dann

$$2\left[\int_0^\infty \frac{d\Theta}{N} - \frac{x^2}{1.2}\int_0^\infty \frac{\Theta^2 d\Theta}{N} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\int_0^\infty \frac{\Theta^4 d\Theta}{N} - \ldots\right]$$

$$= B_0 - \frac{x^2}{1.2}B_2 + \frac{x^4}{1.2.3.4}B_4 - \ldots,$$

also durch Vergleichung beider Reihen

$$2\int_0^\infty \frac{d\Theta}{N} = B_0,\ 2\int_0^\infty \frac{\Theta^2 d\Theta}{N} = B_2, \ldots.$$

oder allgemein $2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n} d\Theta}{N} = B_{2n}$, d. i., wenn wir den Werth von $N$ wieder einsetzen,

$$2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n} d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = B_{2n}. \quad (3)$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhalten wir aus (2) ein bestimmtes Integral, welches die $(2n-1)$te Bernoullische Zahl ausdrückt.

Multipliciren wir nämlich beide Seiten von (2) mit $\sqrt{-1}$, so wird rechts

$$\sqrt{-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{1\ \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}{2\sqrt{-1}(e^x-e^{-x})} = \frac{\cos\sqrt{-1}x}{-\sin\sqrt{-1}x} = -\cot\sqrt{-1}x;$$

also

Digitized by Google

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}\sin x\Theta d\Theta = -\cot\sqrt{-1}x.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1} = M$ und geben vermöge der Relation $\operatorname{tang} z = \cot z - 2\cot 2z$ zur Tangente über, so ist

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty M(2\sin 2x\Theta - \sin x\Theta)d\Theta = \operatorname{tang}\sqrt{-1}x.$$

Entwickeln wir nun $\operatorname{tang}\sqrt{-1}x$ in die bekannte Reihe, welche die Bernoullischen Zahlen involvirt, und ebenso $\sin 2x\Theta$, $\sin x\Theta$ in die nach Potenzen von $x\Theta$ fortschreitenden Reihen, so haben wir

$$\sqrt{-1}\left\{\frac{2^2-1}{1}x\int_0^\infty M d\Theta - \frac{2^4-1}{1.2.3}x^3\int_0^\infty M\Theta^3 d\Theta + \frac{2^6-1}{1\ldots5}x^5\int_0^\infty M\Theta^5 d\Theta - \ldots\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left\{\frac{2^2-1}{1}x\cdot\frac{2^2}{2}B_1 - \frac{2^4-1}{1.2.3}x^3\cdot\frac{2^4}{4}B_3 + \frac{2^6-1}{1\ldots5}x^5\cdot\frac{2^6}{6}B_5 - \ldots\right\}$$

und vergleichen wir beide Reihen, Glied für Glied, so entstehen die Relationen

$$\int_0^\infty M d\Theta = \frac{2^2}{2}B_1,\ \int_0^\infty M\Theta^3 d\Theta = \frac{2^4}{4}B_3,\ \ldots,\ \int_0^\infty M\Theta^{2n-1}d\Theta = \frac{2^{2n}}{2n}B_{2n-1},$$

oder, wenn wir für $M$ seinen Werth schreiben,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}\Theta^{2n-1}d\Theta = \frac{2^{2n-1}}{n}B_{2n-1}\ .\ (4).$$

Die Ausdrücke (3) und (4) sind zwar schon an sich bemerkenswerth, in so fern sie jeden der interessanten Coefficienten $B_{2n}$, $B_{2n-1}$ durch ein bestimmtes Integral, also in geschlossener Form darstellen; interessanter aber ist folgende Entwickelung, durch welche man zu einer Relation zwischen $B_{2n}$ und $B_{2n-1}$ selbst gelangt.

Wir setzen in (1) $\sqrt{-1}x$ für $x$, multipliciren beide Seiten mit $2\sin x$, und haben so

$$\int_0^\infty \frac{2\sin x\cdot\cos\sqrt{-1}x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{2\sin x}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}} = \operatorname{tang} x.$$

Zerlegen wir ferner das Produkt $2\sin x\cdot\cos\sqrt{-1}x\Theta$ in die Summe $\sin(1+\sqrt{-1}\Theta)x + \sin(1-\sqrt{-1}\Theta)x$, entwickeln dann beide Ausdrücke, links die beiden Sinus und rechts die Tangente, in Reihen, so sind deren $(2n-1)$te allgemeinen Glieder

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+\sqrt{-1}\Theta)^{2n-1}+(1-\sqrt{-1}\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta$$

$$= \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots.(2n-1)}\cdot\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1},$$

Digitized by Google

oder, wenn wir den Nenner unter dem Integralzeichen wieder mit $N$ bezeichnen

$$\int_0^\infty \frac{(1+\sqrt{-1}\,\Theta)^{2n-1}+(1-\sqrt{-1}\,\Theta)^{2n-1}}{N}\,d\Theta = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} \quad (5)$$

Entwickeln wir nun die Potenzen $(1 \pm \sqrt{-1}\,\Theta)^{2n-1}$ nach dem Binomialtheorem, wobei wir die Binomialcoefficienten mit $\overline{(2n-1)_0}$, $\overline{(2n-1)_1}$, .... bezeichnen, so ist unser Integral

$$= 2\int_0^\infty \frac{1-\overline{(2n-1)_2}\Theta^2+\overline{(2n-1)_4}\Theta^4-\ldots\pm\overline{(2n-1)_{2n-2}}\Theta^{2n-2}}{N}\,d\Theta$$

oder

$$= 2\int_0^\infty \frac{d\Theta}{N} - \overline{(2n-1)_2}\cdot 2\int_0^\infty \frac{\Theta^2 d\Theta}{N}+\ldots\pm\overline{(2n-1)_{2n-2}}\,2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-2}d\Theta}{N}.$$

Aber jedes dieser Integrale lässt sich nach (3) ausführen; und wir erhalten mit Rücksicht auf (5)

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,2^{2n-1}(2^{2n}-1)\,B_{2n-1} = \overline{(2n-1)_0}B_0 - \overline{(2n-1)_2}B_2 + \overline{(2n-1)_4}B_4 - \ldots \pm \overline{(2n-1)_{2n-2}}B_{2n-2}\,. \quad (6)$$

eine sehr einfache Relation zwischen den auf einander folgenden Sekantencoefficienten, einer Bernoullischen Zahl und den Binomialcoefficienten ihres Index.

Dieses Resultat lässt sich noch anders schreiben.

Wenn man nämlich die Sekantenreihe

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{B_{2n}x^{2n}}{1\ldots 2n} + \ldots$$

$2n$ mal differenziirt, so ist

$$\frac{d^{2n}\sec x}{dx^{2n}} = B_{2n} + \ldots\ldots$$

wobei die nachfolgenden Glieder noch $x$ enthalten. Also für $x=0$

$$\frac{d^{2n}\sec x}{dx^{2n}} = B_{2n};\quad x=0.$$

Ebenso erhält man aus der Tangentenreihe

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_3 x^3 + \ldots. + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1.2\ldots 2n}B_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots$$

durch $(2n-1)$malige Differenziation und für $x=0$

$$\frac{d^{2n-1}\operatorname{tang} x}{dx^{2n-1}} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1},\quad x=0.$$

Führen wir diese Werthe in (6) ein, so ist

$$(-1)^{n+1}\frac{d^{2n-1}\operatorname{tang} x}{dx^{2n-1}} = 1 - \overline{(2n-1)_2}\frac{d^2\sec x}{dx^2} + \overline{(2n-1)_4}\frac{d^4\sec x}{dx^4} - \ldots \quad (7)$$

$$x=0.$$

Digitized by Google

# XLVIII.

## Ueber Cauchy's neueste Untersuchungen über die Entwickelung der gesonderten Functionen mit einer veränderlichen Grösse in nach den positiven ganzen Potenzen dieser veränderlichen Grösse fortschreitende convergirende Reihen *).

Nach den Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence von Cauchy in dessen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. 9e Livraison. Paris. 1840, frei bearbeitet und mit erläuternden Zusätzen vermehrt

von

dem Herausgeber.

---

### §. 1.

Erklärung. Von der Grösse $X + Y\sqrt{-1}$, wo $X$ und $Y$ reelle unabhängige oder abhängige veränderliche Grössen bezeichnen sollen, sagt man, dass sie einen endlichen völlig bestimmten Werth habe, wenn die Grössen $X$ und $Y$ beide endliche völlig bestimmte Werthe haben.

Der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der einen endlichen völlig bestimmten Werth habenden Grösse $X + Y\sqrt{-1}$, wo $X$ und $Y$ reelle unabhängige oder abhängige veränderliche Grössen bezeichnen sollen, heissen solche Veränderungen dieser Grösse, welche der Null unendlich nahe kommenden Veränderungen der reellen Grössen $X$ und $Y$ entsprechen oder durch solche Veränderungen dieser Grössen herbeigeführt werden.

Eine Function $f(x)$ einer beliebigen reellen oder imaginären Grösse $x$ heisst für einen gewissen endlichen völlig bestimmten Werth, oder in der Nähe eines gewissen endlichen völlig bestimmten Werths dieser veränderlichen Grösse stetig, wenn diesem endlichen völlig bestimmten Werthe der veränderlichen Grösse $x$ ein endlicher völlig bestimmter Werth

*) Unter gesonderten Functionen werden hier die sonst sogenannten functiones explicitae verstanden; da diese Functionen wirklich von ihren veränderlichen Grössen gesondert sind, so scheint der hier gebrauchte Ausdruck nicht unpassend zu sein.

Digitized by Google

der Function $f(x)$ entspricht, und wenn durch der Null unendlich nahe kommende Veränderungen des in Rede stehenden endlichen völlig bestimmten Werths von $x$ der Null unendlich nahe kommende Veränderungen des diesem endlichen völlig bestimmten Werthe von $x$ entsprechenden Werths der Function $f(x)$ herbeigeführt werden. Sind dagegen diese Bedingungen nicht vollständig erfüllt, so sagt man, dass für den in Rede stehenden endlichen völlig bestimmten Werth der veränderlichen Grösse $x$ eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt findet.

Wenn für keinen reellen Werth von $x$, welcher eine Mittelgrösse zwischen den beiden reellen Werthen $a$ und $b$ von $x$ ist, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, so sagt man, dass diese Function zwischen den Gränzen $a$ und $b$ oder von $a$ bis $b$ stetig sei.

Die Function $f(x)$ heisst ferner zwischen den reellen Werthen $r$ und $R$ des Modulus ihrer veränderlichen Grösse $x$ als dessen Gränzen stetig, wenn für keinen Werth der veränderlichen Grösse $x$, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen $r$ und $R$ *) ist, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, oder, was dasselbe ist, wenn für jeden Werth oder in der Nähe jedes Werths der veränderlichen Grösse $x$, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen $r$ und $R$ ist, die Function $f(x)$ stetig ist.

## §. 2.

*Lehrsatz.* Wenn die Function $y = f(x)$ für einen bestimmten reellen Werth ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse, welcher der Einfachheit wegen durch $x$ selbst bezeichnet werden mag, reell und stetig, und der entsprechende Werth $f'(x)$ des ersten Differentialquotienten dieser Function eine endliche völlig bestimmte reelle, aber nicht verschwindende Grösse ist; so wird, indem man die unabhängige veränderliche Grösse von dem bestimmten reellen Werthe $x$ an sich reell und stetig verändern lässt:

1. wenn $f'(x)$ positiv ist, die gegebene Function von dem Werthe $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem reellen Werthe $x$ an respective zu- oder abnimmt; dagegen wird

2. wenn $f'(x)$ negativ ist, die gegebene Function von dem Werthe $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem reellen Werthe $x$ an respective ab- oder zunimmt.

Beweis. Die der beliebigen Aenderung $\Delta x$ von $x$ entsprechende Aenderung von $f(x)$ sei $\Delta y$. Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist $f'(x)$ die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man sich $\Delta x$ bis

*) Ueber den allgemeinen Begriff einer Mittelgrösse zwischen zwei anderen Grössen s. m. die Abhandlung XL. §. 33. im dritten Hefte, so wie denn die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze, wie wir sehen werden, überhaupt eine Hauptgrundlage der gegenwärtigen Untersuchungen über die Reihen bilden.

Digitized by Google

zu jedem beliebigen Grade der Null nähern lässt. Für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$ hat also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit $f'(x)$ offenbar einerlei Vorzeichen. Ist folglich $f'(x)$ positiv, so ist, immer für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$, auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv, und $\Delta x$ und $\Delta y$ haben folglich gleiche Vorzeichen, d. h. die unabhängige veränderliche Grösse und die Function nehmen respective von den Werthen $x$ und $f(x)$ an gleichzeitig zu und ab, wie behauptet wurde. Ist dagegen $f'(x)$ negativ, so ist für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$ auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ, und $\Delta x$ und $\Delta y$ haben folglich entgegensetzte Vorzeichen, d. h. die Function nimmt von dem Werthe $f(x)$ an ab oder zu, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem Werthe $x$ an respective zu- oder abnimmt, welches der zweite Theil der Behauptung war.

§. 3.

*Erster Zusatz.* Wenn sowohl die Function $f(x)$, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen $a$ und $b$ reell und stetig ist, und letzterer sein Zeichen niemals ändert, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt; so wird die Function $f(x)$ entweder stets wachsen oder stets abnehmen, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt.

Wenn $f'(x)$ in dem Intervalle $ab$ niemals verschwindet, so folgt der Satz unmittelbar aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze. Wenn aber $f'(x)$ z. B. für den zwischen $a$ und $b$ liegenden Werth $c$ von $x$ verschwindet, so dass $f'(c) = 0$ ist, so denke man sich das Intervall $ab$ in die beiden Intervalle $ac$ und $cb$ getheilt; dann wird $f(x)$ nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl in dem Intervalle $ac$, als auch in dem Intervalle $cb$, und folglich auch in dem ganzen Intervalle $ab$ entweder stets wachsen oder stets abnehmen, wobei man nur immer festzuhalten hat, dass nach der Voraussetzung die Function $f(x)$ zwischen den Gränzen $a$ und $b$ reell und stetig ist. Dass man ganz auf ähnliche Art schliessen könnte, wenn $f'(x)$ für mehrere zwischen $a$ und $b$ liegende Werthe von $x$ verschwände, fällt sogleich in die Augen.

§. 4.

*Zweiter Zusatz.* Wenn sowohl die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, als auch die Functionen $\mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{f}'(x)$, zwischen den reellen Gränzen $a$ und $b$ reell und stetig sind, und $f'(x)$ $\mathfrak{f}(x)$ ihre Zeichen niemals ändern, aber immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt, so dass nämlich, wenn $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets positiv oder stets negativ ist, $\mathfrak{f}'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ respective stets negativ oder stets positiv ist; so wird immer die eine der beiden Functionen $f(x)$, $\mathfrak{f}(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets wachsen, die andere dagegen von $x = a$ bis $x = b$ stets abnehmen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem ersten Zusatze und aus dem in §. 2. bewiesenen Satze.

Digitized by Google

## §. 5.

*Lehrsatz.* Wenn sowohl die Functionen $f(x)$, $\mathfrak{F}(x)$, als auch ihre ersten Differentialquotienten zwischen den reellen Gränzen $a$ und $b$ reell und stetig sind, und der Differentialquotient $\mathfrak{F}'(x)$ sein Zeichen nicht ändert, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt; so ist der Bruch

$$\frac{f(b) - f(a)}{\mathfrak{F}(b) - \mathfrak{F}(a)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten Werthe $A$ und $B$ unter allen den Werthen, welche die Function

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt, oder es ist jederzeit

$$\frac{f(b) - f(a)}{\mathfrak{F}(b) - \mathfrak{F}(a)} = M(A, B)\ ^{*}).$$

Erster Beweis. Weil $A$ und $B$ der kleinste und grösste unter allen den Werthen sind, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt, so haben die Grössen

$$\mathfrak{F}'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)} - A\right\},\ \mathfrak{F}'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)} - B\right\},$$

d. i. die Grössen

$$f'(x) - A\mathfrak{F}'(x),\ f'(x) - B\mathfrak{F}'(x),$$

für jedes $x$ von $x = a$ bis $x = b$ offenbar entgegengesetzte Vorzeichen, und keine dieser Grössen ändert ihr Zeichen, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt. Diese beiden Grössen sind aber die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x) - A\mathfrak{F}(x),\ f(x) - B\mathfrak{F}(x).$$

Also wird nach dem vorigen Paragraphen jederzeit die eine dieser beiden Functionen stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt. Daher haben offenbar die beiden Differenzen

$$f(b) - A\mathfrak{F}(b) - \{f(a) - A\mathfrak{F}(a)\},\ f(b) - B\mathfrak{F}(b) - \{f(a) - B\mathfrak{F}(a)\},$$

oder

$$f(b) - f(a) - A\{\mathfrak{F}(b) - \mathfrak{F}(a)\},\ f(b) - f(a) - B\{\mathfrak{F}(b) - \mathfrak{F}(a)\},$$

und folglich natürlich auch die beiden Quotienten

---

*) Wegen der Bezeichnung $M(A, B)$ s. m. den Aufsatz XL. §. 33.

Digitized by Google

$$\frac{f(b)-f(a)-A\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\}}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},\ \frac{f(b)-f(a)-B\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\}}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},$$

d. i.

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-A,\ \frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B,$$

jederzeit entgegengesetzte, also die beiden Grössen

$$A-\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},\ \frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass immer

$$\left\{A-\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}\right\}\left\{\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B\right\}\gtreqless 0,$$

folglich nach XL. §. 36. jederzeit

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

eine Mittelgrösse zwischen $A$ und $B$, oder

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=M(A,\ B)$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

Zweiter Beweis. Man theile die Differenz $b-a$ in $n$ gleiche Theile und setze

$$\frac{b-a}{n}=k,\ \text{also}\ b=a+nk;$$

so ist in der aus der Differenzenrechnung bekannten Bezeichnung

$$f(a+k)-f(a)=\Delta f(a),$$
$$f(a+2k)-f(a+k)=\Delta f(a+k),$$
$$f(a+3k)-f(a+2k)=\Delta f(a+2k),$$

u. s. w.

$$f(a+nk)-f[a+(n-1)k]=\Delta f(a+(n-1)k)$$

und

$$\mathfrak{F}(a+k)-\mathfrak{F}(a)=\Delta\mathfrak{F}(a),$$
$$\mathfrak{F}(a+2k)-\mathfrak{F}(a+k)=\Delta\mathfrak{F}(a+k),$$
$$\mathfrak{F}(a+3k)-\mathfrak{F}(a+2k)=\Delta\mathfrak{F}(a+2k),$$

u. s. w.

$$\mathfrak{F}(a+nk)-\mathfrak{F}(a+(n-1)k)=\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k).$$

Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen und setzt $a+nk=b$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$f(b)-f(a)=\Delta f(a)+\Delta f(a+k)+\Delta f(a+2k)+\ldots+\Delta f(a+(n-1)k),$$
$$\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)=\Delta\mathfrak{F}(a)+\Delta\mathfrak{F}(a+k)+\Delta\mathfrak{F}(a+2k)+\ldots+\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k);$$

und folglich

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{\frac{\Delta f(a)}{k}+\frac{\Delta f(a+k)}{k}+\frac{\Delta f(a+2k)}{k}+\ldots+\frac{\Delta f(a+(n-1)k)}{k}}{\frac{\Delta\mathfrak{F}(a)}{k}+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+k)}{k}+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+2k)}{k}+\ldots+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k)}{k}}.$$

Digitized by Google

Die Gränzen, denen sich der Zähler und der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nähern, wenn $n$ in's Unendliche wächst, $k$ sich also der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, sind offenbar die Summen aller der Werthe, welche die Differentialquotienten $f'x$ und $\mathfrak{F}'(x)$ erhalten, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt. Da nun die vorstehende Gleichung für jedes positive ganze $n$ gilt, so ist, wenn wir die in Rede stehenden Summen respective durch

$$\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x), \Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)$$

bezeichnen, offenbar auch

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)} = \frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'x}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung die sämmtlichen einzelnen Theile, aus denen die Summe

$$\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)$$

besteht, gleiche Vorzeichen haben, so ist nach XI.. §. 42.

$$\frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x)}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen allen den Werthen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man $x$ sich von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt, folglich auch eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten Werthe $A$ und $B$ unter allen diesen Werthen des obigen Bruchs, und man kann also

$$\frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x)}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)} = M(A, B),$$

folglich nach dem Obigen auch

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)} = M(A, B)$$

setzen, wie bewiesen werden sollte.

§. 6.

Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Lehrsatze ist

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten unter den Werthen, welche



Digitized by Google

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Unter der Voraussetzung nun, dass

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

eine zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ stetige Function ist, ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar und ganz unzweideutig, dass die Grösse

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

jederzeit unter den Werthen, welche

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, vorkommen, oder dass jederzeit einer dieser Werthe der Grösse

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

gleich sein muss, so dass also immer, wenn $\mu$ eine gewisse Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$ bezeichnet,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{f'(\mu)}{\mathfrak{F}'(\mu)}$$

gesetzt werden kann. Setzen wir nun, was offenbar in allen Fällen verstattet ist,

$$\mu=a+\Theta(b-a);$$

so ist, weil nach der Voraussetzung $\mu$ eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $b$ ist,

$$a+\Theta(b-a)=M(a,\ b),$$

und folglich nach XL. §. 38., wenn man nämlich von der Grösse auf der linken Seite, und von den beiden Grössen zwischen den Parenthesen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Grösse $a$ subtrahirt,

$$\Theta(b-a)=M(0,\ b-a),$$

also nach XL. §. 37., wenn man nämlich die Grösse auf der linken Seite und jede der beiden Grössen zwischen den Parenthesen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch $b-a$ dividirt,

$$\Theta=M(0,\ 1),$$

woraus sich also ergiebt, dass $\Theta$ immer eine Mittelgrösse zwischen 0 und 1, d. h. eine positive die Einheit nicht übersteigende Grösse ist. Hieraus und aus dem Obigen ergiebt sich, dass immer

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{f'(a+\Theta(b-a))}{\mathfrak{F}'(a+\Theta(b-a))},$$

wo $\Theta$ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, gesetzt werden kann, wenn man alle im Obigen gemachte Voraussetzungen als erfüllt anzunehmen berechtigt ist.

Digitized by Google

Setzen wir jetzt $\mathfrak{F}(x)=x$, also $\mathfrak{F}'(x)=1$, und nehmen an, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen $a$ und $b$ reell und stetig sind, so sind, weil $\mathfrak{F}'(x)$ als eine constante Grösse sein Zeichen nicht ändert, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, und

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}=f'(x)$$

ist, offenbar alle im Obigen gemachte Voraussetzungen erfüllt, und es ist folglich, wenn $\Theta$ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a+\Theta(b-a)),$$

oder

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\Theta(b-a)),$$

oder

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\Theta(b-a)).$$

Für $b=x$ ist unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$, $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen $a$ und $x$ reell und stetig sind,

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a+\Theta(x-a)).$$

Für $a=0$ ist unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen 0 und $x$ reell und stetig sind,

$$f(x)=f(0)+xf'(\Theta x).$$

Setzen wir in der Gleichung

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a+\Theta(x-a))$$

für $a$ und $x$ respective $x$ und $x+i$, so erhalten wir, unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen $x$ und $x+i$ reell und stetig sind, die Gleichung

$$f(x+i)=f(x)+if'(x+\Theta i).$$

In allen diesen Gleichungen bezeichnet $\Theta$ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse.

## §. 7.

Es sei jetzt

$$y=f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}=\Phi(x)+i\Psi(x)\sqrt{-1},$$

wo, indem wir uns für $x$ irgend einen bestimmten reellen Werth gesetzt denken, sowohl $\varphi(x)$, $\psi(x)$, als auch $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ reelle Grössen sein sollen.

Weil nun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}$$

ist, und offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}\cdot\frac{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta x}$$



Digitized by Google

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}\right\}$$

gesetzt werden kann, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}\right\} = \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}$$

oder

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}} = \frac{\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}}{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}}.$$

Lässt man nun $\Delta x$ sich der Null nähern, so nähern

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}$$

sich bekanntlich respective den Gränzen

$$\varphi'(x),\ \psi'(x) \text{ und } \Phi'(x),\ \Psi'(x),$$

und

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

nähert sich also nach dem Obigen der Gränze

$$\frac{\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x'+\psi'(x)\sqrt{-1}}.$$

Weil

$$\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\} = \Delta\varphi(x)+\Delta\psi(x)\sqrt{-1}$$

ist, so nähert sich

$$\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}$$

offenbar der Null, wenn $\Delta x$ sich der Null nähert, und

$$\frac{\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}}$$

ist also die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

sich nähert, wenn

$$\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}$$

sich der Null nähert. Weil nun nach den Grundbegriffen der Differentialrechnung letztere Gränze

$$f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}}=f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}$$

oder

$$\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}=\{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}\}f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

Wegen der Gleichung

$$y=\Phi(x)+\Psi(x)\sqrt{-1}$$

ist aber

$$\frac{dy}{dx}=\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1},$$

und die vorige Gleichung kann daher auch unter der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx}=\{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}\}f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

## §. 8.

Sind jetzt $a$ und $x$ beliebige reelle oder imaginäre Grössen, so kann nach XL. §. 52.

$$x-a=r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

also

$$x=a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}$$

gesetzt werden.

Sei nun

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 6., wenn die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und $r$ stetig sind,

$$f(x)=\varphi(0)+r\varphi'(\Theta r)+\{\psi(0)+r\psi'(\Theta_1 r)\}\sqrt{-1}$$

oder

$$f(x)=\varphi(0)+\psi(0)\sqrt{-1}+r\{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}\},$$

wo $\Theta$ und $\Theta_1$ gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Nach dem Obigen ist aber

$$r=\frac{x-a}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}$$

und

$$f(a)=\varphi(0)+\psi(0)\sqrt{-1};$$

also ist

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}.$$

Digitized by Google

Differentiiren wir die Gleichung

$$f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1}$$

mittelst des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes in Bezug auf $r$ als veränderliche Grösse, so erhalten wir

$$(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\,f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}$$
$$=\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1},$$

und folglich

$$\frac{\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}=f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\},$$

aus welcher Gleichung erhellet, dass

$$\frac{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}=f'(a)+J,$$

wo $J$ eine für $r=0$, d. i. für $x=a$, verschwindende Grösse bezeichnet, gesetzt werden kann. Also ist nach dem Obigen

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\{f'(a)+J\},$$

wo $J$ eine für $x=a$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Diese Gleichung fordert nach dem Obigen, dass die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und $r$ stetig sind. Weil aber nach dem Obigen

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1},$$

$$f'(x)=f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\frac{\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}$$

ist; so ist klar, dass, wenn die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe des bestimmten Werthes $a$ von $x$ stetig sind, jederzeit auch die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ in der Nähe des bestimmten Werths 0 von $r$ stetig sein müssen, indem ohne die Erfüllung dieser letzten Bedingung offenbar auch die erstere nicht erfüllt sein könnte, wobei man §. 1. zu vergleichen hat. Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar das folgende wichtige Theorem:

**Wenn die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe des bestimmten Werths $a$ von $x$, wo $a$ und $x$ ganz beliebige reelle oder imaginäre Grössen bezeichnen, stetig sind; so ist für dem Werthe $a$ unendlich nahe kommende Werthe von $x$ jederzeit**

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\{f'(a)+J\},$$

**wo $J$ eine für $x=a$ verschwindende Grösse bezeichnet.**

Setzt man für $a$ und $x$ respective $x$ und $x+i$, wo $i$ eine der Null unendlich nahe kommende reelle oder imaginäre Grösse bezeichnen soll, so ergiebt sich der folgende Satz:

**Unter der Voraussetzung, dass man für $x$ bloss solche reelle oder imaginäre Werthe setzt, in deren Nähe die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ stetig sind, ist für der**

Digitized by Google

Null unendlich nahe kommende reelle oder imaginäre Werthe von $i$ jederzeit

$$f(x+i)=f(x)+i\,\{f'(x)+J\},$$

wo $J$ eine für $i=0$ verschwindende Grösse bezeichnet.

§. 9.

*Lehrsatz.* Es sei $x$ eine beliebige veränderliche imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch $r$ bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von $x$, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet und $\pi$ seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$$

und

$$\frac{f(r)+\Theta f(\Theta r)+\Theta^2 f(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f(\Theta^{n-1}r)}{n}=M;$$

so ist für jeden Werth von $r$, welcher eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser $n$ ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur $n$ gross genug nimmt, $M=0$.

Beweis. Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze ist für jeden Werth von $x$, in dessen Nähe die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ stetig sind, und für der Null unendlich nahe kommende Werthe von $i$

$$f(x+i)-f(x)=i\,\{f'(x)+J\},$$

wo $J$ eine für $i=0$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Weil nach der Voraussetzung

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist, so ist nach XL. §. 54.

$$r=r\,(\cos\frac{0\pi}{n}+\sin\frac{0\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta r=r\,(\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta^2 r=r\,(\cos\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta^3 r=r\,(\cos\frac{6\pi}{n}+\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\Theta^{n-1}r=r\,(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1});$$

und die Grössen

$$r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1}r$$

Digitized by Google

haben also sämmtlich den Modulus $r$. Weil nun nach der Voraussetzung die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig sind, so sind nach §. 1. diese Functionen in der Nähe eines jeden Werths von $x$, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, stetig, und man kann also, unter der Voraussetzung, dass $r$ eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, in der obigen Gleichung

$$f(x+i)-f(x)=i\{f'(x)+J\}$$

offenbar

$$x=r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1}r$$

setzen.

Ferner ist nach XI. §. 54. für jedes positive ganze $k$

$$\Theta^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1},$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn $\Theta-1$ eine der Null unendlich nahe kommende Grösse ist, jederzeit die Grössen

$$(\Theta-1)r,\ (\Theta-1)\Theta r,\ (\Theta-1)\Theta^2 r,\ \ldots\ (\Theta-1)\Theta^{n-1}r$$

sämmtlich der Null unendlich nahe kommende Grössen sind, so dass man also, wenn man, unter der Voraussetzung, dass $r$ eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, in der Gleichung

$$f(x+i)-f(x)=i\{f'(x)+J\}$$

für $x$ die Werthe

$$r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1}r$$

setzt, für $i$ gleichzeitig die Werthe

$$(\Theta-1)r,\ (\Theta-1)\Theta r,\ (\Theta-1)\Theta^2 r,\ \ldots\ (\Theta-1)\Theta^{n-1}r$$

setzen kann.

Nimmt man nun diese Substitution wirklich vor, und bemerkt zugleich, dass

$$r+(\Theta-1)r=\Theta r,$$
$$\Theta r+(\Theta-1)\Theta r=\Theta^2 r,$$
$$\Theta^2 r+(\Theta-1)\Theta^2 r=\Theta^3 r,$$
$$\Theta^3 r+(\Theta-1)\Theta^3 r=\Theta^4 r,$$

u. s. w.

$$\Theta^{n-1}r+(\Theta-1)\Theta^{n-1}r=\Theta^n r$$

ist; so erhält man die folgenden für jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, und jedes der Null unendlich nahe kommende $\Theta-1$ geltenden Gleichungen:

$$f(\Theta r)-f(r)=(\Theta-1)r\{f'(r)+J_0\},$$
$$f(\Theta^2 r)-f(\Theta r)=(\Theta-1)\Theta r\{f'(\Theta r)+J_1\},$$
$$f(\Theta^3 r)-f(\Theta^2 r)=(\Theta-1)\Theta^2 r\{f'(\Theta^2 r)+J_2\},$$
$$f(\Theta^4 r)-f(\Theta^3 r)=(\Theta-1)\Theta^3 r\{f'(\Theta^3 r)+J_3\},$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$f(\Theta^n r) - f(\Theta^{n-1} r) = (\Theta - 1)\Theta^{n-1} r\{f'(\Theta^{n-1} r) + J_{n-1}\};$$

wo die Grössen

$$J_0,\ J_1,\ J_2,\ J_3, \ldots J_{n-1}$$

nach dem Obigen für $\Theta - 1 = 0$ sämmtlich verschwinden.

Setzen wir nun statt der Grössen

$$J_0,\ \Theta J_1,\ \Theta^2 J_2,\ \Theta^3 J_3, \ldots \Theta^{n-1} J_{n-1}$$

der Kürze wegen die Symbole

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots M_{n-1};$$

so bezeichnen diese Symbole offenbar auch Grössen, welche für $\Theta - 1 = 0$ verschwinden, und die obigen Gleichungen erhalten dann die Form:

$$f(\Theta r) - f(r) = (\Theta - 1)r\{f'(r) + M_0\},$$
$$f(\Theta^2 r) - f(\Theta r) = (\Theta - 1)r\{\Theta f'(\Theta r) + M_1\},$$
$$f(\Theta^3 r) - f(\Theta^2 r) = (\Theta - 1)r\{\Theta^2 f'(\Theta^2 r) + M_2\},$$
$$f(\Theta^4 r) - f(\Theta^3 r) = (\Theta - 1)r\{\Theta^3 f'(\Theta^3 r) + M_3\},$$

u. s. w.

$$f(\Theta^n r) - f(\Theta^{n-1} r) = (\Theta - 1)r\{\Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r) + M_{n-1}\}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_{n-1}}{n} = -M$$

gesetzt, d. h. das arithmetische Mittel zwischen $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, .. .. $M_{n-1}$ durch $-M$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\frac{f(\Theta^n r) - f(r)}{(\Theta - 1)r} = f'(r) + \Theta f'(\Theta r) + \Theta^2 f'(\Theta^2 r) + \ldots + \Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r) - nM,$$

und folglich, weil nach XL. §. 54. offenbar $\Theta^n = 1$, also $f(\Theta^n r) = f(r)$ ist,

$$f'(r) + \Theta f'(\Theta r) + \Theta^2 f'(\Theta^2 r) + \ldots + \Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r) - nM = 0,$$

also

$$\frac{f'(r) + \Theta f'(\Theta r) + \Theta^2 f'(\Theta^2 r) + \ldots + \Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r)}{n} = M.$$

Nach XL. §. 61. ist der Modulus der Summe mehrerer imaginärer Grössen in beliebiger Anzahl nie grösser als die Summe der Moduli aller einzelnen zu einander addirten Grössen, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass der Modulus von $-M$ den grössten der Moduli der Grössen $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, ... $M_{n-1}$ nicht übersteigt, und weil nun nach dem Obigen diese Grössen für $\Theta - 1 = 0$, d. h., wie leicht erhellet, wenn $n$ unendlich gross wird, sämmtlich verschwinden, so muss offenbar auch $-M$ oder $M$ verschwinden, wenn $n$ unendlich gross wird, wodurch die Richtigkeit unsers Satzes bewiesen ist.

Weil die Grösse

$$\frac{f'(r) + \Theta f'(\Theta r) + \Theta^2 f'(\Theta^2 r) + \ldots + \Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r)}{n}$$

Digitized by Google

das arithmetische Mittel zwischen allen den Werthen der Grösse $\Theta^q f(\Theta^q r)$ ist, welche dieselbe erhält, wenn man für $q$ nach und nach die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... $n-1$ setzt; so kann, wenn wir in einer bekannten Bezeichnung dieses arithmetische Mittel durch das Symbol

$$\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \Theta^q f(\Theta^q r)$$

bezeichnen, der obige Satz auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

Es sei $x$ eine beliebige veränderliche imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch $r$ bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von $x$, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$, zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet und $\pi$ seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1};$$

so ist für jeden Werth von $r$, welcher eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser $n$ ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur $n$ gross genug nimmt,

$$\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \Theta^q f(\Theta^q r) = 0.$$

## §. 10.

*Lehrsatz.* Es sei $x$ eine beliebige imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch $r$ bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von $x$, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$, zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet und $\pi$ seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1};$$

so ist die Grösse

$$\mathfrak{F}(r) = \frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1} f(\Theta^q r)$$

zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ mit desto grösserer Genauigkeit constant, je grösser $n$ ist, und kann mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zwischen den in Rede stehenden Gränzen constant gemacht werden, wenn man nur $n$ gross genug nimmt.

Beweis. Sei $r$ eine beliebige Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$. Theilt man nun das Intervall $r-r_0$ in $n$ gleiche Theile, und bezeichnet jeden dieser Theile durch $\varrho$, so dass

$$\frac{r-r_0}{n} = \varrho,\ r = r_0 + n\varrho$$

Digitized by Google

ist; so ist, wovon man sich durch ähnliche Schlüsse wie im vorigen Paragraphen leicht überzeugt, nach §. 8. für ein unendlich grosses $n$

$$f(r_0+\varrho)-f(r_0)=\varrho\{f'(r_0)+N_0\},$$
$$f\{\Theta(r_0+\varrho)\}-f(\Theta r_0)=\varrho\{\Theta f'(\Theta r_0)+N_1\},$$
$$f\{\Theta^2(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^2 r_0)=\varrho\{\Theta^2 f'(\Theta^2 r_0)+N_2\},$$
$$f\{\Theta^3(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^3 r_0)=\varrho\{\Theta^3 f'(\Theta^3 r_0)+N_3\},$$

u. s. w.

$$f\{\Theta^{n-1}(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^{n-1}r_0)=\varrho\{\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r_0)+N_{n-1}\};$$

wo die Grössen $N_0$, $N_1$, $N_2$, $N_3$, ... $N_{n-1}$ für ein unendlich grosses $n$ sämmtlich verschwinden. Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, dividirt sodann auf beiden Seiten durch $n$, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{N_0+N_1+N_2+N_3+\ldots+N_{n-1}}{n}=N$$

und

$$\frac{f'(r_0)+\Theta f'(\Theta r_0)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r_0)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r_0)}{n}=M;$$

so erhält man

$$\frac{f(r_0+\varrho)+f\{\Theta(r_0+\varrho)\}+f\{\Theta^2(r_0+\varrho)\}+\ldots+f\{\Theta^{n-1}(r_0+\varrho)\}}{n}$$
$$-\frac{f(r_0)+f(\Theta r_0)+f(\Theta^2 r_0)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r_0)}{n}$$
$$=\varrho(M+N),$$

d. i., weil oben überhaupt die Grösse

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

durch $\mathfrak{F}(r)$ bezeichnet worden ist,

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho(M+N).$$

Von der Grösse $M$ ist im vorigen Paragraphen bewiesen worden, dass dieselbe verschwindet, wenn $n$ unendlich gross wird, und aus der Gleichung

$$\frac{N_0+N_1+N_2+N_3+\ldots+N_{n-1}}{n}=N$$

kann man auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen aus der Gleichung

$$\frac{M_0+M_1+M_2+M_3+\ldots+M_{n-1}}{n}=-M$$

ableiten, dass auch $N$ verschwindet, wenn $n$ unendlich gross wird, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die Grösse $M+N$ verschwindet, wenn $n$ unendlich gross wird. Nach dem Obigen kann man also immer

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho K_0$$

setzen, wo $K_0$ eine für ein unendlich grosses $n$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Digitized by Google

Durch ganz ähnliche Raisonnements überzeugt man sich nun überhaupt von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho\ K_0,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+2\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+\varrho)=\varrho\ K_1,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+3\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+2\varrho)=\varrho\ K_2,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+4\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+3\varrho)=\varrho\ K_3,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{F}(r_0+n\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+(n-1)\varrho)=\varrho\ K_{n-1};$$

wo die Grössen $K_0$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, .... $K_{n-1}$ für ein unendlich grosses $n$ sämmtlich verschwinden. Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, weil nach dem Obigen bekanntlich $r_0+n\varrho=r$ ist,

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho\ (K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1})$$

oder

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=(r-r_0)\ \frac{K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1}}{n},$$

oder, wenn wir

$$\frac{K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1}}{n}=K$$

setzen,

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=(r-r_0)K.$$

Da die Grössen $K_0$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, .... $K_{n-1}$ sämmtlich verschwinden wenn $n$ unendlich gross wird, so verschwindet auch $K$, wenn $n$ unendlich gross wird, wobei man den vorigen Paragraphen zu vergleichen hat. Also verschwindet wegen der obigen Gleichung offenbar auch die Differenz $\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)$ für ein unendlich grosses $n$, oder für ein unendlich grosses $n$ ist $\mathfrak{F}(r)=\mathfrak{F}(r_0)$, und da dies nun für jedes $r$ gilt, welches eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, so ist durch das Vorhergehende unser Satz vollständig bewiesen.

Einen von dem vorhergehenden von Cauchy gegebenen Beweise verschiedenen kürzern Beweis des obigen Satzes hat Moigno in seinen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, redigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy. T. I. Paris 1840. p. 153 gegeben. Es ist nämlich, wobei man §. 7. zu vergleichen hat,

$$\frac{df(r)}{dr}=f'(r),$$
$$\frac{df(\Theta r)}{dr}=\Theta f'(\Theta r),$$
$$\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}=\Theta^2 f'(\Theta^2 r),$$

u. s. w.

$$\frac{df(\Theta^{n-1} r)}{dr}=\Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r);$$

und folglich, wenn man addirt,

Digitized by Google

$$\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}$$

$$=f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r),$$

also, wenn wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)}{n}=M$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}\right\}=M.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}=\mathfrak{F}(r),$$

und folglich

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}\right\}=\mathfrak{F}'(r);$$

also ist

$$\mathfrak{F}'(r)=M.$$

Für jeden Werth von $r$, welcher eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, und für ein unendlich grosses $n$ verschwindet $M$ nach dem vorigen Paragraphen; also verschwindet auch $\mathfrak{F}'(r)$ für jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen $r_0$ und $R$ ist, und für ein unendlich grosses $n$, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass für ein unendlich grosses $n$ die Grösse $\mathfrak{F}(r)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ constant ist, wie bewiesen werden sollte.

So leicht dieser Beweis auch an sich ist und so sehr sich derselbe von selbst darbietet, so halten wir doch den ersten von Cauchy gegebenen Beweis für strenger und für der Natur der Sache weit angemessener.

## §. 11.

Aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze ergiebt sich unmittelbar, dass unter den demselben zum Grunde liegenden Voraussetzungen die Grösse

$$\mathfrak{F}(r)=\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

oder

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1} f(\Theta^q r)$$

sich einer gewissen Gränze nähert, wenn $n$ wächst, und dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur $n$ gross genug werden lässt. Diese Gränze soll im Folgenden der Kürze wegen der dem Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $x$ entsprechende mittlere Werth der Function $f(x)$ oder auch der mittlere Werth der Function $f(x)$ für den Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $x$ genannt werden.

Digitized by Google

## §. 12.

Es sei jetzt $\mathfrak{F}(z)$ eine Function der imaginären Grösse $z$, deren Modulus im Allgemeinen durch $r$ bezeichnet werden mag, und die Function $\mathfrak{F}(z)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $\mathfrak{F}'(z)$, sei zwischen den Gränzen $r=0$ und $r=R$ stetig. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir

$$f(z)=\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(x)}{z-x}$$

setzen.

Da $f(0)=0$ und nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\mathfrak{F}(r)=\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

ist, so ist offenbar auch $\mathfrak{F}(0)=0$. Weil nun nach §. 10. für ein unendlich grosses $n$ und für jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ oder nicht grösser als $R$ ist,

$$\mathfrak{F}(r)=\mathfrak{F}(0)$$

ist, so ist für ein unendlich grosses $n$ und für jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ oder nicht grösser als $R$ ist, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\mathfrak{F}(r)=0.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\varphi(z)=\frac{z}{z-x}\,\mathfrak{F}(z),\ \psi(z)=\frac{z}{z-x}\,\mathfrak{F}(x),$$

so ist

$$f(z)=\varphi(z)-\psi(z),$$

und folglich offenbar

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$
$$=\frac{\varphi(r)+\varphi(\Theta r)+\varphi(\Theta^2 r)+\ldots+\varphi(\Theta^{n-1}r)}{n}$$
$$-\frac{\psi(r)+\psi(\Theta r)+\psi(\Theta^2 r)+\ldots+\psi(\Theta^{n-1}r)}{n},$$

also, wenn der Kürze wegen

$$\Phi(r)=\frac{\varphi(r)+\varphi(\Theta r)+\varphi(\Theta^2 r)+\ldots+\varphi(\Theta^{n-1}r)}{n},$$

$$\Psi(r)=\frac{\psi(r)+\psi(\Theta r)+\psi(\Theta^2 r)+\ldots+\psi)\Theta^{n-1}r)}{n}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{F}(r)=\Phi(r)-\Psi(r),$$

und folglich nach dem Obigen für ein unendlich grosses $n$ und jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ oder nicht grösser als $R$ ist,

$$\Phi(r)-\Psi(r)=0.$$

Digitized by Google

Setzen wir nun

$$z = r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1}),\quad x = r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1});$$

so ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen und nach der Lehre von den imaginären Grössen

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \ldots + \frac{x^k}{z^k} = \frac{1 - \left\{\frac{r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1})}{r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1}}\right\}^{k+1}}{1 - \frac{r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1})}{r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1})}}$$

$$= \frac{z}{z-x} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}.$$

Wenn man die Grösse

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}$$

auf die Form

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot (P + Q\sqrt{-1})$$

bringt, wodurch man nach leichter Rechnung den Ausdruck

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \left\{\frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) - \frac{r_1}{r}\cos k(\omega_1-\omega)}{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos(\omega_1-\omega(+\left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin((k+1)(\omega_1-\omega)) - \frac{r_1}{r}\sin k(\omega_1-\omega)}{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos(\omega_1-\omega) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\sqrt{-1}\right\}$$

erhält, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass die Grösse

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}$$

sich unter der Voraussetzung, dass der Modulus $r_1$ kleiner als der Modulus $r$ ist, der Null nähert, wenn $k$ wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur $k$ gross genug annimmt, woraus sich ergiebt, dass unter der Voraussetzung, dass der Modulus von $x$ kleiner als der Modulus von $z$ ist, jederzeit

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \ldots = \sum_{q=0}^{q=\infty} z \quad x^q$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\psi(r) = \frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x} + \frac{\Theta r}{\Theta r - x} + \frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r - x} + \ldots + \frac{\Theta^{n-1} r}{\Theta^{n-1} r - x}\right\} \mathfrak{F}(x)$$

ist, so ist unter der Voraussetzung, dass der Modulus von $x$ kleiner als der Modulus von $z$ ist,

Digitized by Google

$$\Psi(r) =$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{n}\left\{\Sigma_{q=0}^{q=\infty} r^{-q}x^{q} + \Sigma_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-q} r^{-q} x^{q} + \ldots + \Sigma_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-(n-1)q} r^{-q} x^{q}\right\},$$

oder, weil der Factor $r^{-q}x^{q}$ unter allen Summenzeichen vorkommt, wie sogleich erhellen wird,

$$\Psi(r) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{n}\Sigma_{q=0}^{q=\infty}\{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q}\} r^{-q}x^{q},$$

oder auch

$$\Psi(r) = \mathfrak{F}(x)\Sigma_{q=0}^{q=\infty} \frac{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q}}{n} r^{-q}x^{q}.$$

Weil bekanntlich

$$\Theta = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

und folglich nach bekannten Sätzen von den imaginären Grössen (XL. §. 54.)

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q}$$

$$= 1 + \cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$+ \cos\frac{4q\pi}{n} - \sin\frac{4q\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$+ \cos\frac{6q\pi}{n} - \sin\frac{6q\pi}{n}\sqrt{-1}$$

u. s. w.

$$+ \cos\frac{2(n-1)q\pi}{n} - \sin\frac{2(n-1)q\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist, so ist klar, dass für jeden durch $n$ ohne Rest theilbaren Werth von $q$

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q} = n,$$

und folglich

$$\frac{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q}}{n} = 1$$

ist. Weil ferner nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q} = \frac{1 - \Theta^{-nq}}{1 - \Theta^{-q}},$$

also diese Summe der Grösse

$$\frac{1 - (\cos\frac{2nq\pi}{n} - \sin\frac{2nq\pi}{n}\sqrt{-1})}{1 - (\cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})},$$

d. i. der Grösse

$$\frac{0}{1 - (\cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})}$$

Digitized by Google

gleich ist, und der Nenner dieses Bruchs offenbar nicht verschwindet, wenn $q$ eine durch $n$ nicht ohne Rest theilbare ganze Zahl ist *), so ist klar, dass für jeden nicht ohne Rest durch $n$ theilbaren Werth von $q$

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q} = 0,$$

und folglich auch

$$\frac{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \ldots + \Theta^{-(n-1)q}}{n} = 0$$

ist.

Wendet man dies nun auf den obigen Ausdruck von $\Psi(r)$ an, so erhält man, immer unter der Voraussetzung, dass der Modulus von $x$ kleiner als der Modulus von $z$ ist,

$$\Psi(r) = \{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^n + \left(\frac{x}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{x}{r}\right)^{3n} + \ldots\}\mathfrak{F}(x).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
&1 + \left(\frac{x}{r}\right)^n + \left(\frac{x}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{x}{r}\right)^{3n} + \ldots + \left(\frac{x}{r}\right)^{kn} \\
&= 1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^n (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^n \\
&\quad + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n} (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^{2n} \\
&\quad + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{3n} (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^{2n} \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{kn} (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^{kn} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n} (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^{(k+1)n}}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n (\cos\omega_1 + \sin\omega_1 \sqrt{-1})^n}
\end{aligned}$$

---

*) Geht nämlich $n$ in $q$ nicht auf, so ist $\frac{2q}{n}$ entweder keine oder eine ganze Zahl. Im ersten Falle ist offenbar nicht

$$1 - (\cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1}) = 0.$$

Im zweiten Falle sei $\frac{2q}{n} = k$, so kann $k$ keine gerade Zahl sein, weil sonst $\frac{q}{n} = \frac{1}{2}k$ eine ganze Zahl sein würde, welches gegen die Voraussetzung streitet, und in diesem Falle ist also

$$1 - (\cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1}) = 2,$$

d. h. es ist wieder nicht

$$1 - (\cos\frac{2q\pi}{n} - \sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1}) = 0.$$



Digitized by Google

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n} \cdot \frac{\cos(k+1)n\omega_1 + \sin(k+1)n\omega_1 \cdot \sqrt{-1}}{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^n (\cos n\omega_1 + \sin n\omega_1 \sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n}$$

$$- \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n} \cdot \left\{ \frac{\cos(k+1)n\omega_1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos kn\omega_1}{1-2\left(\frac{r_1}{r}\right)\cos n\omega_1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(k+1)n\omega_1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \sin kn\omega_1}{1-2\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos n\omega_1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}} \sqrt{-1} \right\}.$$

Weil nun nach der Voraussetzung $r_1 < r$ ist, so nähert sich der zweite Theil des Ausdrucks auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Null, wenn $k$ wächst, und kann derselbe beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $k$ gross genug nimmt, woraus sich

$$1 + \left(\frac{x}{r}\right)^n + \left(\frac{x}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{x}{r}\right)^{3n} + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\psi(r) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n},$$

also für ein unendlich grosses $n$ offenbar

$$\psi(r) = \mathfrak{F}(x)$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist aber für ein unendlich grosses $n$ und jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ oder nicht grösser als $R$ ist,

$$\Phi(r) - \psi(r) = 0, \text{ d. i. } \Phi(r) = \psi(r),$$

woraus sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden ergiebt, dass für ein unendlich grosses $n$ und jedes $r$, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ oder nicht grösser als $R$ ist,

$$\mathfrak{F}(x) = \Phi(r),$$

d. i. nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{q(r) + q(\Theta r) + q(\Theta^2 r) + \ldots + q(\Theta^{n-1} r)}{n}$$

oder

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x}\mathfrak{F}(r) + \frac{\Theta r}{\Theta r - x}\mathfrak{F}(\Theta r) + \ldots + \frac{\Theta^{n-1} r}{\Theta^{n-1} r - x}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1} r)\right\}$$

ist.

Nach §. 11. ist die Gränze, welcher sich die Grösse

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x}\mathfrak{F}(r) + \frac{\Theta r}{\Theta r - x}\mathfrak{F}(\Theta r) + \ldots + \frac{\Theta^{n-1} r}{\Theta^{n-1} r - x}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1} r)\right\}$$

Digitized by Google

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn $n$ in's Unendliche wächst, der dem Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $z$ entsprechende mittlere Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z),$$

und nach dem Vorhergehenden ist die Function $\mathfrak{F}(x)$ diesem dem Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $z$ entsprechenden mittlern Werthe der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

gleich oder kann durch denselben dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Function $\mathfrak{F}(z)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $\mathfrak{F}'(z)$, muss für jeden Werth des Modulus $r$ der Grösse $z$, welcher eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ ist oder die Grösse $R$ nicht übersteigt, stetig sein.

2. Der Modulus $r$ der Grösse $z$ muss eine Mittelgrösse zwischen 0 und $R$ sein oder darf die Grösse $R$ nicht übersteigen.

3. Der Modulus der Grösse $x$ muss kleiner als der Modulus $r$ der Grösse $z$ sein.

Dies führt unmittelbar zu dem folgenden Satze:

Die Function $\mathfrak{F}(x)$ kann jederzeit durch den dem Modulus $r$ der Grösse $z$ entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn nicht bloss für den Modulus $r$ der Grösse $z$, sondern auch für jeden kleinern Modulus dieser Grösse die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $\mathfrak{F}'(z)$ stetig sind, und der Modulus der Grösse $x$ kleiner als der Modulus der Grösse $z$ ist.

Man kann aber diesen Satz offenbar auch auf folgende Art aussprechen:

Für jeden Modulus der Grösse $x$, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ durch den, einem den in Rede stehenden Modulus der Grösse $x$ übersteigenden Modulus $r$ der Grösse $z$ entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt oder ausgedrückt werden.

## §. 13.

Nach dem vorigen Paragraphen kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit durch den dem Modulus $r$ der Grösse $z$ entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$



Digitized by Google

dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn nicht bloss für den Modulus $r$ der Grösse $z$, sondern auch für jeden kleineren Modulus dieser Grösse die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $F(z)$ stetig sind, und der Modulus der Grösse $x$ kleiner als der Modulus der Grösse $z$ ist, d. h. es ist unter den gemachten Voraussetzungen, wenn wir den dem Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $z$ entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

durch

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}$$

bezeichnen und eine ähnliche Bezeichnung im Folgenden auch bei andern Functionen gebrauchen,

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}.$$

Nun erhellet aber aus dem vorigen Paragraphen, dass unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)=\mathfrak{F}(z)+\frac{x}{z}\mathfrak{F}(z)+\frac{x^2}{z^2}\mathfrak{F}(z)+\frac{x^3}{z^3}\mathfrak{F}(z)+\ldots,$$

und folglich nach dem aus §. 11. bekannten Begriffe des mittlern Werths

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(x)&=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(r)+\frac{x}{r}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^2}{r^2}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^3}{r^3}\mathfrak{F}(r)+\ldots.\right\}\\
&+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x}{\Theta r}\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x^2}{(\Theta r)^2}\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x^3}{(\Theta r)^3}\mathfrak{F}(\Theta r)\ldots\right\}\\
&+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x}{(\Theta^2 r)}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x^2}{(\Theta^2 r)^2}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x^3}{(\Theta^2 r)^3}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\ldots.\right\}\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\frac{x}{\Theta^{n-1}r}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\frac{x^2}{(\Theta^{n-1}r)^2}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{x^3}{(\Theta^{n-1}r)^3}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\ldots\right\}\\
&=\frac{1}{n}\{\mathfrak{F}(r)+\mathfrak{F}(\Theta r)+\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\ldots+\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\}\\
&+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{\Theta r}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{\Theta^2 r}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{\Theta^{n-1}r}\right\}x\\
&+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r^2}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{(\Theta r)^2}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{(\Theta^2 r)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{(\Theta^{n-1}r)^2}\right\}x^2\\
&+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r^3}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{(\Theta r)^3}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{(\Theta^2 r)^3}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{(\Theta^{n-1}r)^3}\right\}x^3\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

für ein unendlich grosses $n$, also nach §. 11. offenbar

Digitized by Google

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{M}_r\{\mathfrak{F}(z)\} + x\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z}\right\} + x^2\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^2}\right\} + x^3\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^3}\right\} + \ldots\ldots$$

ist, woraus sich ergiebt, dass sich unter den gemachten Voraussetzungen die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse $x$ geordnete convergirende Reihe entwickeln lässt, und wir werden also hierdurch zu dem folgenden Lehrsatze geführt:

Wenn die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $\mathfrak{F}'(z)$ nicht bloss für den Modulus $r$ der veränderlichen Grösse $z$, sondern auch für jeden kleinern Modulus dieser Grösse stetig sind, und der Modulus der Grösse $x$ kleiner als der Modulus der Grösse $z$ ist; so kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse $x$ geordnete convergirende Reihe entwickelt werden.

Dieser Satz lässt sich aber offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

Für jeden Modulus der Grösse $x$, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse $x$ geordnete convergirende Reihe entwickelt werden.

## §. 14.

Das allgemeine Glied der im vorigen Paragraphen gefundenen Reihe ist

$$x^k\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}.$$

Für dieses allgemeine Glied, aus welchem die sämmtlichen Glieder der in Rede stehenden Reihe erhalten werden, wenn man für $k$ nach und nach die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..... setzt, lässt sich aber noch ein anderer sehr bemerkenswerther Ausdruck finden, zu dessen Entwickelung wir nun übergehen wollen.

Zuerst hat man zu berücksichtigen, dass unter der Voraussetzung, dass die positive ganze Zahl $k$ grösser als Null ist, allgemein

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\} = 0$$

ist. Nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function ist nämlich

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\} = \frac{r^{-k} + (\Theta r)^{-k} + (\Theta^2 r)^{-k} + \ldots + (\Theta^{n-1} r)^{-k}}{n}$$

$$= r^{-k} \cdot \frac{1 + \Theta^{-k} + \Theta^{-2k} + \Theta^{-3k} + \ldots + \Theta^{-(n-1)k}}{n}$$

für ein unendlich grosses $n$. Weil nun nicht $k = 0$ und $n$ unendlich gross ist, so geht offenbar $n$ in $k$ nicht auf, und nach §. 12. ist also

Digitized by Google

$$\frac{1+\Theta^{-k}+\Theta^{-2k}+\Theta^{-3k}+\ldots+\Theta^{-(n-1)k}}{n}=0.$$

folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\}=0,$$

wie behauptet wurde.

Ferner ist nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function, indem wir wieder $k$ grösser als Null annehmen, offenbar

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(0)}{z^k}\right\}-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1\,.\,z^{k-1}}\right\}$$

$$-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1\,.\,2\,.\,z^{k-2}}\right\}-\ldots-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{1\,...\,(k-1)\,.\,z}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}-\mathfrak{F}(0)\;\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\}-\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}\mathfrak{M}_r\{z^{-(k-1)}\}$$

$$-\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1\,.\,2}\mathfrak{M}_r\{z^{-(k-2)}\}-\ldots-\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{1\,...\,(k-1)}\mathfrak{M}_r\{z^{-1}\},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}\right\}.$$

Hiernach und nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function ist unter den gemachten Voraussetzungen der mittlere Werth

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}$$

offenbar dem Werthe der Function

$$\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}$$

für $z=0$ gleich. Weil für $z=0$ Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, so muss man nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung Zähler und Nenner in Bezug auf $z$ differentiiren, wodurch man

$$\frac{\mathfrak{F}'(z)-\mathfrak{F}'(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}''(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}'''(0)-\ldots-\frac{z^{k-2}}{1\,..\,(k-2)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{kz^{k-1}}$$

erhält, und muss in diesem Bruche $z=0$ setzen. Weil aber für diesen Werth von $z$ Zähler und Nenner wieder verschwinden, so muss man von Neuem differentiiren, wodurch man

Digitized by Google

$$\frac{\mathfrak{F}'(z) - \mathfrak{F}'(0) - \frac{z}{1}\mathfrak{F}''(0) - \frac{z^2}{1.2}\mathfrak{F}^{IV}(0) - \ldots - \frac{z^{k-3}}{1..(k-3)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{(k-1)\,kz^{k-2}}$$

erhält, und muss in diesem Bruche $z = 0$ setzen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich wird man offenbar den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k-2)}(z) - \mathfrak{F}^{(k-2)}(0) - \frac{z}{1}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{3.4.5\ldots kz^2}$$

erhalten, in welchem $z = 0$ gesetzt werden muss. Weil aber für diesen Werth von $z$ Zähler und Nenner wieder verschwinden, so muss man von Neuem differentiiren, wodurch man den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(z) - \mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{2.3.4.5\ldots kz}$$

erhält, in welchem man $z = 0$ setzen muss. Differentiirt man nun, weil für $z = 0$ auch Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, nochmals, so erhält man den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k)}(z)}{1.2.3\ldots k},$$

in dem man $z = 0$ setzen muss, welches endlich

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k}$$

giebt, so dass also

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\} = \frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k},$$

und folglich

$$x^k\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\} = \frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k}x^k$$

ist, wobei wir angenommen haben, dass $k$ grösser als Null ist, zugleich aber auch bemerken, dass unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$\mathfrak{M}_r\{\mathfrak{F}(z)\} = \mathfrak{F}(0)$$

ist.

Hieraus, in Verbindung mit dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze, ergiebt sich nun das folgende Theorem:

**Für jeden Modulus der Grösse $x$, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, ist**

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}(0) + \frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x + \frac{\mathfrak{F}''(0)}{1.2}x^2 + \frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Weil

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(z) + \frac{x}{z}\mathfrak{F}(z) + \frac{x^2}{z^2}\mathfrak{F}(z) + \ldots + \frac{x^{k-1}}{z^{k-1}}\mathfrak{F}(z) + \frac{x^k}{z^{k-1}(z-x)}\mathfrak{F}(z)$$

Digitized by Google

ist; so ist, wenn man in der vorher gefundenen Gleichung

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{F}(0)+\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x+\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1.2}x^2+\frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens bis zu ihrem $k$ten Gliede fortsetzt. der Rest, durch welchen die Reihe dann noch vervollständigt werden muss, nach dem Obigen offenbar der mittlere Werth der Function

$$\frac{x^k}{z^{k-1}(z-x)}\mathfrak{F}(z)$$

von $z$ für einen den Modulus von $x$ übersteigenden Modulus von $z$. Da nun dieser mittlere Werth bekanntlich die Grösse

$$\frac{\frac{x^k}{r^{k-1}(r-x)}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^k}{(\Theta r)^{k-1}(\Theta r-x)}\mathfrak{F}(\Theta r)+\ldots+\frac{x^k}{(\Theta^{n-1}r)^{k-1}(\Theta^{n-1}r-x)}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

für ein unendlich grosses $n$ ist; so ist, wenn wir den grössten der Moduli der Grössen

$$\mathfrak{F}(r),\ \mathfrak{F}(\Theta r),\ \mathfrak{F}(\Theta^2 r),\ \mathfrak{F}(\Theta^3 r),\ldots.$$

durch $R$ und den Modulus von $x$ durch $\varrho$ bezeichnen, nach dem in XL. §. 61. bewiesenen Satze der Modulus des in Rede stehenden Rests offenbar nie grösser als

$$\frac{\varrho^k}{r^{k-1}(r-\varrho)}R \text{ oder } \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1}\cdot\frac{\varrho R}{r-\varrho},$$

d. i. nicht grösser als der Rest der geometrischen Progression, welche man durch Entwickelung von

$$\frac{\varrho R}{r-\varrho}$$

nach den positiven ganzen Potenzen von $\varrho$ erhält.

## §. 15.

Um den im vorigen Paragraphen bewiesenen wichtigen Satz durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Function

$$\mathfrak{F}(x)=(1+x)^\alpha$$

betrachten. Setzen wir die imaginäre Grösse $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$, also $1+x=1+\xi+\eta\sqrt{-1}$, und der Kürze wegen, indem wir die Quadratwurzel positiv nehmen,

$$\varrho=\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{1}{2}};$$

so kann nach XL. §. 52.

$$1+x=\varrho\{\cos(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

gesetzt werden, wo der Bogen Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze Zahl $k$ gerade oder ungerade genommen werden muss, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist. Nach XL. §. 54. §. 55. ist

Digitized by Google

$$\varrho^{\alpha}\{\cos\alpha\,(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha\,(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

immer ein Werth von $(1+x)^{\alpha}$, und diesen Werth von $(1+x)^{\alpha}$ wollen wir jetzt allein in's Auge fassen und unter $\mathfrak{F}(x)$ verstehen, also auch

$$\mathfrak{F}(x)=\varrho^{\alpha}\{\cos\alpha(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

setzen. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{F}'(x)=\alpha\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{1+x},$$

also

$$\mathfrak{F}''(x)=\alpha\,\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^2},$$

d. i., weil nach dem Vorhergehenden

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}''(x)=\alpha(\alpha-1)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^2}.$$

Folglich ist, wie man leicht durch fernere Differentiation findet,

$$\mathfrak{F}'''(x)=\alpha(\alpha-1)\,\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-2\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^3},$$

also, weil nach dem Obigen

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}'''(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^3}.$$

Hieraus ergiebt sich durch neue Differentiation

$$\mathfrak{F}^{IV}(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-3\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^4},$$

also, weil nach dem Obigen

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}^{IV}(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,(\alpha-3)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein

$$\mathfrak{F}^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\,..\,(\alpha-n+1)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^n},$$

also

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\,..\,(\alpha-n+1)\mathfrak{F}(0).$$

Weil nun

Digitized by Google

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha \frac{\mathfrak{F}(x)}{1+x}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha \frac{\varrho^{\alpha}\{\cos\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}}{\varrho\{\cos(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}},$$

also nach XL. §. 53. §. 54.

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha\varrho^{\alpha-1}\{\cos(\alpha-1)(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)$$

$$+\sin(\alpha-1)(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}.$$

Der Modulus von $x$ ist $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Ist nun $\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$ oder $\xi^2+\eta^2<1$, so ist immer $1+\xi>0$, weil, wenn $1+\xi \leqq 0$, d. i. $\xi \leqq -1$ wäre, offenbar $\xi^2 \geqq 1$, und folglich $\xi^2+\eta^2 \geqq 1$ sein würde, welches gegen die Voraussetzung $\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$ streitet. Ist also der Modulus von $x$ kleiner als die Einheit, so ist immer $1+\xi>0$, der Bruch $\frac{\eta}{1+\xi}$ hat also einen endlichen völlig bestimmten Werth, und die ganze Zahl $k$ ist eine gerade Zahl und kann, wie sich auch $\xi$ und $\eta$ ändern mögen, als constant angenommen werden, woraus sich, in Verbindung mit dem Obigen ergiebt, dass, so lange der Modulus von $x$, d. i. die Grösse $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, kleiner als die Einheit ist, weder eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\mathfrak{F}(x)$, noch eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\mathfrak{F}'(x)$ Statt findet. Wenn der Modulus von $x$, d. i. die Grösse $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, der Einheit gleich ist, erhält z. B. schon für $\xi=-1$, $\eta=0$ der Bruch $\frac{\eta}{1+\xi}$ den völlig unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$.

Hieraus und aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen wichtigen Satze ergiebt sich also, dass für

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$$

jederzeit

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}(0)+\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x+\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1.2}x^2+\frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}(x) = \varrho^{\alpha}\{\cos\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

und $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$, also für $x=0$ auch $\xi=0$ und $\eta=0$, folglich $\varrho=1$ und

$$\frac{\eta}{1+\xi}=0,\ \text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}=0$$

ist, wobei man nicht zu übersehen hat, dass Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ nach

Digitized by Google

dem Obigen immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss; so ist offenbar

$$\mathfrak{F}(0) = \cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1},$$

und also, weil nach dem Obigen allgemein

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\mathfrak{F}(0)$$

ist,

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,(\cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1}),$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,(\cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1}),$$

oder, wenn wir in einer bekannten Bezeichnung

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

setzen,

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = a_n(\cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1}).$$

Führen wir dies in den oben gefundenen Ausdruck von $\mathfrak{F}(x)$ ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}(x) = (\cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1})\,(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.),$$

wo $k$ jede gerade ganze Zahl bezeichnen kann.

Also ist nach dem Obigen unter der Voraussetzung, dass

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} < 1$$

ist,

$$\begin{aligned}\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos\alpha(\mathrm{Arctg}\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\mathrm{Arctg}\tfrac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}\\ = (\cos \alpha k\pi + \sin \alpha k\pi \sqrt{-1})\,\left\{\begin{array}{l} 1 + a_1(\xi+\eta\sqrt{-1}) \\ \quad + a_2(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 \\ \quad + a_3(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 \\ \quad + a_4(\xi+\eta\sqrt{-1})^4 \\ \quad + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.,\end{aligned}$$

wo $k$ jede gerade ganze Zahl sein kann, und Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss. Setzen wir, was verstattet ist, $k = 0$, so erhalten wir, immer unter der Voraussetzung, dass

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} < 1$$

ist und Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird,

$$\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\tfrac{\eta}{1+\xi})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\tfrac{\eta}{1+\xi})\sqrt{-1}\}$$

Digitized by Google

$$= 1 + \alpha_1(\xi + \eta\sqrt{-1}) + \alpha_2(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 + \alpha_3(\xi + \eta\sqrt{-1})^3 + \alpha_4(\xi + \eta\sqrt{-1})^4 + \ldots\ldots\ldots$$

Für $\eta = 0$ erhält man hieraus unter der Voraussetzung, dass $\sqrt{(\xi^2)} < 1$, d. h. der absolute Werth von $\xi$ kleiner als die Einheit, oder

$$-1 < \xi < +1$$

ist,

$$(1+\xi)^\alpha = 1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \alpha_4\xi^4 + \ldots\ldots$$

Man sieht, wie leicht der im vorigen Paragraphen bewiesene, von Cauchy gefundene Satz zu diesen Resultaten die bekanntlich auf andern Wegen nur ziemlich weitläufig und schwierig bewiesen werden können, führt.

Bemerken wollen wir noch, dass, wie schon in der elementaren Analysis gezeigt wird, in dem Falle, wo $\alpha$ eine positive ganze Zahl ist, für jedes $\xi$ und $\eta$

$$(1 + \xi + \eta\sqrt{-1})^\alpha = 1 + \alpha_1(\xi + \eta\sqrt{-1}) + \alpha_2(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 + \alpha_3(\xi + \eta\sqrt{-1})^3 + \alpha_4(\xi + \eta\sqrt{-1})^4 + \ldots\ldots\ldots$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$1 + \xi + \eta\sqrt{-1}$$

$$= \varrho\{\cos(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi) + \sin(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi)\sqrt{-1}\}$$

ist, wo Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze Zahl $k$ gerade oder ungerade genommen werden muss, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist; so ist ganz unter denselben Voraussetzungen nach XL. §. 54.

$$(1 + \xi + \eta\sqrt{-1})^\alpha$$

$$= \varrho^\alpha\{\cos\alpha(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi) + \sin\alpha(\text{Arctang}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi)\sqrt{-1}\}.$$

Also ist nach dem Obigen, wenn $\alpha$ eine positive ganze Zahl ist, für jedes $\xi$ und $\eta$

$$\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos\alpha(\text{Arctg}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi) + \sin\alpha(\text{Arctg}\,\tfrac{\eta}{1+\xi} + k\pi)\sqrt{-1}\}$$
$$= 1 + \alpha_1(\xi + \eta\sqrt{-1}) + \alpha_2(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 + \alpha_3(\xi + \eta\sqrt{-1})^3 + \alpha_4(\xi + \eta\sqrt{-1})^4 + \ldots\ldots\ldots$$

wenn man Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze

Digitized by Google

Zahl $k$ gerade oder ungerade nimmt, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist.

Der Raum gestattet für jetzt nicht, diesen wichtigen und interessanten Gegenstand weiter auszuführen; wir werden aber späterhin auf denselben zurückkommen.

# XLIX.

## Anwendung der Lehre vom Zuge auf die Nachweisung der geometrischen Bedeutung der Form $a+b.\sqrt{-1}$.

Von dem

Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller

zu Hannover.

Die von Gauss hervorgehobene und in Anwendung gebrachte geometrische Bedeutung der sogenannten imaginären Form $a+b.\sqrt{-1}$ darf zu denjenigen neueren Erweiterungen der Mathematik gezählt werden, die eine besondere Aufmerksamkeit für sich in Anspruch nehmen. Wie diese Bedeutung sich auf eine einfache Art aus der Lehre vom Zuge *) nachweisen lässt, welche das Beschreiben oder Durchfahren des Raums als den eigentlichen Gegenstand der analytischen Auffassung der Geometrie betrachtet, dieses soll durch nachfolgenden Versuch gezeigt werden.

Wenn der Zug eines beschreibenden Punkts die Seiten ähnlicher Figuren nach der Ordnung der Aehnlichkeit durchfährt, so wird offenbar die unter den ähnlichen Seiten Statt findende Proportion auch unter den beschreibenden Zügen Statt finden, indem dem Begriffe der Aehnlichkeit die Voraussetzung entspricht, dass in ähnlichen Figuren die ähnlichzeigenden Richtungen, und damit also auch die Grössen der Züge, die einen ähnlichen Uebergang darstellen, als gleichnamige zu betrachten sind. Es sei z. B. in einem beliebigen Punkte $A$ einer geraden Linie $BC$ ein Perpendikel errichtet und der Punkt $D$, wo solches den von $B$ nach $C$ führenden Halbkreis über dem Durchmesser $BC$ trifft, geradlinig mit $B$ und $C$ verbunden, so sind $BAD$ und $D'A'C$ ähnliche Dreiecke. — (Anmerkung. Die Bezeichnung ohne oder mit Accent soll hier bei

*) Darstellung der Lehre vom Zuge u. s. w. in Crelle's Journal für Mathematik. B. XV. H. 3.

Digitized by Google

den Punkten, die zu beiden Dreiecken gehören, unterscheiden, ob sie für das erste oder für das letztere betrachtet werden, auch soll in der Angabe eines Zuges, der zwei Punkte verbindet, der voranstehende Buchstabe den Anfangspunkt des Zuges bezeichnen.) — Der zusammengesetzte Zug des beschreibenden Punkts der von $B$ nach $A$, dann von $A$ nach $D$, von $D'$ nach $A'$ und von $A'$ nach $C$ führt, durchfährt offenbar die Seiten der ähnlichen Dreiecke $BAD$, $D'A'C$ nach der Ordnung der Aehnlichkeit. Man hat also unter den einzelnen Theilen seiner Zusammensetzung, die als Züge aufgefasst werden müssen, die Proportion $BA : AD = D'A' : A'C$.

Nun kann man für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene den Ausdruck $a\alpha + b\beta$ als die allgemeine Form für die analytische Darstellung des Coordinatenzuges ansehen, der, wenn er von einem Punkte $P$ ausgeht und zu dem Punkte $Q$ hinführt, dadurch des letzteren Lage gegen den ersteren bestimmt. Es bedeutet dann $\alpha$ die Grösse des geradlinigen Zuges, der die Längeneinheit in der Ebene mit einer Richtung beschreibt, die mit der positiven Richtung in der Abscissenaxe einer und derselben Richtung im Raume parallel zeigt, und $\beta$ die Grösse des geradlinigen Zuges, der die Längeneinheit in der Ebene mit einer Richtung beschreibt, die mit der positiven Richtung in der Ordinatenaxe einer und derselben Richtung im Raume parallel zeigt. Die Coefficienten $a$ und $b$ sind numerische Factoren, die das Setzen der Grössen $\alpha$ und $\beta$ zur Bildung der beiden Theile des ganzen Zuges näher bestimmen; ihr absoluter Werth muss sich zu 1 verhalten, wie die Länge ihres Theils zur Längeneinheit, ausserdem können sie positiv oder negativ sein, je nachdem die Beschreibung der Theile mit der Richtung der Grössen $\alpha$ und $\beta$ selbst oder mit der entgegengesetzten zur Ausführung kommen soll. Es sind also $a$ und $b$ dieselben Zahlen, die nach der gewöhnlichen Auffassung die Abscisse und Ordinate des Punkts $Q$ gegen den Anfangspunkt $P$ einzeln für sich darstellen.

Die Eigenthümlichkeit dieses Coordinatensystems besteht darin, dass jeder Punkt der Ebene von dem Coordinatenzuge nach vier verschiedenen Richtungen, wie sie den Grössen $+\alpha$, $-\alpha$, $+\beta$, $-\beta$ entsprechen, durchfahren werden kann. Die durch das Zusammenliegen dieser Grössen in einem Punkte $A$ der Ebene, als ihrem gemeinschaftlichen Anfangspunkte oder Endpunkte, unter ihnen entstehende Beziehung findet also für jeden Punkt der Ebene statt. Lässt man von dem Punkte $A$ aus $AB$ den Zug $+\alpha$, $AC$ den Zug $-\alpha$, $AD$ den Zug $+\beta$, $AE$ den Zug $-\beta$ darstellen, so entsteht eine Lagenbeziehung unter ähnlichen neben einander liegenden Dreiecken $BAD$ und $DAC$, $DAC$ und $CAE$, $CAE$ und $EAB$, $EAB$ und $BAD$ ganz mit derjenigen übereinstimmend, welche oben betrachtet wurde. Man hat also unter jenen Grössen, insofern ein beschreibender Punkt sie vermittelst eines zusammenhängenden Zuges durchläuft, je nach der Folge $BADAC$, $DACAE$, $CAEAB$, $EABAD$ die Proportionen $-\alpha : \beta = -\beta : -\alpha$, $-\beta : -\alpha = \alpha : -\beta$, $\alpha : -\beta = \beta : \alpha$, $\beta : \alpha = -\alpha : \beta$. Sämmtliche Proportionen geben die Beziehung $\beta\beta = -\alpha\alpha$, also $\beta = \alpha . \sqrt{-1}$ oder $\beta = \alpha . i$, wenn $+\sqrt{-1}$ durch $i$ bezeichnet wird. Deutet man $\alpha$, als den ursprünglichen Einheitszug, durch $+1$ an, so erhält man $\beta = +\sqrt{-1} = i$. Es ist demnach $a + b . i$ die analy-

Digitized by Google

tische Form, welche der Grösse des rechtwinkligen Cordinatenzuges zukommt, wenn derselbe als ein zusammenhängendes Ganzes aufgefasst wird. Der, der Einheit des zweiten Theils sich beifügende Factor $i$ deutet dabei an, dass die Längeneinheit, welche für die Einheit des ersten Theils mit der positiven Abscissenrichtung beschrieben wird, für die Einheit des zweiten Theils mit rechtwinklig abweichender Richtung zu beschreiben ist.

Wenn $a+b.i$ den Coordinatenzug darstellt, der vom Punkte $P$ zum Punkte $Q$ überführt und der geradlinige oder Radius-Vector-Zug von $P$ nach $Q$ durch $r$ bezeichnet wird, so dass $r$ dessen Länge in Theilen der Längeneinheit ausdrückt mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem in der geraden Linie $PQ$ die Richtung von $P$ nach $Q$ als die positive oder als die negative betrachtet wird, und wenn ferner $e$ die Elongation jenes Radius-Vector ist, d. h. die Grösse des Winkels bezeichnet, der im Scheitelpunkte $P$ aus der Richtung, die mit der positiven Abscissenrichtung einer und derselben Richtung des Raums parallel ist, in diejenige überführt, die in der geraden Linie $PQ$ als die positive betrachtet wird, so hat man allgemein $a=r\cos e$, $b=r\sin e$, $a+b.i=r(\cos e+\sin e.i)$. Die Grösse $e$ lässt sich durch die Zahl ausdrücken, welche die Länge des Bogens des Elongationswinkels in Theilen des Halbmessers angiebt mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem dieser Winkel durch positive oder negative Drehung zu beschreiben sein wird. Es stellen dann $a$ und $b$ die rechtwinkligen, $e$ und $r$ die Polar-Coordinaten des Punkts $Q$ gegen den Anfangspunkt $P$ nach ihrer einzelnen Grösse dar, und zwar die absoluten oder die relativen Coordinaten, je nachdem $P$ der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems selbst oder ein anderer Punkt der Ebene ist.

Die durch Cauchy aufgekommene Benennung „complexe Zahl" für die Zahl von der Form $a+b.i$ scheint bereits das Bürgerrecht gewonnen zu haben. Die von ihm befolgte Ausschliessung negativer Werthe für den Modulus der complexen Zahl oder für die Grösse $r$ in der Form $r.(\cos e+\sin e.i)$ hat zwar für einzelne Fälle ihren Nutzen, stört aber die Allgemeinheit der Auffassung.

Die durchgreifende Allgemeinheit der Darstellung der Grösse des Coordinatenzuges durch die complexe Zahlenform erhellet am auffallendsten bei der Rechnung mit complexen Zahlen. Es sei z. B. $A$ der Anfangspunkt des Coordinatensystems, $AB$ die mit positiver Abscissenrichtung beschriebene Längeneinheit, so stellt der Zug die ursprüngliche Einheit dar, die dem Coordinatenzuge zum Grunde liegt. Nun bezeichne $a+b.i=r(\cos e+\sin e.i)$ die Grösse des Coordinatenzuges, der aus $A$ nach dem Punkte $C$ führt, so tritt durch das Setzen dieser complexen Zahl der Zug von $A$ nach $C$ an die Stelle des Einheitszuges von $A$ nach $B$. Denkt man sich die complexe Zahl $a+b.i$ als eine Summe von aliquoten Theilen, so wird das Setzen derselben zu einer Folge von Punkten hinführen, die Endpunkte von entsprechenden aliquoten Theilen des Radius-Vector-Zuges $AC$ sind, und da ein Zug als die Gränzvorstellung des Aneinanderreihens einer Summe von unendlich vielen unendlich kleinen aliquoten Theilen aufgefasst werden kann, so ist mit dem Setzen der complexen Zahl $a+b.i$ in der That auch das Setzen des Radius-Vector-Zuges $AC$ selbst verknüpft. Man darf also sagen, dass das Setzen der complexen Zahl $a+b.i=r(\cos e+\sin e.i)$ aus dem Einheitszuge $AB$ den $R.V.$ Zug $AC$ hervor-

Digitized by Google

gehen lässt und dass dabei $e$ den Uebergang aus der positiven Richtung des Einheitszuges in die des $R.V.$ Zuges und $r$ als Factor von 1 die aus der Einheit hervorgehende lineare Grösse des Zuges $AC$ anzeigt. Nun sei die complexe Zahl $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}.i=\mathfrak{R}.(\cos\mathfrak{E}+\sin\mathfrak{E}.i)$, welche von $A$ zum Punkte $D$ hinführt, das Product aus den beiden complexen Zahlen $a+b.i=r.(\cos e+\sin e.i)$ und $a'+b'.i=r'.(\cos e'+\sin e'.i)$, so wird, wenn die erstere dabei als Multiplicand angesehen wird, diese für die Ausführung der Multiplication an die Stelle der Einheit des Multiplicators treten, es wird also der Radius-Vector-Zug $AD$ so aus dem $R.V.$ Zug $AC$ hervorgehen, wie es das Setzen des Multiplicators für die Bildung eines $R.V.$ Zuges aus dem Einheitszuge $AB$ vorschreibt, d. h. es wird $e'$ den Uebergang aus der positiven Richtung des $R.V.$ Zuges $AC$ in die des $R.V.$ Zuges $AD$ angeben, und $r'$ als Factor von $r$ die lineare Grösse des $R.V.$ Zuges $AD$ hervorbringen. Man würde also hiernach $\mathfrak{R}=rr'$ und $\mathfrak{E}=e+e'$ erhalten, welches vollkommen mit dem wirklichen Multiplicationsproducte der complexen Zahlen selbst übereinstimmt, indem

$$r.(\cos e+\sin e.i).r'(\cos e'+\sin e'.i)$$
$$=rr'.\{\cos(e+e')+\sin(e+e').i)$$

ist.

# L.

## Anwendung der Fresnel'schen Formeln zur Bestimmung der von einer beliebigen Anzahl paralleler durchsichtiger Platten reflectirten und gebrochenen polarisirten Lichtintensitäten.

Von

Herrn J. Fleschl,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Realschule zu Düsseldorf.

### 1.

Die Phänomene des Lichts werden hervorgebracht gedacht durch Vibrationen eines äusserst feinen höchst elastischen, das ganze Universum erfüllenden hypothetischen Fluidums, welches man Licht-Aether nennt. Die Vibrationen der Aethertheilchen erfolgen immer und jederzeit senkrecht zum Lichtstrahl, also stets in einer auf diesem letzteren senkrechten Ebene. Bleibt die Schwingungsrichtung der Aethertheilchen constant, d. h. sich immer parallel, so heisst das Licht polarisirt; ändert sich dieselbe aber continuirlich, so

Digitized by Google

heisst das Licht unpolarisirt. Ich nenne mit den französischen Physikern dasjenige polarisirte Licht, dessen Vibrationen senkrecht gegen die Einfallsebene erfolgen, in der Einfallsebene, dasjenige hingegen, dessen Oscillationen in der Einfallsebene geschehen, senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Da sich das unpolarisirte Licht betrachten lässt als eine continuirliche Aufeinanderfolge nach allen möglichen Richtungen polarisirten Lichts, so dass in einer sehr kleinen Zeit nach jeder Richtung gleich viele und gleich starke Schwingungen erfolgen: so kann dasselbe also, wenn es nach der Einfallsebene und senkrecht gegen dieselbe zerlegt wird, angesehen werden als ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen, jeder von der halben Intensität des unzerlegten unpolarisirten. Deshalb also, weil es der einfachere Fall ist, und weil das unpolarisirte Licht als aus polarisirtem bestehend angesehen werden kann, verdient mit der Betrachtung des polarisirten Lichts der Anfang gemacht zu werden.

2.

Fällt in der Einfallsebene polarisirtes Licht, dessen Vibrationen also senkrecht gegen diese Ebene erfolgen, von einer als Einheit angenommenen Intensität, unter dem Winkel $i$ auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media von verschiedener Dichtigkeit und wird dasselbe unter dem Winkel $i'$ refractirt: so sind die Intensitäten des reflectirten und durchgehenden Lichts respective ausgedrückt durch folgende Formeln:

$$A^2 = \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} \text{ und } C^2 = 1 - A^2 = \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2i'}{\sin^2(i+i')}.$$

Auf gleiche Weise sind die Intensitäten des gespiegelten und durchgehenden senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirten Lichts, dessen Schwingungen also in dieser Ebene erfolgen, unter übrigens ganz gleichen Umständen, gegeben durch die Ausdrücke:

$$B^2 = \frac{\tang^2(i-i')}{\tang^2(i+i')} \text{ und } D^2 = 1 - B^2 = \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2i'}{\sin^2(i+i')\cos^2(i-i')}.$$

Diese 4 Formeln wurden gegeben von Fresnel in den Mémoires de l'académie des sciences und tragen seinen ehrenvollen Namen. Man findet sie gleichfalls ausführlich entwickelt in Radicke's Handbuch der Optik. 1. Band. Seite 231. ff., so wie auch in den neueren Lehrbüchern der Physik, z. B. in Cours de physique à l'école polytechnique par Lamé, Tome II. §. 637. u. s. w., weshalb ich von ihnen, als von allgemein bekannten Formeln, in meiner kleinen Arbeit ausgehen zu dürfen geglaubt habe.

3.

Fällt ein Lichtstrahl unter einem beliebigen Winkel auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media von verschiedener Dichtigkeit, so wird derselbe im Auffallspunkte im Allgemeinen in zwei Strahlen getheilt, von denen der eine unter dem Auffallswinkel ins erstere Medium zurückgeworfen, der andere unter einem andern Winkel ins zweite Medium gebrochen wird. Fällt also in der Einfallsebene polarisirtes Licht unter den oben (Art. 2.) bezeichneten Bedingungen auf die obere Fläche einer Glasplatte mit parallelen



Digitized by Google

Begrenzungsebenen, so wird ein Theil $A^2$ in die Luft reflectirt, ein anderer Theil $C^2$ dringt unter dem Winkel $i'$ in die Glasmasse ein und trifft unter demselben Winkel $i'$ auf die untere Grenzebene der Platte. In diesem Punkte theilt sich dieser letztere Theil $C^2$ wieder in zwei Strahlen, von denen der eine ins Innere der Glasmasse gespiegelt wird, der andere unter dem Winkel $i$, also parallel der auffallenden Lichteinheit, aus der Platte heraustritt. Da sich nun die Werthe von $A^2$ und $C^2$ nicht ändern, wenn $i$ und $i'$ unter einander vertauscht werden, da also die Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes aus der entsprechenden Intensität des auffallenden stets auf dieselbe Weise bestimmt werden, das Licht mag unter dem Winkel $i$ aufs dichtere, oder unter dem Winkel $i'$ aufs minder dichte Medium auffallen: so erhalten wir also in diesem Falle, wie im ersteren, die Intensität des ins Innere der Glasmasse zurückgeworfenen und aus derselben heraustretenden Lichtes, wenn wir die Intensität $C^2$ des auffallenden respective mit $A^2$ und $C^2$ multipliciren. Die Intensität des ersteren Strahles ist also $C^2A^2$, die des andern $C^4$, so dass

$$C^2 = C^2A^2 + C^4 = C^2(A^2 + C^2).$$

Wenn wir auf diese Weise die Sache verfolgen, so ergiebt sich, dass innerhalb der Glasplatte zwischen deren beiden parallelen Begrenzungsebenen eine unendliche Menge von Reflexionen Statt haben. Alle diese reflectirten Strahlen haben das gemeinschaftlich, dass sie sämmtlich in der Einfallsebene liegen und unter dem Winkel $i'$ reflectirt werden. Und da man die Intensität des gespiegelten Strahls erhält, wenn man die Intensität des auffallenden mit $A^2$ multiplicirt, so werden die Intensitäten aller im Innern der Glasmasse reflectirten Strahlen also eine geometrische Progression bilden, deren erstes Glied $C^2$ und deren Quotient $A^2$ ist. Diese Reihe ist also:

$$C^2 + C^2A^2 + C^2A^4 + \text{etc.} = C^2(1 + A^2 + A^4 + \text{etc.}) = \frac{C^2}{1-A^2} = 1.$$

Um nun die Intensitäten der aus der oberen oder unteren Grenzebene der Platte heraustretenden parallelen Strahlen zu erhalten, haben wir nur die betreffenden auffallenden Lichtintensitäten, aus deren Zerlegung sie hervorgegangen sind, jedes Mal mit $C^2$ zu multipliciren. Die von der oberen Grenzebene der Platte unter dem Winkel $i$ ausgehende Lichtintensität wird also gleich sein der Summe folgender Reihe, deren Glieder die Lichtstärke der einzelnen Strahlen ausdrücken:

$$A^2 + C^4A^2 + C^4A^6 + C^4A^{10} = A^2 + A^2C^4(1 + A^4 + A^8 + \text{etc.}) =$$

$$A^2 + A^2 \cdot \frac{1-A^2}{1+A^2} = \frac{A^2}{1+A^2}(1 + A^2 + 1 - A^2) = \frac{2A^2}{1+A^2}.$$

Auf gleiche Weise erhält man die Intensität des aus der unteren Fläche der Platte heraustretenden Lichts durch die Summation der Reihe:

$$C^4 + C^4A^4 + C^4A^8 + \text{etc.} = C^4(1 + A^4 + A^8 + \text{etc.}) = \frac{1-A^8}{1+A^2}.$$

Folgende Gleichungen stellen die jedesmaligen auffallenden

Digitized by Google

Lichtintensitäten mit ihren respectiven reflectirten und gebrochenen Strahlen dar, in welche sie sich bei ihrer Zerlegung theilen:

$$1 = A^2 + C^2$$
$$C^2 = C^2A^2 + C^4 = C^2(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^2 = C^2A^4 + C^4A^2 = C^2A^2(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^4 = C^2A^6 + C^4A^4 = C^2A^4(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^6 = C^2A^8 + C^4A^6 = C^2A^6(A^2 + C^2), \text{ u. s. w.,}$$

deren Richtigkeit evident ist.

Aus der vorangehenden Entwicklung ergiebt sich übersichtlich dargestellt folgendes Resultat:

Fällt in der Einfallsebene polarisirtes Licht von der Intensität $= 1$ unter dem Winkel $i$ aus Luft auf die obere Fläche einer Glasplatte mit parallelen Begrenzungsebenen, so ist die Intensität alles von der obern Seite der Platte unter demselben Winkel $i$ ausgehenden Lichts gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{2A^2}{1+A^2} = A_1^2,$$

und die Intensität des unter dem Winkel $i$, also parallel der auffallenden Lichteinheit, aus der untern Fläche der Platte austretenden Lichts wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{1-A^2}{1+A^2} = C_1^2.$$

Wir finden also das von der obern oder untern Fläche der Platte kommende Licht, wenn wir die Intensität des auffallenden respective mit $A_1^2$ oder $C_1^2$ multipliciren.

4.

Wir denken uns nun $n$ parallele Platten auf einander liegend und bezeichnen, analog dem Vorigen, das unter ganz denselben Umständen von der obern Fläche der obersten Platte ausgehende Licht durch $A_n^2$ und das aus der untern Fläche der untersten heraustretende durch $C_n^2$. Wir fügen noch eine Platte hinzu und wollen bestimmen die bei der Vereinigung von $(n+1)$ Platten von der obersten und untersten Platte kommenden Lichtintensitäten, also $A_{n+1}^2$ und $C_{n+1}^2$.

Vor Allem ist einleuchtend, dass zwischen der untern Fläche der $n$ten und der obern Fläche der darunterliegenden $(n+1)$ten Platte eine unendliche Menge von Lichtintensitäten sich befinden werden. Wie oben (Art. 3.), so haben auch hier alle diese Strahlen das gemein, dass sie sämmtlich in der Einfallsebene liegen, dagegen aber alle unter dem Winkel $i$ von den bezeichneten beiden Flächen herkommen. Wir finden nun die Intensität irgend eines dieser Strahlen, wenn wir die Intensität desjenigen auffallenden, aus dessen Zerlegung er hervorgeht, respective mit $A_1^2$ oder $A_n^2$ multipliciren, jenachdem der auffallende Strahl auf die eine einzelne oder die $n$ vereinigten Platten trifft. Diese Strahlen sind also

$$C_n^2 + C_n^2A_1^2 + C_n^2A_1^2A_n^2 + C_n^2A_1^4A_n^2 + C_n^2A_1^4A_n^4 + \text{etc.}$$

Aus diesen letzteren sich zwischen den beiden Plattensystemen



Digitized by Google

bewegenden Strahlen finden wir nun die einzelnen, von ihnen herrührenden, aus der unteren Fläche der einen einzelnen, oder der oberen Fläche des Systems von $n$ Platten parallel unter einander heraustretenden Lichtintensitäten, wenn wir die betreffenden (auffallenden) Strahlen respective mit $C_1^2$ oder $C_n^2$ multipliciren, je nachdem dieselben auf die einzelne oder die $n$ Platten auffielen. Also wird die Intensität alles von der obern Fläche der $(n+1)$ auf einander liegenden Platten kommenden Lichts gleich sein der Summe folgender Reihe, deren Glieder die Lichtstärke der einzelnen Strahlen bezeichnen:

$$A_{n+1}^2 = A_n^2 + C_n^4 A_1^2 + C_n^4 A_1^4 A_n^2 + C_n^4 A_1^6 A_n^4 + \text{etc.} =$$
$$= A_n^2 + C_n^4 A_1^2 \{1 + A_1^2 A_n^2 + A_1^4 A_n^4 + \text{etc.}\}$$
$$= A_n^2 + \frac{C_n^4 A_1^2}{1 - A_1^2 A_n^2}.$$

Ebenso ist die Intensität aller aus der untersten $(n+1)$ten Platte heraustretenden parallelen Strahlen gleich der Summe folgender Reihe:

$$C_{n+1}^2 = C_n^2 C_1^2 + C_n^2 A_1^2 A_n^2 C_1^2 + C_n^2 A_1^4 A_n^4 C_1^2 + \text{etc.}$$
$$= C_1^2 C_n^2 \{1 + A_1^2 A_n^2 + A_1^4 A_n^4 + \text{und}\}$$
$$= \frac{C_1^2 C_n^2}{1 - A_1^2 A_n^2}.$$

Folgende Gleichungen stellen die auffallenden Lichtintensitäten mit ihren respectiven reflectirten und refractirten Strahlen dar, in welche sie sich zerlegen:

$$1 = A_n^2 + C_n^2,$$
$$C_n^2 = C_n^2 A_1^2 + C_n^2 C_1^2 = C_n^2 (A_1^2 + C_1^2),$$
$$C_n^2 A_1^2 = C_n^4 A_1^2 + C_n^2 A_1^2 A_n^2 = C_n^2 A_1^2 (A_n^2 + C_n^2),$$
$$C_n^2 A_1^2 A_n^2 = C_n^2 A_1^4 A_n^2 + C_n^2 A_1^2 A_n^2 C_1^2$$
$$= C_n^2 A_1^2 A_n^2 (A_1^2 + C_1^2)$$

u. s. w., deren Richtigkeit sich von selbst ergiebt.

Setzt man in den für $A_{n+1}^2$ und $C_{n+1}^2$ gefundenen allgemeinen Ausdrücken successive

$$n = 1,\ n = 2,\ n = 3 \text{ u. s. w.},$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\left\{\begin{array}{l} A_2^2 = \frac{4A^2}{1+3A^2}, \\ C_2^2 = \frac{1-A^2}{1+3A^2}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A_3^2 = \frac{6A^2}{1+5A^2}, \\ C_3^2 = \frac{1-A^2}{1+5A^2}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A_4^2 = \frac{8A^2}{1+7A^2}, \\ C_4^2 = \frac{1-A^2}{1+7A^2}. \end{array}\right. \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus schliessen wir allgemein:

$$A_n^2 = \frac{2nA^2}{1+(2n-1)A^2} \text{ und } C_n^2 = \frac{1-A^2}{1+(2n-1)A^2} \ldots. \quad (\alpha).$$

so dass jederzeit

$$1 = A_n^2 + C_n^2.$$

Wir fassen zusammen. Fällt in der Einfallsebene polarisirtes

Digitized by Google

Licht von einer als Einheit angenommenen Intensität unter dem Winkel $i$ aus Luft auf $n$ über einander liegende parallele Glasplatten auf, so ist die Intensität alles von der obersten Platte unter demselben Winkel ausgehenden Lichtes $= A_n^2$ und die Intensität des aus der untersten Platte parallel der auffallenden Lichteinheit heraustretenden Lichts $= C_n^2$. Beide Theile bleiben in der Einfallsebene polarisirt.

5.

Da für Licht, welches senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirt ist, an die Stelle von $A^2$ in den vorhergehenden Entwicklungen $B^2$ tritt, übrigens unter denselben Bedingungen alles genau dasselbe bleibt, so werden also, analog den beiden vorigen $(\alpha)$, die Formeln

$$B_n^2 = \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2},\quad D_n^2 = \frac{1-B^2}{1+(2n-1)B^2}\cdots\cdots (\beta)$$

die von der obersten und untersten Platte für diesen Fall kommenden polarisirten Lichtintensitäten ausdrücken, so dass wiederum

$$1 = B_n^2 + D_n^2.$$

Fällt nun aber unter denselben Umständen gewöhnliches unpolarisirtes Licht auf von der Intensität $= 2$, und denken wir uns dasselbe auf die oben (Art. 1.) angedeutete Weise in ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen zerlegt, jeder von der Intensität $= 1$, und von denen die Vibrationen des einen in der Einfallsebene, die des andern senkrecht gegen diese Ebene erfolgen, so wird also die Intensität alles von der obersten Platte ausgehenden Lichts durch

$$A_n^2 + B_n^2,$$

und des aus der untersten Platte heraustretenden durch

$$C_n^2 + D_n^2$$

ausgedrückt werden können. Ueber die Natur dieser beiden Lichtintensitäten wollen wir keinen voreiligen Schluss machen.

6.

Formt man den Ausdruck

$$A^2 = \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')}$$

vermöge der Fundamentalgleichung der Brechung des Lichts

$$\sin i = \mu \sin i'$$

um, so sieht man, dass derselbe sein Minimum $= \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2$ oder Maximum $= 1$ erreicht, je nachdem

$$i = 0 \text{ oder } i = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Auch lässt sich durch Differentiation leicht nachweisen, dass der Werth von $A^2$ von der einen Grenze zur andern mit dem Auffallswinkel continuirlich wächst.

Der Werth von

Digitized by Google

$$B^2 = \frac{\tang^2(i - i')}{\tang^2(i + i')}$$

hingegen erreicht sein Minimum $= 0$, wenn

$$i + i' = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Alsdann aber ist

$$\sin i' = \cos i,$$

folglich

$$\sin i = \mu \sin i' = \mu \cos i$$

und

$$\tang i = \mu.$$

Fällt also senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht, unter dem durch diese Gleichung bestimmten Winkel auf die Trennungsfläche zweier durchsichtiger Media auf, so wird durchaus keine Spur von Licht reflectirt, sondern alles dringt ins zweite Medium ein. Fällt hingegen gewöhnliches unpolarisirtes Licht auf, so enthält das gespiegelte Licht

$$A^2 + B^2,$$

weil $B^2 = 0$ ist, nur in der Einfallsebene polarisirtes Licht und man sagt deshalb, das Licht sei durch Reflexion vollkommen polarisirt. Und daher heisst dieser Auffallswinkel auch der Polarisationswinkel oder der Winkel der vollkommenen Polarisation. Es ist leicht zu zeigen, dass, weil

$$i + i' = \frac{\pi}{2}$$

ist, der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht.

Für $i = 0$ ist $B^2 = \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^2$;

Für $i = \text{arc}(\tang = \mu)$, $B^2 = 0$, also Minimum.

Für $i = \frac{\pi}{2}$, $B^2 = 1$, also Maximum.

Aus dem Vorangehenden ergeben sich folgende Gesetze:

1) Fällt polarisirtes Licht auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media, so wird bei senkrechter Incidenz nur ein Theil reflectirt, bei horizontaler dagegen alles, das auffallende Licht mag polarisirt sein in der Einfallsebene oder senkrecht gegen dieselbe.

2) Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wächst die Intensität des gespiegelten Lichts mit der Schiefe der Incidenz.

3) Wenn hingegen das Licht polarisirt ist senkrecht zur Einfallsebene, so wird bei einem gewissen von der lichtbrechenden Kraft des zweiten Mittels abhängigen schiefen Auffallswinkel (Polarisationswinkel) keine Spur gespiegelt, sondern alles dringt ins zweite Mittel ein. Je weiter sich aber das auffallende Licht nach der einen oder der andern Seite von dieser Grenze entfernt, desto mehr wird reflectirt.

7.

Die Werthe von $A_n^2$ und $B_n^2$ sind abhängig von $A^2$ und $B^2$

Digitized by Google

einerseits, andererseits von der Plattenanzahl $n$. Wir wollen versuchen, die Gesetze dieser Abhängigkeit zu bestimmen.

I. Es seien $A^2$ und $B^2$ constant, $n$ variabel.

*a*) Wenn $n$ wächst, so nähert sich der reciproke Werth von $A_n^2$, nämlich

$$\frac{1}{A_n^2} = 1 + \frac{1 - A^2}{2nA^2},$$

der Einheit und ist $n = \infty$, so ist $\frac{1}{A_\infty^2} = 1$, folglich auch $A_\infty^2 = 1$.

*b*) Offenbar gilt von $B_n^2$ dasselbe, so lange $B^2 > 0$.

*c*) Ist aber $B^2 = 0$, so ist $B_n^2 = 0$ unabhängig von $n$, selbst für $n = \infty$.

*d*) Weil

$$C_n^2 = 1 - A_n^2 \text{ und } D_n^2 = 1 - B_n^2,$$

so gilt von dem alle Platten durchdringenden Lichte das Entgegengesetzte des eben Angeführten.

II. Es sei $n$ constant, $A^2$ und $B^2$ aber veränderlich.

*e*) Wächst $A^2$, so wird in dem Bruche

$$\frac{1 - A^2}{2nA^2}$$

der Zähler kleiner, der Nenner grösser, also aus beiden Gründen der Werth des Bruches, mithin auch der Werth von

$$\frac{1}{A_n^2} = 1 + \frac{1 - A^2}{2nA^2}$$

kleiner; folglich wächst $A_n^2$, wenn $A^2$ zunimmt.

*f*) Nimmt $B^2$ ab, so nähert sich in dem Bruche

$$\frac{1 - B^2}{2nB^2}$$

der Zähler der Einheit, der Nenner immer mehr der 0; es wächst folglich der ganze Bruch, mithin auch der Werth von

$$\frac{1}{B^2} = 1 + \frac{1 - B^2}{2nB^2};$$

also muss $B_n^2$ selbst kleiner werden, wenn $B^2$ kleiner wird.

*g*) Wenn $i = 0$ oder $i = \frac{\pi}{2}$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6.) folglich $A_n^2 = B_n^2$.

Hieraus schliessen wir folgende Gesetze:

1) Fällt polarisirtes Licht unter einem beliebigen Winkel auf ein System über einander liegender paralleler durchsichtiger Platten, so wird im Allgemeinen um so mehr reflectirt (von der oberen Fläche der obersten Platte ausgehen), also um so weniger die Platten durchdringen, je grösser deren Anzahl ist.

2) Ist die Anzahl der Platten unendlich, so wird alles Licht reflectirt und keine Spur dringt durch, welches auch der Auffallswinkel sei.

Digitized by Google

Dieses gilt im Allgemeinen, das auffallende Licht mag in der Einfallsebene oder senkrecht gegen diese polarisirt sein.

3) Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wird bei unveränderlicher Plattenzahl um so mehr reflectirt, also um so weniger durchgehen, je schiefer das Licht auffällt.

4) Ist dagegen das Licht senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirt, so wird, wenn die Anzahl der Platten dieselbe bleibt, um so mehr reflectirt, also um so weniger durchdringen, je weiter sich nach der einen oder der andern Seite der Einfallswinkel vom Polarisationswinkel entfernt.

5) Fällt aber für diesen letzteren Fall das Licht unter dem Polarisationswinkel selbst auf, so dringt alles durch die Platten hindurch und es wird keine Spur mehr reflectirt, selbst dann nicht, wenn die Anzahl der Platten unendlich gross wäre.

Dieses ist der einzige Fall der Ausnahme, welcher uns nöthigte, so eben bei 1 und 2 den Ausdruck „im Allgemeinen" hinzuzufügen,

6) Fällt gewöhnliches Licht senkrecht auf oder horizontal, so ist man nicht im Stande dasselbe zu polarisiren weder durch Reflexion, noch durch Refraction, mag man sich hierzu bloss einer spiegelnden Fläche bedienen oder eine beliebige Anzahl von Platten anwenden.

8.

Es wurde oben (Art. 1) berührt, dass gewöhnliches unpolarisirtes Licht sich betrachten lasse als ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen von gleicher Intensität. Ebenso lassen sich umgekehrt senkrecht zu einander polarisirte Strahlen von gleicher Lichtstärke ansehen als gewöhnliches unpolarisirtes Licht. Auch in Bezug auf ihre Wirkungen zeigt die Beobachtung keinen Unterschied. Fällt also nun auf unser Plattensystem gewöhnliches Licht, so enthält, wie bereits (Art. 5) gezeigt wurde, sowohl das zurückgeworfene, als durchgehende Licht senkrecht zu einander polarisirte Strahlen. In dem reflectirten Lichte z. B. bildet nun der minder intensive Strahl mit einem gleichen Theile des andern gewöhnliches Licht und es bleibt also ausserdem noch ein Ueberschuss polarisirten Lichtes von der Beschaffenheit des lichtstärkeren Strahles. Ein Gleiches gilt vom refractirten Lichte. Da nun, wie wir bewiesen haben (Art. 4 und 5)

$$1 = A_n^2 + C_n^2,\ 1 = B_n^2 + D_n^2,$$

so folgt daraus

$$A_n^2 - B_n^2 = D_n^2 - C_n^2 \ldots . \quad (\gamma)$$

Und hieraus schliessen wir folgenden Satz;

In dem reflectirten und durchgehenden Lichte finden sich ausser dem in jedem enthaltenen gewöhnlichen Lichte gleiche Intensitäten senkrecht zu einander polarisirter Strahlen, die Plattenzahl und der Einfallswinkel seien, welche sie wollen. Für eine Platte ist dieses Gesetz das bekannte Theorem von Arago.

9.

Unter der Vibrationsebene eines polarisirten Strahles verstehen wir diejenige Ebene, welche durch den betreffenden Strahl

Digitized by Google

und die constante Schwingungsrichtung seiner Aethertheilchen geht. Unter **Polarisationsebene** aber die durch den Strahl auf die Oscillationsrichtung senkrecht geführte Ebene. Es stehen also beide Ebenen stets auf einander senkrecht. Denkt man sich nun durch denjenigen Punkt, in welchem ein Lichtstrahl die Grenze zweier durchsichtiger Media trifft, auf die Richtung des Strahls eine Ebene senkrecht gelegt, so werden in dieser oder ihr parallel die Schwingungen der Aethertheilchen erfolgen können nach jeder beliebigen Richtung. Dreht sich die Vibrationsrichtung in dieser Ebene um den Auffallspunkt im Kreise herum, so dreht sich also auch die Vibrationsebene und mit ihr die Polarisationsebene um den einfallenden Strahl. Macht die Schwingungsrichtung mit der im Auffallspunkt auf die Einfallsebene errichteten Senkrechten den Winkel $\alpha$, so bildet denselben Winkel $\alpha$ also auch die Polarisationsebene mit der Einfallsebene und man sagt, das **Licht sei in dem Azimuth $\alpha$ polarisirt.** In untenstehender Figur (s. am Ende der Abhandlung) sei nun $ACB$ die Einfallsebene, $CD$ die Polarisationsebene, $DCA = \alpha$ das Azimuth der letzteren, $CE$ die Schwingungsrichtung des Aethertheilchens $C$, $CM = 1$ die halbe Oscillationsweite desselben, deren Componenten nach der Einfallsebene und senkrecht gegen diese respective

$$CB = \sin\alpha \text{ und } MB = \cos\alpha$$

sein werden, da

$$\angle DCE = \frac{\pi}{2}.$$

Und es lässt sich also, weil die Lichtintensitäten proportional sind dem Quadrate der Oscillationsgeschwindigkeiten, die in dem Azimuth $\alpha$ polarisirte Lichteinheit in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen von den Intensitäten $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ zerlegen, so dass wiederum

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Auf gleiche Weise können umgekehrt zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen in einen einzigen zusammengesetzt werden, dessen Azimuth $\tang^2\alpha$ offenbar gefunden wird, wenn man die Intensität des in der Einfallsebene schwingenden Strahles durch die Intensität des senkrecht gegen diese Ebene vibrirenden dividirt. Fällt also auf unser Plattensystem gewöhnliches Licht, so ist sowohl das reflectirte, als durchgehende polarisirt, jedes in einem besondern Azimuth. Nennen wir das Azimuth des reflectirten $\alpha_n$, das des refractirten $\beta_n$, so ist also

$$\tang^2\alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} = \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \frac{1+(2n-1)A^2}{2nA^2} =$$

$$\frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \frac{B^2}{A^2} = \frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \tang^2\alpha;$$

und

$$\tang^2\beta_n = \frac{D_n^2}{C_n^2} = \frac{1-B^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \frac{1+(2n-1)A^2}{1-A^2} =$$

$$\frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \frac{1-B^2}{1-A^2} = \frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2} \cdot \tang^2\beta;$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird

Digitized by Google

$$\frac{B^2}{A^2} = \text{tang}^2\alpha \text{ und } \frac{1-B^2}{1-A^2} = \text{tang}^2\beta.$$

Folglich ist allgemein

$$\text{tang}^2\alpha_n : \text{tang}^2\beta_n = \text{tang}^2\alpha : \text{tang}^2\beta.$$

Aus Art. 2 aber folgt

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} \text{ und}$$

$$\frac{1-A^2}{1-B^2} = \cos^2(i-i'),$$

mithin ist

$$\text{tang}^2\alpha : \text{tang}^2\beta = \cos^2(i+i'), \text{ also auch}$$

$$\text{tang}^2\alpha_n : \text{tang}^2\beta_n = \cos^2(i+i') \text{ oder}$$

$$\text{tang}\,\alpha_n = \mp\cos(i+i')\,\text{tang}\,\beta_n \ldots\ldots (\delta)$$

Beide Azimuthe stehen also immer in dieser einfachen Beziehung zu einander. Jedes ist eine Function des Einfallswinkels und der Plattenzahl, und wir wollen die Gesetze dieser Abhängigkeit zu bestimmen suchen.

10.

Wir haben gefunden

$$\text{tang}\,\alpha_n = \pm\cos(i+i').\,\text{tang}\,\beta_n.$$

Da

$$\cos(i+i') < 1,$$

so ist

$$\text{tang}\,\alpha_n < \text{tang}\,\beta_n, \text{ und}$$

$$\alpha_n < \beta_n$$

unabhängig von $i$ und $n$.

1. Es sei $n$ constant, $i$ also auch $A^2$ und $B^2$ variabel.

a) So oft $A^2 = B^2$, so ist $\text{tang}^2\alpha_n = 1 = \text{tang}^2\beta_n$, also $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

b) Ist $i = 0$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6), mithin $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

c) Ist $i = \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 = 0$, folglich auch $B_n^2 = 0$. Und da

$$\text{tang}^2\alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} \text{ (Art. 9)},$$

so ist für diesen Fall $\text{tang}\,\alpha_n = 0$, folglich $\alpha_n = 0$. Aber

$$\text{tang}^2\beta_n = \frac{1+(2n-1)A^2}{1-A^2} = 1 + \frac{2nA^2}{1-A^2} > 1, \text{ also}$$

$$\beta_n > \frac{\pi}{4}. \quad \text{Für } n = \infty \text{ ist } \beta_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

d) Ist $i > \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 > 0$, folglich $B_n^2 > 0$, also $\alpha_n > 0$. Aber $\text{tang}^2\beta_n < \infty$, also $\beta_n < \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

e) Ist $i = \frac{\pi}{2}$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6), folglich $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

Hieraus ergeben sich folgende Gesetze:

1) Die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes bildet mit der Einfallsebene immer einen kleineren Winkel, als die Polarisationsebene des durchgehenden, der Einfallswinkel und die Plattenzahl seien, welche sie wollen.

2) Fällt das Licht senkrecht auf, so ist das Azimuth jeder der beiden Polarisationsebenen $= \frac{\pi}{4}$, folglich sowohl das reflectirte, als durchgehende Licht unpolarisirt.

3) Wächst der Einfallswinkel, so wird das Azimuth des reflectirten Lichtes kleiner, das des refractirten grösser. Erreicht der Einfallswinkel den Polarisationswinkel, so fällt die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes zusammen mit der Einfallsebene. Das Azimuth des durchgehenden Lichtes aber wächst mit der Plattenzahl und ist $= \frac{\pi}{2}$, wenn diese unendlich gross ist.

4) Wächst der Einfallswinkel über den Polarisationswinkel hinaus, so wächst das Azimuth des reflectirten Lichtes wieder, das des durchgehenden nimmt ab.

5) Fällt das Licht horizontal auf, so ist das Azimuth des reflectirten Lichtes wieder gleich $\frac{\pi}{4}$, folglich das reflectirte Licht selbst unpolarisirt. In diesem Falle dringt kein Licht durch.

II. Es sei der Einfallswinkel, also auch $A^2$ und $B^2$ constant und $n$ veränderlich.

Es ist

$$B^2 = \frac{\tan^2(i-i')}{\tan^2(i+i')} = \frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} \cdot \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} = \frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} \cdot A^2.$$

Da aber

$$\frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} < 1,$$

so ist

$$B^2 < A^2.$$

Vergleicht man nun die reciproken Werthe von $A_n^2$ und $B_n^2$, nämlich

$$\frac{1}{A_n^2} = 1 + \frac{1-A^2}{2nA^2}, \quad \frac{1}{B_n^2} = 1 + \frac{1-B^2}{2nB^2},$$

so folgt

$$\frac{1}{A_n^2} < \frac{1}{B_n^2},$$

folglich

$$A_n^2 > B_n^2.$$

Und da

$$C_n^2 = 1 - A_n^2, \quad D_n^2 = 1 - B_n^2,$$

so ist also

$$D_n^2 > C_n^2.$$

Digitized by Google

Nun aber ist

$$\text{tang}^2 \alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} < 1, \text{ folglich } \alpha_n < \frac{\pi}{4} \text{ und}$$

$$\text{tang}^2 \beta_n = \frac{D_n^2}{C_n^2} > 1, \text{ also } \beta_n > \frac{\pi}{4}.$$

Wächst $n$, so nähert sich das Verhältniss von $\frac{B_n^2}{A_n^2}$ der Einheit und für $n = \infty$ ist dasselbe $= 1$, folglich $\alpha_\infty = \frac{\pi}{4}$. Es dringt alsdann kein Licht durch die Platten hindurch, es sei denn, dass dasselbe unter dem Polarisationswinkel auffalle, wo $\beta_\infty = \frac{\pi}{2}$ ist.

Hieraus ergiebt sich folgendes Gesetz:
Ist die Plattenzahl endlich, so ist das Azimuth des reflectirten Lichtes kleiner, das des durchgehenden grösser als $\frac{\pi}{4}$. Mit der Plattenzahl wächst das Azimuth des reflectirten Lichtes und nähert sich $\frac{\pi}{4}$. Ist

$$n = \infty, \text{ so ist } \alpha_\infty = \frac{\pi}{4} \text{ und } \beta_\infty = \frac{0}{0}.$$

Fällt hingegen das Licht auf eine unendlich grosse Anzahl von Platten unter dem Polarisationswinkel, so ist

$$\alpha_\infty = \frac{\pi}{4} \text{ und } \beta_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

11.

Wir können nicht umhin, mit einem Worte einer Discontinuität in unsern Formeln zu erwähnen, die wir in den Erscheinungen der Natur nicht leicht anzunehmen geneigt sind. Es wird nämlich senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht, welches auf eine unendlich grosse Plattenanzahl auffällt, stets und in allen Fällen ganz reflectirt, welches auch der Einfallswinkel von der senkrechten bis zur horizontalen Incidenz sein möge; erreicht derselbe aber den Polarisationswinkel, so dringt plötzlich alles Licht durch die Platten hindurch. Es möchte vielleicht nicht weniger gewagt sein, die Natur eines solchen Sprunges in ihren Erscheinungen ohnmächtig, als unsere Formeln deshalb falsch nennen zu wollen. Das Unendliche ist bloss eine Grenze, der wir uns vielleicht nicht einmal nähern können, die wir also um so weniger zu erreichen vermögen; und ebenso wenig, wie wir uns durch irgend einen Sprung, wie gross derselbe auch immerhin sein möge, vom Endlichen an jene Grenze, das Unendliche, versetzen können: ebenso wenig können wir aber auch behaupten, dass die Natur nicht im Stande wäre, wenn man sie veranlassen könnte, sich unter solchen Verhältnissen zu äussern, eine ähnliche Discontinuität in ihren Erscheinungen zu zeigen.

12.

Fragen wir, unter welchem Winkel das Licht auf eine beliebige Anzahl paralleler Platten auffallen müsse, damit die Intensität des reflectirten Lichtes gleich sei der des durchgehenden, so haben

Digitized by Google

wir, da die Intensität des auffallenden Lichtes $=2$ angenommen wurde, zu dieser Bestimmung offenbar die Gleichung:

$$A_n^2 + B_n^2 = 1$$

oder

$$\frac{2nA^2}{1+(2n-1)A^2} + \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2} = 1,$$

welche entwickelt auf folgende Bedingung führt:

$$A^2 + B^2 + (4n^2-1)A^2B^2 = 1.$$

Nun aber ist

$$A^2 = \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} = \left\{\frac{\sqrt{\mu^2-\sin^2 i}-\cos i}{\sqrt{\mu^2-\sin^2 i}+\cos i}\right\}^2 = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$$

$$B^2 = \frac{\tang^2(i-i')}{\tang^2(i+i')} = \left\{\frac{\sqrt{\mu^2-\sin^2 i}-\mu^2\cos i}{\sqrt{\mu^2-\sin^2 i}+\mu^2\cos i}\right\}^2 = \left(\frac{p-\mu^2q}{p+\mu^2q}\right)^2,$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird

$$\sqrt{\mu^2-\sin^2 i} = p \text{ und } \cos i = q.$$

Diese Werthe für $A^2$ und $B^2$ substituirt geben:

$$\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \left(\frac{p-\mu^2q}{p+\mu^2q}\right)^2 + (4n^2-1)\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\left(\frac{p-\mu^2q}{p+\mu^2q}\right)^2 = 1.$$

Wir können diese Gleichung nach und nach folgendergestalt verändern:

$$(p-q)^2(p+\mu^2q)^2+(p-\mu^2q)^2(p+q)^2+(4n^2-1)(p-q)^2(p-\mu^2q)^2 = (p+q)^2(p+\mu^2q)^2,$$

$$(p+\mu^2q)^2\{(p-q)^2-(p+q)^2\} - (p-\mu^2q)\{(p-q)^2-(p+q)^2\} + 4n^2(p-q)^2(p-\mu^2q) = 0,$$

$$\{(p-q)^2-(p+q)^2\}\{(p+\mu^2q)^2-(p-\mu^2q)^2\} + 4n^2(p-q)^2(p-\mu^2q)^2 = 0,$$

$$-4\mu^2p^2q^2 + n^2(p-q)^2(p-\mu^2q)^2 = 0,$$

$$n^2(p-q)^2(p-\mu^2q)^2 = 4\mu^2p^2q^2,$$

$$(p-q)(p-\mu^2q) = \mp\frac{2\mu}{n}\cdot pq.$$

Dividirt man durch $pq$ und setzt $\frac{p}{q} = x$, so kommt

$$(x-1)\left(1-\frac{\mu^2}{x}\right) = \mp\frac{2\mu}{n}, \text{ also}$$

$$x^2 - \left(1+\mu^2 \pm \frac{2\mu}{n}\right)x = -\mu^2,$$

und setzt man

$$1+\mu^2 \pm \frac{2\mu}{n} = P, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{P \mp \sqrt{P^2-4\mu^2}}{2} = Q,$$

Digitized by Google

und hieraus

$$x^2 = \frac{\mu^2 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i} = Q^2$$

folglich

$$\sin^2 i = \frac{Q^2 - \mu^2}{Q^2 - 1} \quad \ldots . \quad (\varepsilon)$$

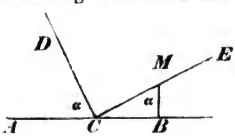
Durch diese Gleichung ist also der Winkel bestimmt, unter dem das Licht auf eine beliebige Anzahl paralleler Platten auffallen muss, damit gleiche Mengen reflectirt werden und durchgehen. Zugleich aber geht aus derselben auch hervor, dass einen solchen Winkel zu finden jedesmal dann unmöglich ist, wenn

$$\mu < 1,$$

oder was dasselbe heisst, wenn das Licht aus einem Mittel von stärkerer auf eins von einer minder starken lichtbrechenden Kraft auffällt.

13.

Nach den Fresnel'schen Formeln (Art. 2.) für die Intensität des gespiegelten und durchgehenden polarisirten Lichts ist die reflectirte Lichtstärke so lange Null, als sich die Dichtigkeit des durchsichtigen Mittels nicht ändert; und es müsste folglich bei einem in seiner ganzen Masse vollkommen homogenen und gleich dichten durchsichtigen Körper alles Licht auf seine untere Fläche auffallen, was auf der oberen Fläche in den Körper eindrang. Da aber in der Natur wohl kaum ein solcher Körper existiren wird, indem die Schwerkraft, der beständige Temperaturwechsel und dergleichen Umstände mehr, leicht eine verschiedene Dichtigkeit an verschiedenen Punkten des Körpers hervorbringen: so folgt daraus, dass sich das Licht beim Durchgang durch durchsichtige Körper offenbar schwächen muss. Betrachten wir z. B. eine ruhige Flüssigkeit, auf deren eine horizontale Grenzfläche Licht auffallt. Da strenge genommen die Flüssigkeit in jedem horizontalen Schnitte eine andere Dichtigkeit hat, so müssen nothwendigerweise auch im Innern derselben Reflexionen des eingedrungenen Lichts Statt finden und es gelten mithin für einen solchen Fall ähnliche Formeln, wie wir sie für die Intensität des gespiegelten und durchgehenden Lichts bei einer beliebigen Anzahl paralleler durchsichtiger Schichten entwickelt haben.




Digitized by Google

# LI.

## Eigenschaften der ungeraden Zahlen in Bezug auf beliebige Potenzen der einzelnen Glieder der natürlichen Zahlenreihe.

Von

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

zu Gotha.

---

Der im ersten Hefte des gegenwärtigen Archivs bewiesene Turner'sche Lehrsatz von den ungeraden Zahlen ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren Theorems, das ich schon vor mehreren Jahren gefunden, aber nicht für neu gehalten habe. Es ist nämlich:

$$1^{2n} = 1$$
$$2^{2n} = 1+3+5+7+\ldots+(2.2^n-1)$$
$$3^{2n} = 1+3+5+7+\ldots+(2.3^n-1)$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$p^{2n} = 1+3+5+7+\ldots+(2.p^n-1),$$

d. h. jede Potenz einer ganzen Zahl $p$ von dem geraden Exponenten $2n$ ist gleich der Summe aller ungeraden Zahlen von der ersten an bis zur $p^n$ten; ingleichen:

$$1^{2n+1} = 1$$
$$2^{2n+1} = (2^n.1+1)+(2^n.1+3)+\ldots+[2^n.1+(2.2^n-1)]$$
$$3^{2n+1} = (3^n.2+1)+(3^n.2+3)+\ldots+[3^n.2+(2.3^n-1)]$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$p^{2n+1} = [p^n(p-1)+1]+[p^n(p-1)+3]+\ldots+[p^n(p-1)+(2p^n-1)]$$

d. h. jede Potenz einer ganzen Zahl $p$ von dem ungeraden Exponenten $2n+1$ ist gleich der Summe von $p^n$ auf einander folgenden ungeraden Zahlen, deren erste gleich $p^n(p-1)+1$ ist.

Der Beweis dieser Sätze ist höchst einfach. Bezeichnen nämlich $a$, $d$ und $z$ beziehungsweise das erste Glied, die Differenz und die Gliederzahl einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, so ist deren Summe $s = az + \frac{1}{2}z(z-1)d$. Im vorliegenden Falle ist nun für einen geraden Exponenten der Potenz

Digitized by Google

$$a = 1,\ d = 2,\ z = p^n,$$

mithin wird

$$s = 1 \cdot p^n + \tfrac{1}{2}p^n(p^n - 1) \cdot 2 = p^{2n}.$$

Für einen ungeraden Exponenten der Potenz hingegen wird:

$$a = p^n(p-1) + 1,\quad d = 2,\quad z = p^n$$

und folglich:

$$s = [p^n(p-1) + 1]\, p^n + \tfrac{1}{2}p^n(p^n - 1) \cdot 2 = p^{2n+1}.$$

Hieraus ergeben sich sofort durch Addition von $p^n$ die Ausdrücke:

$$p^{2n} + p^n = p^n(p^n + 1) = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2 \cdot p^n$$

$$p^{2n+1} + p^n = p^n(p^{n+1} + 1) = [p^n(p-1) + 2] + [p^n(p-1) + 4] + \ldots + [p^n(p-1) + 2p^n],$$

welche die entsprechenden Eigenschaften der auf einander folgenden geraden Zahlen enthalten, wie dies von dem Herrn Herausgeber bereits für die dritten Potenzen bemerkt worden ist. Demnach ist also z. B.

$1^2 = 1$
$2^2 = 1 + 3$
$3^2 = 1 + 3 + 5$
.
.
$p^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2p - 1)$

$1^3 = 1$
$2^3 = 3 + 5$
$3^3 = 7 + 9 + 11$
.
.
.
$p^3 = [p(p-1) + 1] + [p(p-1) + 3] + \ldots + [p(p-1) + (2p-1)]$

$1^4 = 1$
$2^4 = 1 + 3 + 5 + 7$
$3^4 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$
.
.
$p^4 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2p^2 - 1)$

$1^5 = 1$
$2^5 = 5 + 7 + 9 + 11$
$3^5 = 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35$
$4^5 = 49 + 51 + 53 + \ldots + 77 + 79$
.
.
$p^5 = [p^2(p-1) + 1] + [p^2(p-1) + 3] + \ldots + [p^2(p-1) + (2p^2 - 1)]$

u. s. w.

Bei ihrer grossen Einfachheit dürften die vorliegenden Lehrsätze ein zweckmässiges Beispiel zur Anwendung der arithmetischen Progressionen darbieten.

Digitized by Google

# LII.

## Zur Theorie der bestimmten Integrale.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Die Entwickelung der schönen Theoreme von Lagrange und Fourier beruht bekanntlich auf der Untersuchung der Gränze, welcher sich das bestimmte Integral

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta,\ \pi > c > 0,$$

für ganze, positive, wachsende $n$ nähert, vorausgesetzt, dass die Funktion $f(\Theta)$ während des Integrationsintervalles weder unendlich gross, noch unstetig werde *).

Diese Aufgabe lässt sich, wie ich glaube, völlig streng und kurz, folgendermassen lösen.

1) Wir nehmen erstlich $c = \frac{\pi}{2}$, $2n+1 = m$ (der Kürze wegen) und führen in das Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta$$

eine neue Veränderliche $z = m\Theta$, also $\Theta = \frac{z}{m}$, $d\Theta = \frac{dz}{m}$ ein. Dadurch wird

$$J = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin z}{m\sin\frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right)dz.$$

Dieses Integral zerlegen wir in eine Reihe anderer, welche sämmtlich nach dem Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten, wobei wir $\frac{\sin z}{m\sin\frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right)$ kurz mit $F(z)$ bezeichnen. Also

*) Man sehe hierüber die vortreffliche Abhandlung des Hrn. Prof. Lejeune Dirichlet im Journal f. r. u. a. Mathematik v. Crelle, B. IV. S. 157.



Digitized by Google

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(z)dz+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(z\,dz+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} F(z)dz+..+\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{n\pi} F(z)dz$$

$$+\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} F(z)dz.$$

Zwei auf einander folgende allgemeine Glieder dieser Reihe sind

$$\int_{(r-\frac{1}{2})\pi}^{r\pi} F(z)dz,\ \int_{r\pi}^{(r+\frac{1}{2})\pi} F(z)dz$$

Diese beiden Integrale lassen sich leicht auf die Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bringen, indem man im ersten $z=r\pi-x$, im zweiten $z=r\pi+x$ setzt, wo $x$ eine neue Veränderliche bedeutet. Dann hat man, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} F(r\pi-x)dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r\pi+x)dx;$$

und wenn man dem ersten Integrale das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, so vertauschen die Gränzen ihre Plätze, und stehen dann genau so wie im zweiten.

Die Vorzeichen unserer Integrale finden sich durch ein leichtes Raisonnement. Der Zeichenwechsel in jenen Integralen hängt bloss von dem Vorzeichen des sin $z$ in $F(z)$ ab. Da nun der Sinus positiv ist von $z=0$ bis $z=\pi$, negativ von $z=\pi$ bis $z=2\pi$, positiv von $z=2\pi$ bis $z=3\pi$, u. s. f., so ist auch das erste Paar unserer Integrale positiv, das zweite negativ, das dritte positiv u. s. f. So haben wir

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\pi-x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\pi+x)dx$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2\pi-x)dx+\ldots$$

indem wir den Index $r=1, 2, \ldots n$ setzen; oder

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x)+F(\pi-x)-F(\pi+x)-F(2\pi-x)+\ldots]dx.$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist

$$F(r\pi\pm x)=\frac{\sin(r\pi\pm x)}{m\sin\frac{r\pi\pm x}{m}}f(\frac{r\pi\pm x}{m})=\frac{\sin x}{m\sin\frac{r\pi\pm x}{m}}f(\frac{r\pi\pm x}{m}),$$

wobei das Vorzeichen nicht beachtet zu werden braucht, weil wir den Wechsel schon kennen.

Wollen wir nun die Gränze bestimmen, welcher sich das Integral $J$ für wachsende $n(m=2n+1)$ nähert, so haben wir die Gränze von $F(r\pi\pm x)$ für wachsende $m$ zu untersuchen, wobei zu berücksichtigen ist, dass $r$ die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis $n$ durchläuft. Wir haben daher 2 Fälle zu unterscheiden.

Digitized by Google

1) Es sei $r$ endlich, also das zugehörige Glied endlich weit vom Anfange entfernt. Dann ist $r\pi \pm x$ etwas Endliches $= u$, $F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{m \sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m})$ oder, wenn man den sich hebenden Faktor $u$ einsetzt,

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{u} \cdot \text{Lim } \frac{\frac{u}{m}}{\sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m}) = \frac{\sin x}{u} f(0)$$

oder

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{r\pi \pm x} f(0).$$

2) Wäre $r$ so gross, das schon $\frac{r\pi \pm x}{m}$ eine endliche Grösse $v$ wäre, so ist

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \text{Lim } \frac{\sin x}{m \sin v} f(v) = 0,$$

so dass also die unendlich weit vom Anfange entfernten Glieder verschwinden.

So haben wir endlich

$$\text{Lim } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{x} f(0) + \frac{\sin x}{\pi - x} f(0) - \frac{\sin x}{\pi + x} f(0) - \ldots\right] dx$$

oder, weil $f(0)$ eine Constante ist,

$$\text{Lim } J = f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \ldots\right] \sin x \, dx$$

$$= f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + 2x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} - \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} - \ldots\right\}\right] \sin x \, dx.$$

Um nun dieses Integral weiter ausführen zu können, müssen wir die eingeklammerte Reihe summiren. Diese Summe $P$ kann man aus zwei anderen sich bestehend denken:

$$U = \frac{1}{x} - 2x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \ldots\right\},$$

$$V = \quad 4x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \frac{1}{25\pi^2 - x^2} + \ldots\right\},$$

$$P = U + V.$$

Nun findet sich aber leicht

$$\int U \, dx = \log n \, x + \log n \left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}\right) + \log n \left(\frac{4\pi^2 - x^2}{4\pi^2}\right) + \ldots$$

$$= \log n \, x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots$$

$$= \log n \sin x;$$

also durch Differenziation



Digitized by Google

$$U = \cot x.$$

Aehnlich hat man

$$-\int V dx = 2\log n\left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}\right) + 2\log n\left(\frac{9\pi^2 - x^2}{9\pi^2}\right) + 2\log n\left(\frac{25\pi^2 - x^2}{25\pi^2}\right) + \ldots$$

$$= 2\log n\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

$$= 2\log n \cos \tfrac{1}{2}x;$$

folglich

$$V = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x.$$

Also $P = \cot x + \operatorname{tang} \frac{1}{2}x$, oder weil $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ist, $P = \frac{1}{\sin x}$; oder

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} - \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} - \ldots\right\}.$$

Substituiren wir diesen Werth, so findet sich

$$\operatorname{Lim} J = f(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{dx}{\sin x} = \frac{\pi}{2} f(0); \text{ oder}$$

$$\operatorname{Lim}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)\Theta}{\sin \Theta} f(\Theta)\, d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0). \ldots . \quad (1)$$

2) Wäre die obere Gränze des Integrals $c < \frac{\pi}{2}$, so geht unser Integral

$$J = \int_0^c \frac{\sin m\Theta}{\sin \Theta} f(\Theta)\, d\Theta,$$

wenn wie früher $m\Theta = z$ gesetzt wird, über in

$$\int_0^{mc} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Da nun $c < \frac{\pi}{2}$, so ist $mc < \frac{m\pi}{2}$, also etwa $mc = h\frac{\pi}{2} + b$, wo $h < m$, $b < \frac{\pi}{2}$ ist. Also haben wir

$$J = \int_0^{\frac{h\pi}{2}} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz + \int_{\frac{h\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}+b} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Da nun $h$ gleichzeitig mit $m$ wächst, so sind auf das erste Integral alle die früheren Schlüsse anwendbar und geben

$$\operatorname{Lim} J = \frac{\pi}{2} f(0) + \operatorname{Lim}\int_{\frac{h\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}+b} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Digitized by Google

Um das zweite Integral beurtheilen zu können, nehmen wir $z = h\frac{\pi}{2} + x$ und haben so

$$\int_0^b \frac{\sin(h\frac{\pi}{2}+x)}{m\sin(\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{x}{m})} f(\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{x}{m})\,dx.$$

Da $h$ und $m$ gleichzeitig wachsen, so wird $\frac{h}{m}$, also auch $\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$ eine gewisse endliche Grösse $a$, und

$$\mathrm{Lim}\int_0^b \frac{\sin(h\frac{\pi}{2}+x)}{m\sin(a+\frac{x}{m})} f(a+\frac{x}{m})dx = \frac{f(a)}{m\sin a}\int_0^b \sin(h\frac{\pi}{2}+x)dx.$$

So gross nun auch $h$ sein mag, so giebt die Ausführung des Integrals doch nur eine endliche Grösse, und da $m$ im Nenner steht, verschwindet der ganze Ausdruck.

Wir haben also zusammen

$$\mathrm{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)\,d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0),\ \frac{\pi}{2} > c > 0 \ldots\ldots (2)$$

3) Wenn $c$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ liegt, so können wir $c = \pi - a$ setzen, wobei $\frac{\pi}{2} > a > 0$ ist. Mithin

$$\int_0^{\pi-a} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta - \int_{\pi-a}^{\pi} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta.$$

Im zweiten und dritten Integrale nehmen wir $\Theta = \pi - x$ und erhalten

$$\int_0^{\pi-a} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mx}{\sin x} f(\pi-x)dx - \int_0^{a} \frac{\sin mx}{\sin x} f(\pi-x)dx.$$

Das erste und zweite Integral führen wir nach (1), das dritte nach (2) aus und haben so

$$\mathrm{Lim}\int_0^{\pi-a} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} f(\pi) - \frac{\pi}{2} f(\pi)$$

oder

$$\mathrm{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0)\quad \pi > c > \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (3)$$

4) Fassen wir nun zusammen was in 1, 2, 3 gefunden wurde, so ergiebt sich auf der Stelle das Resultat

Digitized by Google

$$\mathrm{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0),\ \pi > c > 0 \ldots\ldots (4)$$

Diess ist das schöne Theorem, dessen fruchtbare Anwendung auf der Eigenschaft von $\frac{\sin(2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}}$ die Reihe

$$1 + 2\{\cos\Theta + \cos 2\Theta + \ldots\ldots + \cos n\Theta\}$$

zu summiren, beruht. Es lässt sich also vermöge der vorigen Formel jede Reihe summiren, deren allgemeines Glied $\int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$, $\pi > c > 0$, ist; oder man hat

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}} f(\Theta)d\Theta = \int_0^c f(\Theta)d\Theta + 2\sum_1^n \int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$$

oder, wenn man die Reihe ins Unendliche fortsetzt, ($n = \infty$ nimmt) und links $2\Theta$ für $\Theta$ setzt,

$$\mathrm{Lim}\, 2\int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(2\Theta)d\Theta = \int_0^c f(\Theta)d\Theta + 2\sum_1^\infty \int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$$

wobei links das Resultat $\pi f(0)$ erscheint. Aus diesem Satze lassen sich die Theoreme von Lagrange und Fourier leicht ableiten.

5) Die hier angewandte Methode der Gränzenzerlegung lässt sich mit vielem Vortheil öfter anwenden.

So giebt z. B. das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta$, wenn man sich die obere Gränze als ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ denkt, und es in eine Reihe anderer, sämmtlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen, zerlegt, das nämliche Resultat, wie die vorhin geführte Entwickelung, wenn man darin $f(\Theta)$ constant $= 1$ nimmmt. Nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man $\alpha\Theta$ für $\Theta$, wo $\alpha$ eine ganz beliebige Grösse ist, so hat man auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (5)$$

welches Resultat sich hier auf einem ebenso leichten als gründlichen Wege findet.

Digitized by Google

# LIII.

## Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

### §. 1.

Das Problem, mit dessen Auflösung wir uns in diesem Aufsatze beschäftigen wollen, kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

In einer Ebene seien drei Punkte, die wir durch $O$, $O_1$, $O_2$ bezeichnen wollen, ihrer Lage nach gegeben, und $S$, $S_1$ seien zwei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte in derselben Ebene. Wenn nun in den gegebenen Punkten $O$, $O_1$, $O_2$ die 180° nicht übersteigenden Winkel $SOS_1$, $SO_1S_1$, $SO_2S_1$, welche die von den Punkten $O$, $O_1$, $O_2$ nach den Punkten $S$, $S_1$ gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, und ausserdem noch in dem einen der drei gegebenen Punkte $O$, $O_1$, $O_2$, etwa in dem Punkte $O$, der 180° nicht übersteigende Winkel, welchen die von dem Punkte $O$ nach dem einen der beiden Punkte $S$, $S_1$, etwa nach dem Punkte $S$, gezogene Gesichtslinie $OS$ mit der einen der beiden Linien $OO_1$, $OO_2$, etwa mit der Linie $OO_1$, einschliesst, also der 180° nicht übersteigende Winkel $SOO_1$, gemessen worden sind; so soll man die Lage der beiden Punkte $S$ und $S_1$ bestimmen.

Die bekannten rechtwinkligen Coordinaten der drei gegebenen Punkte $O$, $O_1$, $O_2$ in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der $xy$ seien respective $m$, $n$; $m_1$, $n_1$; $m_2$, $n_2$. Ferner wollen wir die Entfernungen $OS$, $O_1S$, $O_2S$ respective durch $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, die Entfernungen $OS_1$, $O_1S_1$, $O_2S_1$ respective durch $r$, $r_1$, $r_2$ bezeichnen. Nun denke man sich durch die Punkte $O$, $O_1$, $O_2$ als Anfangspunkte die mit dem Systeme der $xy$ parallelen Systeme der $x'y'$, $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ gelegt, und bezeichne die von den Linien $OS$, $O_1S$, $O_2S$ und $OS_1$, $O_1S_1$, $O_2S_1$ mit den positiven Theilen der Axen der $x'$, $x'_1$, $x'_2$ eingeschlossenen Winkel, indem man alle diese Winkel von der Seite der positiven $x$ an nach der Seite der positiven $y$ hin von 0 bis 360° zählt, respective durch $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ und $\chi$, $\chi_1$, $\chi_2$. Dies vorausgesetzt, sind offenbar in völliger Allgemeinheit in Bezug auf die Systeme der $x'y'$, $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ die Coordinaten des Punktes $S$ respective:

$$\varrho \cos \varphi,\ \varrho \sin \varphi;$$

$$\varrho_1 \cos \varphi_1,\ \varrho_1 \sin \varphi_1;$$

$$\varrho_2 \cos \varphi_2,\ \varrho_2 \sin \varphi_2;$$

Digitized by Google

und die Coordinaten des Punktes $S_1$ in Bezug auf dieselben Systeme sind respective:

$$r \cos \chi,\ r \sin \chi;$$
$$r_1 \cos \chi_1,\ r_1 \sin \chi_1;$$
$$r_2 \cos \chi_2,\ r_2 \sin \chi_2.$$

Also hat man nach bekannten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten, wenn man durch $x$, $y$ und $x_1$, $y_1$ die gesuchten Coordinaten der Punkte $S$ und $S_1$ in dem Systeme der $xy$ bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} x = m + \varrho \cos \varphi,\ y = n + \varrho \sin \varphi; \\ x = m_1 + \varrho_1 \cos \varphi_1,\ y = n_1 + \varrho_1 \sin \varphi_1; \\ x = m_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2,\ y = n_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2; \end{cases}$$

und

$$2.\quad \begin{cases} x_1 = m + r \cos \chi,\ y_1 = n + r \sin \chi; \\ x_1 = m_1 + r_1 \cos \chi_1,\ y_1 = n_1 + r_1 \sin \chi_1; \\ x_1 = m_2 + r_2 \cos \chi_2,\ y_2 = n_2 + r_2 \sin \chi_2. \end{cases}$$

Weil nach der Voraussetzung die 180° nicht übersteigenden Winkel $SOS_1$, $SO_1S_1$, $SO_2S_1$ gemessen worden sind, so können offenbar die Differenzen $\chi - \varphi$, $\chi_1 - \varphi_1$, $\chi_2 - \varphi_2$ jederzeit als bekannt angesehen werden, und man kann daher, indem $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ bekannte Grössen bezeichnen,

$$3.\quad \chi - \varphi = \alpha,\ \chi_1 - \varphi_1 = \alpha_1,\ \chi_2 - \varphi_2 = \alpha_2$$

oder

$$4.\quad \chi = \alpha + \varphi,\ \chi_1 = \alpha_1 + \varphi_1,\ \chi_2 = \alpha_2 + \varphi_2$$

setzen, wodurch die Gleichungen 2. die folgende Gestalt erhalten:

$$5.\quad \begin{cases} x_1 = m + r \cos (\alpha + \varphi),\ y_1 = n + r \sin (\alpha + \varphi); \\ x_1 = m_1 + r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1),\ y_1 = n_1 + r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1); \\ x_1 = m_2 + r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2),\ y_1 = n_2 + r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2). \end{cases}$$

Der Winkel $\varphi$ kann offenbar immer als bekannt angesehen werden, weil nach der Voraussetzung die 180° nicht übersteigende Winkel $SOO_1$ gemessen worden ist, und die zwölf Gleichungen in 1. und 5. reichen also zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen zwölf unbekannten Grössen $x$, $y$, $x_1$, $y_1$, $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $r$, $r_1$, $r_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ hin, so dass folglich unser Problem durch dieselben aufgelöst ist. Man kann sich aber, wie es mir scheint, die Auflösung auf folgende Art erleichtern.

Wir wollen nämlich jetzt den Punkt $O$ als den Anfang und die Linie $OS$ als den positiven Theil der Axe der $\xi$ eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $\xi\eta$ annehmen, und wollen die Coordinaten der Punkte $O_1$, $O_2$ in Bezug auf dieses System respective durch $a_1$, $b_1$; $a_2$, $b_2$; die Coordinaten der Punkte $S$ und $S_1$ in Bezug auf dasselbe System aber durch $\xi$, $\eta$ und $\xi_1$, $\eta_1$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt, hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$m_1 = m + a_1 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi$, $n_1 = n + a_1 \sin\varphi + b_1 \cos\varphi$;
$m_2 = m + a_2 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi$, $n_2 = n + a_2 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi$;

oder

$m_1 - m = a_1 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi$, $n_1 - n = a_1 \sin\varphi + b_1 \cos\varphi$;
$m_2 - m = a_2 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi$, $n_2 - n = a_2 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi$;

und folglich, wie man leicht findet,

$$6.\quad \begin{cases} a_1 = (n_1 - n)\sin\varphi + (m_1 - m)\cos\varphi, \\ b_1 = (n_1 - n)\cos\varphi - (m_1 - m)\sin\varphi; \\ a_2 = (n_2 - n)\sin\varphi + (m_2 - m)\cos\varphi, \\ b_2 = (n_2 - n)\cos\varphi - (m_2 - m)\sin\varphi. \end{cases}$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Coordinaten $a_1$, $b_1$ und $a_2$, $b_2$ leicht berechnen, weil, was man immer festzuhalten hat, der Winkel $\varphi$ jederzeit als bekannt angesehen werden kann, da nach der Voraussetzung der 180° nicht übersteigende Winkel $SOO_1$ gemessen worden ist. Bezeichnet man die von den Linien $OO_1$ und $OO_2$ mit dem positiven Theile der Axe der $x'$ eingeschlossenen, von der Seite der positiven $x'$ nach der Seite der positiven $y'$ hin von 0 bis 360° gezählten Winkel durch $\Theta_1$ und $\Theta_2$; so ist offenbar

$$7.\quad \begin{cases} m_1 - m = OO_1 \cdot \cos\Theta_1, & n_1 - n = OO_1 \cdot \sin\Theta_1; \\ m_2 - m = OO_2 \cdot \cos\Theta_2, & n_2 - n = OO_2 \cdot \sin\Theta_2; \end{cases}$$

und folglich

$$8.\quad \operatorname{tang}\Theta_1 = \frac{n_1 - n}{m_1 - m},\ \operatorname{tang}\Theta_2 = \frac{n_2 - n}{m_2 - m}.$$

Hat man mittelst dieser Formeln $\Theta_1$ und $\Theta_2$ gefunden; so hat man nach 6. zur Berechnung der Coordinaten $a_1$, $b_1$ und $a_2$, $b_2$ die folgenden Formeln:

$$9.\quad \begin{cases} a_1 = (m_1 - m)\dfrac{\cos(\Theta_1 - \varphi)}{\cos\Theta_1}, & b_1 = (m_1 - m)\dfrac{\sin(\Theta_1 - \varphi)}{\cos\Theta_1}; \\ a_2 = (m_2 - m)\dfrac{\cos(\Theta_2 - \varphi)}{\cos\Theta_2}, & b_2 = (m_2 - m)\dfrac{\sin(\Theta_2 - \varphi)}{\cos\Theta_2}. \end{cases}$$

Ferner ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$10.\quad \begin{cases} x = m + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y = n + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi; \end{cases}$$

oder, weil offenbar $\eta = 0$ ist,

$$11.\quad \begin{cases} x = m + \xi\cos\varphi, \\ y = n + \xi\sin\varphi; \end{cases}$$

und auf ähnliche Art hat man

$$12.\quad \begin{cases} x_1 = m + \xi_1\cos\varphi - \eta_1\sin\varphi, \\ y_1 = n + \xi_1\sin\varphi + \eta_1\cos\varphi. \end{cases}$$

Endlich haben wir, wenn jetzt $\varphi_1$, $\varphi_2$; $\chi$, $\chi_1$, $\chi_2$; $a$, $a_1$, $a_2$ in Bezug auf das System der $\xi\eta$ eine ganz ähnliche Bedeutung wie vorher dieselben Symbole in Bezug auf das System der $xy$, aber

Digitized by Google

natürlich nicht ganz gleiche Bedeutung wie dort haben, nach 1. und 5. die folgenden Gleichungen:

$$13.\quad \begin{cases} \xi = \varrho, & \eta = 0; \\ \xi = a_1 + \varrho_1 \cos\varphi_1, & \eta = b_1 + \varrho_1 \sin\varphi_1; \\ \xi = a_2 + \varrho_2 \cos\varphi_2, & \eta = b_2 + \varrho_2 \sin\varphi_2; \end{cases}$$

und

$$14.\quad \begin{cases} \xi_1 = r\cos\alpha, & \eta_1 = r\sin\alpha; \\ \xi_1 = a_1 + r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1), & \eta_1 = b_1 + r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1); \\ \xi_1 = a_2 + r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2), & \eta_1 = b_2 + r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2). \end{cases}$$

Dies sind wieder zwölf Gleichungen zwischen den zwölf unbekannten Grössen $\xi$, $\eta$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $r$, $r_1$, $r_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, und reichen also zu deren Bestimmung hin, wie wir jetzt mit Mehrerem zeigen wollen.

Durch Elimination von $\xi$, $\eta$, $\xi_1$, $\eta_1$ erhält man

$$\varrho = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2,$$
$$0 = b_1 + \varrho_1\sin\varphi_1 = b_2 + \varrho_2\sin\varphi_2$$

und

$$r\cos\alpha = a_1 + r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1) = a_2 + r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2),$$
$$r\sin\alpha = b_1 + r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1) = b_2 + r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2).$$

Also ist

$$a_1 - \varrho = -\varrho_1\cos\varphi_1,\quad a_2 - \varrho = -\varrho_2\cos\varphi_2;$$
$$b_1 = -\varrho_1\sin\varphi_1,\qquad b_2 = -\varrho_2\sin\varphi_2$$

und

$$a_1 - r\cos\alpha = -r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1),\quad a_2 - r\cos\alpha = -r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2);$$
$$b_1 - r\sin\alpha = -r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1),\quad b_2 - r\sin\alpha = -r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2).$$

Dividirt man nun, um die Grössen $\varrho_1$, $\varrho_2$, $r_1$, $r_2$ zu eliminiren, diese Gleichungen durch einander; so erhält man

$$15.\quad \cot\varphi_1 = \frac{a_1-\varrho}{b_1},\ \cot\varphi_2 = \frac{a_2-\varrho}{b_2}$$

und

$$16.\quad \cot(\alpha_1+\varphi_1) = \frac{a_1 - r\cos\alpha}{b_1 - r\sin\alpha},\ \cot(\alpha_2+\varphi_2) = \frac{a_2 - r\cos\alpha}{b_2 - r\sin\alpha};$$

und diese vier Gleichungen enthalten nun bloss noch die vier unbekannten Grössen $\varrho$, $r$, $\varphi_1$, $\varphi_2$.

Weil bekanntlich

$$\cot(\alpha_1+\varphi_1) = \frac{\cot\alpha_1\cot\varphi_1 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\varphi_1},\ \cot(\alpha_2+\varphi_2) = \frac{\cot\alpha_2\cot\varphi_2 - 1}{\cot\alpha_2 + \cot\varphi_2}$$

ist, so ist nach 16.

$$\frac{a_1 - r\cos\alpha}{b_1 - r\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha_1\cot\varphi_1 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\varphi_1},$$
$$\frac{a_2 - r\cos\alpha}{b_2 - r\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha_2\cot\varphi_2 - 1}{\cot\alpha_2 + \cot\varphi_2};$$

Digitized by Google

woraus sich

$$17.\quad \begin{cases} \cot\varphi_1 = -\dfrac{(a_1 - r\cos\alpha)\cos\alpha_1 + (b_1 - r\sin\alpha)\sin\alpha_1}{(a_1 - r\cos\alpha)\sin\alpha_1 - (b_1 - r\sin\alpha)\cos\alpha_1}, \\ \cot\varphi_2 = -\dfrac{(a_2 - r\cos\alpha)\cos\alpha_2 + (b_2 - r\sin\alpha)\sin\alpha_2}{(a_2 - r\cos\alpha)\sin\alpha_2 - (b_2 - r\sin\alpha)\cos\alpha_2} \end{cases}$$

oder

$$18.\quad \begin{cases} \cot\varphi_1 = -\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \cot\varphi_2 = -\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)} \end{cases}$$

ergiebt.

Also ist nach dem Obigen

$$19.\quad \begin{cases} \dfrac{a_1-\varrho}{b_1} = -\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \dfrac{a_2-\varrho}{b_2} = -\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)}; \end{cases}$$

und diese Gleichungen enthalten bloss noch die zwei unbekannten Grössen $\varrho$ und $r$. Bestimmt man nun $\varrho$, so erhält man

$$20.\quad \begin{cases} \varrho = a_1 + b_1\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \varrho = a_2 + b_2\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)} \end{cases}$$

oder

$$21.\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{(a_1^2 + b_1^2)\sin\alpha_1 + \{a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}r}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \varrho = \dfrac{(a_2^2 + b_2^2)\sin\alpha_2 + \{a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2)\}r}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)}; \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich die folgende Gleichung zur Bestimmung von $r$:

$$22.\quad \frac{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)} = \frac{(a_1^2 + b_1^2)\sin\alpha_1 + \{a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}r}{(a_2^2 + b_2^2)\sin\alpha_2 + \{a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2)\}r}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$K_1 = \sin(\alpha-\alpha_1),$$
$$K_2 = \sin(\alpha-\alpha_2),$$
$$L_1 = (a_1^2 + b_1^2)\sin\alpha_1,$$
$$L_2 = (a_2^2 + b_2^2)\sin\alpha_2,$$
$$M_1 = a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1,$$
$$M_2 = a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2,$$
$$N_1 = a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1),$$
$$N_2 = a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2);$$

Digitized by Google

so erhält die vorhergehende Gleichung die folgende Form:

$$23.\quad \frac{M_1+K_1r}{M_2+K_2r}=\frac{L_1+N_1r}{L_2+N_2r},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$24.\quad 0= L_1M_2-M_1L_2 \\ -\{(K_1L_2-L_1K_2)+(M_1N_2-N_1M_2)\}r \\ -(K_1N_2-N_1K_2)r^2.$$

Um die Grössen $K_1$, $K_2$, $L_1$, $L_2$, $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ mit Leichtigkeit berechnen zu können, suche man die beiden Hülfswinkel $\omega_1$ und $\omega_2$ mittelst der Formeln

$$25.\quad \text{tang } \omega_1=\frac{b_1}{a_1},\ \text{tang } \omega_2=\frac{b_2}{a_2}.$$

Dann ist nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$K_1=\sin(\alpha-\alpha_1),$$
$$K_2=\sin(\alpha-\alpha_2),$$
$$L_1=\frac{{a_1}^2\sin\alpha_1}{\cos{\omega_1}^2},$$
$$L_2=\frac{{a_2}^2\sin\alpha_2}{\cos{\omega_2}^2},$$
$$M_1=\frac{a_1\sin(\alpha_1-\omega_1)}{\cos\omega_1},$$
$$M_2=\frac{a_2\sin(\alpha_2-\omega_2)}{\cos\omega_2},$$
$$N_1=\frac{a_1\sin(\alpha-\alpha_1-\omega_1)}{\cos\omega_1},$$
$$N_2=\frac{a_2\sin(\alpha-\alpha_2-\omega_2)}{\cos\omega_2}.$$

Weitere Erläuterungen über den Gang, welchen man bei der Auflösung zu nehmen hat, fügen wir der Kürze wegen nicht bei, da dies schon aus dem Vorhergehenden deutlich genug von selbst erhellen wird.

## §. 2.

Bemerken wollen wir aber noch, dass, wenn vier Punkte $O$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ durch ihre Coordinaten $m$, $n$; $m_1$, $n_1$; $m_2$, $n_2$; $m_3$, $n_3$ gegeben, und in diesen Punkten die 180° nicht übersteigenden Winkel $SOS_1$, $SO_1S_1$, $SO_2S_1$, $SO_3S_1$ gemessen worden sind, auch diese Data zur Bestimmung der Coordinaten $x$, $y$ und $x_1$, $y_1$ der Punkte $S$ und $S_1$, d. i. der Lage dieser Punkte hinreichen.

Nach 1. und 5. hat man nämlich sechzehn Gleichungen von der Form

$$x=m+\varrho\cos\varphi,\ y=n+\varrho\sin\varphi;$$
$$x=m_1+\varrho_1\cos\varphi_1,\ y=n_1+\varrho_1\sin\varphi_1;$$

Digitized by Google

$$x = m_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2,\ y = n_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2;$$
$$x = m_3 + \varrho_3 \cos \varphi_3,\ y = n_3 + \varrho_3 \sin \varphi_3;$$

$$x_1 = m + r \cos (\alpha + \varphi),\ y_1 = n + r \sin (\alpha + \varphi);$$
$$x_1 = m_1 + r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1),\ y_1 = n_1 + r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1);$$
$$x_1 = m_2 + r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2),\ y_1 = n_2 + r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2);$$
$$x_1 = m_3 + r_3 \cos (\alpha_3 + \varphi_3),\ y_1 = n_3 + r_3 \sin (\alpha_3 + \varphi_3);$$

und diese sechzehn Gleichungen reichen zur Bestimmung der sechzehn in ihnen enthaltenen unbekannten Grössen $x$, $y$; $x_1$, $y_1$; $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$; $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$; $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ hin. Die Auflösung dieser Gleichungen ist aber Schwierigkeiten unterworfen, und wir wollen dieselben hier daher nur so weit entwickeln, dass sie bloss noch die vier unbekannten Grössen $x$, $y$; $x_1$, $y_1$ enthalten, welches ohne Schwierigkeit geschehen kann. Durch Elimination von $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ und $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ erhält man nämlich

$$\text{tang } \varphi = \frac{y-n}{x-m},\ \text{tang } (\alpha+\varphi) = \frac{y_1-n}{x_1-m};$$

$$\text{tang } \varphi_1 = \frac{y-n_1}{x-m_1},\ \text{tang } (\alpha_1+\varphi_1) = \frac{y_1-n_1}{x_1-m_1};$$

$$\text{tang } \varphi_2 = \frac{y-n_2}{x-m_2},\ \text{tang } (\alpha_2+\varphi_2) = \frac{y_1-n_2}{x_1-m_2};$$

$$\text{tang } \varphi_3 = \frac{y-n_3}{x-m_3},\ \text{tang } (\alpha_3+\varphi_3) = \frac{y_1-n_3}{x_1-m_3}.$$

Setzt man nun

$$\frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \alpha \text{ tang } \varphi} = \frac{y_1-n}{x_1-m},$$
$$\frac{\text{tang } \alpha_1 + \text{tang } \varphi_1}{1 - \text{tang } \alpha_1 \text{ tang } \varphi_1} = \frac{y_1-n_1}{x_1-m_1},$$
$$\frac{\text{tang } \alpha_2 + \text{tang } \varphi_2}{1 - \text{tang } \alpha_2 \text{ tang } \varphi_2} = \frac{y_1-n_2}{x_1-m_2},$$
$$\frac{\text{tang } \alpha_3 + \text{tang } \varphi_3}{1 - \text{tang } \alpha_3 \text{ tang } \varphi_3} = \frac{y_1-n_3}{x_1-m_3};$$

und bestimmt tang $\varphi$, tang $\varphi_1$, tang $\varphi_2$, tang $\varphi_3$ aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$\text{tang } \varphi = -\frac{(x_1-m)\sin\alpha - (y_1-n)\cos\alpha}{(x_1-m)\cos\alpha + (y_1-n)\sin\alpha},$$
$$\text{tang } \varphi_1 = -\frac{(x_1-m_1)\sin\alpha_1 - (y_1-n_1)\cos\alpha_1}{(x_1-m_1)\cos\alpha_1 + (y_1-n_1)\sin\alpha_1},$$
$$\text{tang } \varphi_2 = -\frac{(x_1-m_2)\sin\alpha_2 - (y_1-n_2)\cos\alpha_2}{(x_1-m_2)\cos\alpha_2 + (y_1-n_2)\sin\alpha_2},$$
$$\text{tang } \varphi_3 = -\frac{(x_1-m_3)\sin\alpha_3 - (y_1-n_3)\cos\alpha_3}{(x_1-m_3)\cos\alpha_3 + (y_1-n_3)\sin\alpha_3}.$$

Also hat man jetzt die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{y-n}{x-m} = -\frac{(x_1-m)\sin\alpha - (y_1-n)\cos\alpha}{(x_1-m)\cos\alpha + (y_1-n)\sin\alpha},$$

Digitized by Google

$$\frac{y-n_1}{x-m_1} = -\frac{(x_1-m_1)\sin\alpha_1-(y_1-n_1)\cos\alpha_1}{(x_1-m_1)\cos\alpha_1+(y_1-n_1)\sin\alpha_1},$$

$$\frac{y-n_2}{x-m_2} = -\frac{(x_1-m_2)\sin\alpha_2-(y_1-n_2)\cos\alpha_2}{(x_1-m_2)\cos\alpha_2+(y_1-n_2)\sin\alpha_2},$$

$$\frac{y-n_3}{x-m_3} = -\frac{(x_1-m_3)\sin\alpha_3-(y_1-n_3)\cos\alpha_3}{(x_1-m_3)\cos\alpha_3+(y_1-n_3)\sin\alpha_3};$$

aus denen die vier unbekannten Grössen $x$, $y$; $x_1$, $y_1$ bestimmt werden müssen. Diese Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{(x-m)(y_1-n)-(y-n)(x_1-m)}{(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)},$$

$$\text{tang}\,\alpha_1 = \frac{(x-m_1)(y_1-n_1)-(y-n_1)(x_1-m_1)}{(x-m_1)(x_1-m_1)+(y-n_1)(y_1-n_1)},$$

$$\text{tang}\,\alpha_2 = \frac{(x-m_2)(y_1-n_2)-(y-n_2)(x_1-m_2)}{(x-m_2)(x_1-m_2)+(y-n_2)(y_1-n_2)},$$

$$\text{tang}\,\alpha_3 = \frac{(x-m_3)(y_1-n_3)-(y-n_3)(x_1-m_3)}{(x-m_3)(x_1-m_3)-(y+n_3)(y_1-n_3)};$$

oder

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{n(x-x_1)-m(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m^2+n^2-m(x+x_1)-n(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$

$$\text{tang}\,\alpha_1 = -\frac{n_1(x-x_1)-m_1(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_1^2+n_1^2-m_1(x+x_1)-n_1(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$

$$\text{tang}\,\alpha_2 = -\frac{n_2(x-x_1)-m_2(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_2^2+n_2^2-m_2(x+x_1)-n_2(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$

$$\text{tang}\,\alpha_3 = -\frac{n_3(x-x_1)-m_3(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_3^2+n_3^2-m_3(x+x_1)-n_3(y+y_1)+xx_1+yy_1};$$

oder

$$\begin{aligned}0 = {} & (nx-my)\cos\alpha+(m^2+n^2-mx-ny)\sin\alpha \\ & -\{(m-x)\sin\alpha+(n-y)\cos\alpha\}x_1 \\ & +\{(m-x)\cos\alpha-(n-y)\sin\alpha\}y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (n_1x-m_1y)\cos\alpha_1+(m_1^2+n_1^2-m_1x-n_1y)\sin\alpha_1 \\ & -\{(m_1-x)\sin\alpha_1+(n_1-y)\cos\alpha_1\}x_1 \\ & +\{(m_1-x)\cos\alpha_1-(n_1-y)\sin\alpha_1\}y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (n_2x-m_2y)\cos\alpha_2+(m_2^2+n_2^2-m_2x-n_2y)\sin\alpha_2 \\ & -\{(m_2-x)\sin\alpha_2+(n_2-y)\cos\alpha_2\}x_1 \\ & +\{(m_2-x)\cos\alpha_2-(n_2-y)\sin\alpha_2\}y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (n_3x-m_3y)\cos\alpha_3+(m_3^2+n_3^2-m_3x-n_3y)\sin\alpha_3 \\ & -\{(m_3-x)\sin\alpha_3+(n_3-y)\cos\alpha_3\}x_1 \\ & +\{(m_3-x)\cos\alpha_3-(n_3-y)\sin\alpha_3\}y_1.\end{aligned}$$

Die fernere Auflösung dieser vier Gleichungen scheint aber in grosse Weitläufigkeiten zu führen.

Digitized by Google

# LIV.

## Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

---

Wir wollen zuerst die Entstehungsweise der Binomialcoefficienten durch ein sehr einfaches Verfahren zeigen, welches wir durchgängig in diesem Aufsatze beibehalten werden.

Es seien $u$ und $z$ beliebige Grössen, so ist bekanntlich

$$u^z(u+1) = u^{z+1} + u^z.$$

Setzen wir $z+1$ für $z$ und addiren zu der so entstehenden Gleichung die obige unverändert, so ist

$$u^{z+1}(u+1) + u^z(u+1) = u^{z+2} + u^{z+1} + (u^{z+1} + u^z),$$

$$\text{d. i. } u^z(u+1)^2 = u^{z+2} + 2u^{z+1} + u^z.$$

Wiederholen wir das angegebene Verfahren, so kommt

$$u^{z+1}(u+1)^3 + u^z(u+1)^2 = u^{z+3} + 2u^{z+2} + u^{z+1} + u^{z+2} + 2u^{z+1} + u^z$$

oder

$$u^z(u+1)^3 = u^{z+3} + 3u^{z+2} + 3u^{z+1} + u^z.$$

Man übersieht gleich, dass bei $n$ maliger Anwendung dieses Verfahrens eine Gleichung von der Form

$$u^z(u+1)^n = u^{z+n} + {}^nA_1 u^{z+n-1} + \ldots + {}^nA_{r-1}u^{z+n-r+1} + {}^nA_r u^{z+n-r} + \ldots \quad (1)$$

und ebenso bei $(n+1)$ maliger eine ähnliche

$$u^z(u+1)^{n+1} = u^{z+n+1} + {}^{n+1}A_1 u^{z+n} + \ldots + {}^{n+1}A_r u^{z+n+1-r} + \ldots \quad (2)$$

zum Vorschein kommen würde. Nun entsteht aber (2) aus (1), indem man in (1) $z+1$ für $z$ schreibt und die Gleichung noch addirt, ganz so, wie dies gleich anfangs geschah. Also

$$u^z(u+1)^{n+1} = u^{z+n+1} + {}^nA_1 u^{z+n} + \ldots + {}^nA_r u^{z+n+1-r} + \ldots + u^{z+n} + \ldots + {}^nA_{r-1}u^{z+n-r+1} + \ldots$$

Vergleicht man diess mit (2), so findet sich aus den allgemeinen Gliedern die Relation

$${}^nA_{r-1} + {}^nA_r = {}^{n+1}A_r \ldots \quad (3)$$

Digitized by Google

Diese Coefficienten nennt man **Binomialcoefficienten** für positive ganze Exponenten, und bezeichnet ${}^{n}A_1$, ${}^{n}A_2$ .. kurz mit $n_1$, $n_2$, . . ., wobei $n_0 = n_n = 1$ ist.

Aus (1) folgt noch, wenn man mit $x^n$ hebt, und $u = \frac{1}{x}$ setzt,

$$\frac{(1+x)^n}{x^n} = \frac{1}{x^n} + n_1 \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots$$

oder

$$(1+x)^n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots + n_n x^n.$$

Ganz das nämliche Verfahren werden wir zur Entdeckung von Eigenschaften der Binomialcoefficienten selbst gebrauchen, und dazu bloss die Fundamentalformel

$$(m+1)_r = m_{r-1} + m_r \ldots . \quad (4)$$

anwenden.

In so fern nun jeder Binomialcoefficient $m_r$ von 2 Elementen zugleich abhängt, können wir auch nach den Veränderungen fragen, die derselbe erleiden wird, wenn sich eins dieser Elemente ändert.

*a*) Für ein constantes $m$ ändere sich $r$.

Schreiben wir in (4) $r+1$ für $r$, so haben wir

$$(m+1)_{r+1} = m_r + m_{r+1}$$

ebenso

$$(m+1)_{r+2} = \quad m_{r+1} + m_{r+2};$$

wenn wir also addiren und auf die linke Seite wieder die Relation (4) anwenden:

$$(m+2)_{r+2} = m_r + 2m_{r+1} + m_{r+2}$$

ebenso

$$(m+2)_{r+3} = \quad m_{r+1} + 2m_{r+2} + m_{r+3}$$

also durch Addition und wegen (4)

$$(m+3)_{r+3} = m_r + 3m_{r+1} + 3m_{r+2} + m_{r+3}.$$

Verallgemeinert giebt diess den Satz

$$(m+n)_{r+n} = n_0 m_r + n_1 m_{r+1} + n_2 m_{r+2} + \ldots \quad (5)$$

Daraus folgt u. A. für $r = 0$, $n = m$,

$$(2m)_m = m_0{}^2 + m_1{}^2 + m_2{}^2 + \ldots \quad (7)$$

d. h. Die Quadratsumme der Binomialcoefficienten ist dem mittelsten Binomialcoefficienten für den doppelten Exponenten gleich.

*b*) Für ein constantes $r$ ändere sich $m$.

Wir brauchen jetzt die Relation (4) unter der Form

$$m_{r-1} = (m+1)_r - m_r, \ldots \quad (7)$$

und schreiben darin $m+1$ für $m$, so wird

$$(m+1)_{r-1} = (m+2)_r - (m+1)_r.$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so ist

$$(m+1)_{r-1} - m_{r-1} = (m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r$$

Digitized by Google

oder, wenn wir die linke Seite nach (7) zusammenziehen,

$$m_{r-2} = (m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r.$$

Schreiben wir wieder $m+1$ für $m$ und ziehen davon die Formel für $m_{r-2}$ ungeändert ab, so kommt

$$(m+1)_{r-2} - m_{r-2} = (m+3)_r - 2(m+2)_r + (m+1)_r - \{(m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r\}$$

d. i.

$$m_{r-3} = (m+3)_r - 3(m+2)_r + 3(m+1)_r - m_r.$$

Bei $n$ maliger Anwendung haben wir

$$m_{r-n} = n_0(m+n)_r - n_1(m+n-1)_r + n_2(m+n-2)_r - \ldots \quad (8).$$

Diese Reihe ist sehr vieler Folgerungen fähig.

Z. B. für $r = n$ ist

$$1 = n_0(m+n)_n - n_1(m+n-1)_n + n_2(m+n-2)_n - \ldots \quad (9)$$

Für $n = m$ ergiebt sich, weil $r < m$ sein muss,

$$0 = m_0(2m)_r - m_1(2m-1)_r + m_2(2m-2)_r - \ldots \quad (10).$$

Für $r = 0$ erhält man

$$0 = n_0 - n_1 + n_2 - \ldots \quad (11)$$

was auch sonst bekannt ist.

Nimmt man endlich $r = m$, so wird, weil $m_{m-n} = m_n$ ist,

$$m_n = n_0(m+n)_m - n_1(m+n-1)_m + n_2(m+n-2)_m - \ldots \quad (12)$$

eine Reihe, welche einen Binomialcoefficienten durch die höheren Exponenten ausdrückt *).

Das bisher gebrauchte Verfahren lässt sich auch auf goniometrische Funktionen sehr vortheilhaft anwenden. Z. B. ist bekanntlich

$$2 \cos x \,.\, \cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x.$$

Man multiplicire beiderseits mit $2 \cos x$ und zerlege rechts jedes doppelte Cosinusprodukt wieder in eine Summe, so wird

$$(2 \cos x)^2 \cos mx = \cos(m+2)x + \cos mx + \cos mx + \cos(m-2)x$$
$$= \cos(m+2)x + 2\cos mx + \cos(m-2)x$$

Man multiplicire wieder mit $2 \cos x$, und zerlege weiter, so ist

$$(2\cos x)^3 \cos mx = \cos(m+3)x + \cos(m+1)x + 2\cos(m+1)x + 2\cos(m-1)x + \cos(m-1)x + \cos(m-3)x$$
$$= \cos(m+3)x + 3\cos(m+1)x + 3\cos(m-1)x + \cos(m-3)x.$$

Also hat man allgemein

$$(2\cos x)^n \cos mx = n_0 \cos(m+n)x + n_1 \cos(m+n-2)x + \ldots \quad (13)$$

*) Soviel ich weiss, scheint diese Reihe noch nicht bekannt zu sein.



Digitized by Google

wobei von $m+n$ successive die geraden Zahlen abgezogen werden.

Behandelt man ebenso den Ausdruck $2\cos x \,.\, \sin mx$, so erhält man analog:

$$(2\cos x)^n \sin mx = n_0 \sin (m+n)x + n_1 \sin (m+n-2)x + \ldots \quad (14).$$

Nehmen wir in beiden Ausdrücken $m$ negativ und der Grösse nach $= n$, so entstehen die Gleichungen

$$(2\cos x)^m \cos mx = m_0 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + \ldots$$

$$(2\cos x)^m \sin mx = m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + \ldots$$

oder für $x = \frac{1}{2}\Theta$,

$$(2\cos \tfrac{1}{2}\Theta)^m \cos \frac{m}{2}\Theta = m_0 + m_1 \cos \Theta + m_2 \cos 2\Theta + \ldots \quad (15)$$

$$(2\cos \tfrac{1}{2}\Theta)^m \sin \frac{m}{2}\Theta = m_1 \sin \Theta + m_2 \sin 2\Theta + \ldots \quad (16).$$

Daraus folgt auch

$$\frac{(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m \cos \frac{m}{2}\Theta - 1}{m} = \cos\Theta + \frac{m-1}{2}\cos 2\Theta + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\cos 3\Theta + \ldots$$

$$\frac{(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m \sin \frac{m}{2}\Theta}{m} = \sin\Theta + \frac{m-1}{2}\sin 2\Theta + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\sin 3\Theta + \ldots$$

Lassen wir nun $m$ abnehmen, so nähert sich im ersten Falle $\cos \frac{m}{2}\Theta$ der Einheit und $\frac{(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m - 1}{m}$ bekanntlich dem Ausdruck $\operatorname{Log}(2\cos \frac{1}{2}\Theta)$; im zweiten Falle nähert sich $\sin \frac{m}{2}\Theta$ dem Bogen $\frac{m}{2}\Theta$, also $\frac{\sin \frac{m}{2}\Theta}{m}$ dem Ausdrucke $\frac{1}{2}\Theta$, und der andere Faktor $(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m$ der Einheit.

Gehen wir also zur Abnahmsgrenze 0 über, so wird

$$\operatorname{Log}(2\cos \tfrac{1}{2}\Theta) = \cos\Theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\Theta + \tfrac{1}{3}\cos 3\Theta - \ldots \text{ in inf.} \quad (17)$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta = \sin\Theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\Theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\Theta - \ldots \text{ in inf.} \quad (18)$$

Diese Entwickelung der bekannten Reihen hat vor den bisherigen den Vorzug der Einfachheit und der Vermeidung des Imaginären, welches bei elementaren Vorträgen immer Schwierigkeiten darbietet und nur eine Art Hülfsconstruktion ausmacht, da es bei den Endresultaten wieder verschwindet.

Anmerkung. Die zuletzt in diesem Aufsatze gebrauchten Schlüsse scheinen mir nicht von allem Zweifel frei zu sein. G.

Digitized by Google

# LV.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

Herr Professor und Director Strehlke zu Danzig hat im Programm der dortigen Petrischule von 1840 zum ersten Male die den Verfassern von Programmen an andern Lehranstalten zur Nachahmung dringend zu empfehlende Einrichtung getroffen, dass er unter der Ueberschrift Pädagogische Mittheilungen jedem Programme eine Anzahl von Aufgaben, Lehrsätzen, Fragen oder wissenschaftlichen Bemerkungen beifügen wird, die im Unterrichte wirklich vorgekommen sind, und sich in irgend einer Weise als anregend und fruchtbar bei der Bildung der Jugend gezeigt haben. Da solche kleine meistens nicht in den Buchhandel kommende Schriften wie Programme, Dissertationen u. dergl. leider nur zu häufig der Vergessenheit anheim fallen, so werde ich pädagogische Mittheilungen von der vorher bezeichneten Art, in so fern dieselben den Zwecken des Archivs entsprechen und zu deren Förderung beitragen, in demselben mit der Erlaubniss der Verfasser wieder abdrucken lassen. Die von Herrn Professor Strehlke in dem Programm von 1840 mitgetheilten Aufgaben sind folgende:

### 1. Fläche des ebenen Vierecks.

Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vierecks ist gleich dem Quadrate der Fläche eines Kreisvierecks mit denselben Seiten, vermindert um das Produkt aller 4 Seiten in das Quadrat des Cosinus der halben Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks.

Der Beweis dieses Satzes wird leicht geführt durch Zerfällung des Vierecks in 2 Dreiecke, auf welche man den Hauptsatz der ebenen Trigonometrie zwei Mal anwendet, und indem man zu beiden Seiten der hieraus erhaltenen Gleichung die doppelten Produkte der beiden an die zerfällende Diagonale anstossenden Seiten hinzuaddirt *).

Indem man auf ähnliche Weise das sphärische Viereck behandelt, so erhält man den Satz:

Das Quadrat der dreifachen Summe der kubischen Inhalte der beiden Tetraeder, welche die Sehne der sphärischen Diagonale mit den Sehnen zweier Seiten und drei Radien bildet, ist

$$= \sin\left(\frac{s}{2} - a\right) . \sin\left(\frac{s}{2} - b\right) . \sin\left(\frac{s}{2} - c\right) . \sin\left(\frac{s}{2} - d\right)$$

$$- \sin a . \sin b . \sin c . \sin d . \cos\left(\frac{B+D}{2}\right) . \cos\left(\frac{B+D}{2}\right),$$

*) Die Anwendung des eben mitgetheilten Satzes führt auch zu einem leichten Beweise der sogenannten Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.



Digitized by Google

wenn $a$, $b$, $c$, $d$ die auf einander folgenden Seiten des Vierecks, $s$ die Summe aller Seiten, $B$ den von $a$ und $b$, $D$ den von $c$ und $d$ eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Gewiss giebt es für das sphärische Viereck einen Ausdruck von $(\text{tang } \frac{1}{4}F)^2$, der den Lexellschen Ausdruck der Fläche des sphärischen Kreisvierecks als einen besondern Fall enthält. Bis jetzt habe ich diesen Satz nicht gefunden.

### 2. Quadratur des hyperbolischen Sektors.

Für eine Ellipse mit den Halbaxen $a$ und $b$ ist bekanntlich der Sektor zwischen der grossen Halbaxe, dem aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte $(x, y)$ gezogenen Radius Vektor und dem elliptischen Bogen

$$= \tfrac{1}{2}ab \,.\, \text{arc } (\sin = \tfrac{y}{b}).$$

Da nun $\sqrt{-1} \,.\, \vartheta = \log \,.\, (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \,.\, \sin \vartheta)$, so ist für eine Ellipse mit den Halbaxen $a$ und $b\sqrt{-1}$ oder eine Hyperbel mit den Halbaxen $a$ und $b$ der entsprechende hyperbolische Sektor $= \tfrac{1}{2}ab \,.\, \log \,.\, (\frac{x}{a} + \frac{y}{b})$.

### 3. Cubatur der dreiseitigen Pyramide.

Wenn man in einem Tetraeder eine beliebige Kante in $n$ gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte parallele Ebenen zu einer an die getheilte Kante anstossenden Dreiecksfläche des Tetraeders legt, und aus den Durchschnittspunkten der Ebenen und Kanten Gerade parallel zu der getheilten Kante zieht, so ist der Gesammt-Cubikinhalt aller dreiseitigen äussern Prismen (durch Hülfe der Summation der Quadratzahlen) $= F \,.\, h \,.\, (\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2})$, wenn $F$ die Dreiecksfläche und $h$ die Höhe des Tetraeders auf diese Fläche bedeutet. Die Betrachtung der Gränze dieses Ausdrucks führt zum cubischen Inhalte der dreiseitigen Pyramide.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

---

# LVI.

## Miscellen.

In dem 22sten Bande des Crelle'schen Journals hat Gauss einen neuen sehr sinnreichen Beweis für das aus der sphärischen Trigonometrie bekannte, für die Geodäsie so wichtige Legendre'sche Theorem gegeben, den wir im Folgenden mit einigen uns hier nöthig scheinenden Erläuterungen mittheilen wollen.

Digitized by Google

Bezeichnen wir den sogenannten sphärischen Excess eines sphärischen Dreiecks, dessen drei Seiten $a$, $b$, $c$ sind, durch $3\omega$, und die den Seiten $a$, $b$, $c$ gegenüberstehenden Winkel dieses Dreiecks respective durch $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$, so ist offenbar, wenn $\pi$ seine gewöhnliche Bedeutung hat, $A+B+C=\pi$, weil bekanntlich

$$3\omega=(A+\omega)+(B+\omega)+(C+\omega)-\pi$$

ist. Bezeichnen wir nun die halbe Summe der drei Winkel $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$ durch $S$, so ist, wie man leicht findet,

$$S=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{3}{2}\omega,$$
$$S-(A+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(A-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$S-(B+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(B-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$S-(C+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(C-\tfrac{1}{2}\omega);$$

und folglich

$$\cos S=-\sin\tfrac{3}{2}\omega,$$
$$\cos\{S-(A+\omega)\}=\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$\cos\{S-(B+\omega)\}=\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$\cos\{S-(C+\omega)\}=\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega).$$

Also ist nach zwei sehr bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{3}{2}\omega\sin(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)};$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{\sin^6\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}a}=\frac{\sin^3\frac{3}{2}\omega\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^2(B+\omega)\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\sin^2(C+\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}.$$

Ganz eben so ist aber

$$\frac{\sin^6\frac{1}{2}b}{\cos^2\frac{1}{2}b}=\frac{\sin^3\frac{3}{2}\omega\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^2(A+\omega)\sin(A-\frac{1}{2}\omega)\sin^2(C+\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}.$$

Dividirt man jetzt mit dem zweiten der beiden vorhergehenden Ausdrücke in den ersten, und zieht aus den erhaltenen gleichen Quotienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus; so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\sin^3\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\sin^3\frac{1}{2}b}=\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)},$$

die man, wenn der Kürze wegen

$$D=\frac{a^3\cos\frac{1}{2}a}{8\sin^3\frac{1}{2}a}\cdot\frac{8\sin^3\frac{1}{2}b}{b^3\cos\frac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^2A}\cdot\frac{\sin^3B}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}$$

gesetzt wird, auch unter der Form

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D}$$

schreiben kann.

Digitized by Google

Die vier Factoren der Grösse $D$ wollen wir nun etwas näher betrachten.

Weil zuerst nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{4}(3\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{3}{2}\alpha)$$

ist, so ist

$$8\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 2(3\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{3}{2}\alpha) - \alpha^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Entwickelt man nun $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{3}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ auf bekannte Weise in Reihen, so erhält man nach leichter Rechnung

$$8\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha = {}_2\tfrac{1}{480}\alpha^7 - \ldots,$$

und sieht also, dass in Bezug auf $\alpha$ als eine Grösse der ersten Ordnung

$$8\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

eine Grösse der siebenten, folglich

$$1 - \frac{\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha}{8\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

eine Grösse der vierten Ordnung, also der Factor

$$\frac{\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha}{8\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

der Grösse $D$ von der Einheit um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden ist.

Ganz auf ähnliche Art zeigt man, dass der Factor

$$\frac{8\sin^2\frac{1}{2}b}{b^2\cos\frac{1}{2}b}$$

der Grösse $D$ von der Einheit in Bezug auf $b$ als eine Grösse der ersten Ordnung um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden ist.

Nach bekannten goniometrischen Formeln ist ferner

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A - \sin(A+\omega)\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega)\\
&= \sin^2 A - \tfrac{1}{2}\sin(A+\omega)\{1-\cos(2A-\omega)\}\\
&= \sin^2 A - \tfrac{1}{2}\sin(A+\omega) + \tfrac{1}{2}\sin(A+\omega)\cos(2A-\omega)\\
&= \sin^2 A - \tfrac{1}{2}\sin(A+\omega) + \tfrac{1}{4}\sin 3A - \tfrac{1}{4}\sin(A-2\omega),
\end{aligned}$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\sin^2 A = \tfrac{3}{4}\sin A - \tfrac{1}{4}\sin 3A$$

ist,

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A - \sin(A+\omega)\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega)\\
&= \tfrac{3}{4}\sin A - \tfrac{1}{2}\sin(A+\omega) - \tfrac{1}{4}\sin(A-2\omega)\\
&= \tfrac{1}{4}\sin A - \tfrac{1}{2}\sin A(\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega) - \tfrac{1}{2}\cos A(\sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega).
\end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\sin\omega$, $\sin 2\omega$ auf bekannte Weise in Reihen, so erhält man nach leichter Rechnung

$$\sin^2 A - \sin(A+\omega)\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega) = \tfrac{1}{4}\omega^2\sin A - \ldots,$$

und sieht also, dass in Bezug auf $\omega$ als eine Grösse der ersten Ordnung die Grösse

$$\sin^2 A - \sin(A+\omega)\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega)$$

Digitized by Google

eine Grösse der zweiten, folglich

$$1 - \frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^2 A}$$

ebenfalls eine Grösse der zweiten Ordnung, also der Factor

$$\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A}$$

der Grösse $D$ von der Einheit um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist.

Auf ganz ähnliche Art überzeugt man sich, dass der Factor

$$\frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}$$

der Grösse $D$ von der Einheit um eine Grösse verschieden ist, welche in Bezug auf $\omega$ als eine Grösse der ersten Ordnung von der zweiten Ordnung ist.

In der sphärischen Trigonometrie *) wird aber folgender merkwürdige Ausdruck für den sphärischen Excess $3\omega$ bewiesen:

$$\tang\tfrac{3}{4}\omega = \sqrt{\tang\tfrac{1}{2}s\,\tang\tfrac{1}{2}(s-a)\,\tang\tfrac{1}{2}(s-b)\,\tang\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist. Aus diesem Ausdrucke erhellet sehr leicht, dass in Bezug auf die Seiten $a$, $b$, $c$ als Grössen der ersten Ordnung die Grösse $\omega$ jederzeit eine Grösse der zweiten, also $\omega^2$ eine Grösse der vierten Ordnung ist, und wenn man dies nun mit dem Obigen zusammenhält, so ergiebt sich auf der Stelle, dass jeder der vier Factoren der Grösse $D$ von der Einheit um eine Grösse verschieden ist, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung von der vierten Ordnung ist.

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D}$$

ist, so kann offenbar in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung mit Vernachlässigung von Grössen der vierten Ordnung

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

und überhaupt also in Bezug auf die Seiten $a$, $b$, $c$ des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung mit Vernachlässigung von Grössen der vierten Ordnung

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

gesetzt werden, wo nach dem Obigen

$$A + B + C = \pi$$

ist.

*) M. s. z. B. des Herausgebers Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. S. 180.

Digitized by Google

Nimmt man nun hierzu, dass $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$ die Winkel des sphärischen Dreiecks sind, und durch $\omega$ der dritte Theil des sphärischen Excesses desselben bezeichnet worden ist, so ergiebt sich unmittelbar das folgende merkwürdige und wichtige Theorem:

**Jedes sphärische Dreieck, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es liegt, sehr klein sind, kann näherungsweise, und zwar nur erst mit Vernachlässigung von Grössen, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung von der vierten Ordnung sind, als ein ebenes Dreieck, dessen Seiten den Seiten des sphärischen Dreiecks gleich, und dessen Winkel die um den dritten Theil des Excesses des sphärischen Dreiecks verminderten Winkel des letztern sind, betrachtet und als ein solches ebenes Dreieck berechnet werden.**

Diesen merkwürdigen, besonders für die Geodäsie so überaus wichtigen, von Legendre gefundenen Satz hat Gauss in der wichtigen Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae. 1828. auf Dreiecke, die auf einer beliebigen krummen Fläche von Bogen kürzester Linien eingeschlossen werden, erweitert, worüber man auch das fünfte Kapitel in des Herausgebers Sphäroidischer Trigonometrie. Berlin. 1833. 4. nachsehen kann.

---

Die allgemeine Gleichung des Kreises zwischen rechtwinkligen Coordinaten ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

oder

$$x^2+y^2-2(ax+by)+a^2+b^2=r^2.$$

Ist nun aber der Anfang der Coordinaten selbst ein Punkt des Kreises, so wird diese Gleichung auch durch $x=0$, $y=0$ erfüllt, und es ist folglich in diesem Falle

$$a^2+b^2=r^2,$$

also

$$x^2+y^2=2(ax+by).$$

Seien jetzt $m$, $n$; $m_1$, $n_1$; $m_2$, $n_2$ die Coordinaten dreier beliebiger Punkte des Kreises, so ist nach dem Vorhergehenden

$$(m^2+n^2)\,(m_1n_2-m_2n_1)$$
$$+(m_1^2+n_1^2)\,(m_2n-mn_2)$$
$$+(m_2^2+n_2^2)\,(mn_1-m_1n)$$

Digitized by Google

$$= 2(am + bn)\ (m_1 n_2 - m_2 n_1)$$
$$+ 2(am_1 + bn_1)\ (m_2 n - m n_2)$$
$$+ 2(am_2 + bn_2)\ (m n_1 - m_1 n).$$

Weil nun, wie man leicht findet, die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens verschwindet, so findet zwischen den rechtwinkligen Coordinaten dreier beliebiger Punkte eines Kreises, wenn der Anfang der Coordinaten selbst ein Punkt des Kreises ist, jederzeit die Relation

$$0 = (m^2 + n^2)\ (m_1 n_2 - m_2 n_1)$$
$$+ (m_1^2 + n_1^2)\ (m_2 n - m n_2)$$
$$+ (m_2^2 + n_2^2)\ (m n_1 - m_1 n)$$

Statt.

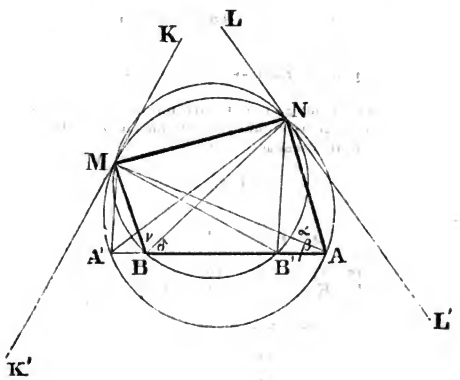
---

Für die im zweiten Hefte dieses Theils S. 219 durch Rechnung aufgelöste Aufgabe:

**Wenn zwei Punkte der Lage nach gegeben sind, so soll man die Lage zweier andern Punkte durch blosse Winkelmessungen an den letztern, ohne diese von den gegebenen Punkten aus zu beobachten, bestimmen;**

hat Clausen in dem neuesten bis jetzt erschienenen Stücke der astronomischen Nachrichten (Bd. XVIII. Nr. 430. S. 367) die folgende geometrische, auch bei der Messtischpraxis anwendbare Auflösung gegeben.

In der unten stehenden Figur




Digitized by Google

seien $M$ und $N$ die beiden bekannten, $A$ und $B$ die beiden unbekannten Punkte, deren Lage bestimmt werden soll. Da man nach der durch die Aufgabe gestellten Bedingung die unbekannten Punkte $A$, $B$ nicht von den bekannten Punkten $M$, $N$, sondern bloss die letzteren von den ersteren aus beobachten soll, so kann man nur in dem Punkte $A$ die Winkel $MAN=\alpha$ und $MAB=\beta$, in dem Punkte $B$ die Winkel $MBN=\gamma$ und $NBA=\delta$ messen, und diese Winkel sind daher nebst der bekannten Lage der Punkte $M$ und $N$ die einzigen Data, mittelst welcher die Punkte $A$ und $B$ bestimmt werden müssen.

Beschreibt man um das Dreieck $MAN$ einen Kreis, welcher die Linie $AB$ in $A'$ schneiden mag, und zieht die Linien $MA'$ und $NA'$, so ist der Winkel $MNA'=\beta$, und die Lage der Linie $NA'$ also bekannt, weil die Lage von $MN$ und der Winkel $\beta$ bekannt ist; zieht man ferner an den um das Dreieck $MAN$ beschriebenen Kreis durch $M$ die Tangente $KK'$, so ist der Winkel $KMN=\alpha$, der Winkel $K'MA'=\beta$, und es ist folglich sowohl die Lage von $KK'$, als auch die Lage von $MA'$ bekannt, weil die Lage von $MN$, der Winkel $\alpha$ und der Winkel $\beta$ bekannt ist; also ist auch die Lage des Punktes $A'$ bekannt, weil man die Lage der Linien $NA'$ und $MA'$ kennt. Auf ganz ähnliche Art beschreibe man um das Dreieck $MBN$ einen Kreis, welcher die Linie $AB$ in $B'$ schneiden mag, und ziehe die Linien $MB'$ und $NB'$, so ist der Winkel $NMB'=\delta$, und die Lage der Linie $MB'$ also bekannt, weil die Lage der Linie $MN$ und der Winkel $\delta$ bekannt ist; zieht man ferner an den um das Dreieck $MBN$ beschriebenen Kreis durch $N$ die Tangente $LL'$, so ist der Winkel $LNM=\gamma$, der Winkel $L'NB'=\delta$, und es ist folglich sowohl die Lage von $LL'$ als auch die Lage von $NB'$ bekannt, weil die Lage von $MN$, der Winkel $\gamma$, und der Winkel $\delta$ bekannt ist; also ist auch die Lage des Punktes $B'$ bekannt, weil man die Lage der Linien $MB'$ und $NB'$ kennt. Weil man nun die Lage der beiden in der Linie $AB$ liegenden Punkte $A'$ und $B'$ kennt, so kennt man auch die Lage der Linie $AB$ selbst. Der Punkt $A$ ist der andere Durchschnittspunkt der Linie $A'B'$ und des um das bekannte Dreieck $MA'N$ beschriebenen Kreises, und eben so ist der Punkt $B$ der andere Durchschnittspunkt der Linie $A'B'$ und des um das bekannte Dreieck $MB'N$ beschriebenen Kreises.

Aus dieser Analysis lässt sich nun unmittelbar die folgende Construction ableiten. Durch den gegebenen Punkt $M$ lege man die Linie $KK'$, welche mit der gegebenen Linie $MN$ den Winkel $KMN=\alpha$ einschliesst, und mache hierauf den Winkel $MNA'=K'MA'=\beta$, so erhält man den Durchschnittspunkt $A'$ der Linien $MA'$ und $NA'$. Auf ähnliche Art lege man durch den gegebenen Punkt $N$ die Linie $LL'$, welche mit der gegebenen Linie $MN$ den Winkel $LNM=\gamma$ einschliesst, und mache hierauf den Winkel $NMB'=L'NB'=\delta$, so erhält man den Durchschnittspunkt $B'$ der Linien $MB'$ und $NB'$. Zieht man nun die Linie $A'B'$ und beschreibt um die bekannten Dreiecke $MA'N$ und $MB'N$ Kreise, so sind die, von $A'$ und $B'$ verschiedenen, Durchschnittspunkte dieser Kreise mit der nöthigenfalls gehörig verlängerten Linie $A'B'$ die beiden gesuchten Punkte $A$ und $B$.

Bei der Messtischpraxis kann man von dieser Auflösung den folgenden Gebrauch machen, wobei wir die auf dem Messtische ge-

Digitized by Google

gebene, der Linie $MN$ auf dem Felde entsprechende Linie durch $mn$ bezeichnen wollen. Man begebe sich mit dem Messtische auf den Punkt $A$, stelle $m$ vertikal über $A$, lege die Kippregel an $mn$, orientire das Tischblatt auf $N$, richte die an $m$ liegende Kippregel auf den Punkt $M$, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie $KK'$ entsprechende Linie $kk'$ auf dem Messtische. Hierauf lege man die Kippregel in umgekehrter Lage an $kk'$, so dass das Ocular auf die Seite des Objectivs kommt, orientire das Tischblatt auf $M$, richte die an $m$ liegende Kippregel nach $B$, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie $MA'$ entsprechende Linie $ma'$ auf dem Messtische. Jetzt stelle man $n$ vertikal über $A$, lege die Kippregel an $nm$, orientire das Tischblatt auf $M$, richte die an $n$ liegende Kippregel nach $B$, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie $NA'$ entsprechende Linie $na'$ auf dem Messtische, und der Durchschnittspunkt $a'$ der Linien $ma'$ und $na'$ ist der dem Punkte $A'$ entsprechende Punkt auf dem Messtische. Indem man sich jetzt mit dem Messtische auf den Punkt $B$ begiebt, und hier auf ganz ähnliche Art wie vorher auf dem Punkte $A$ operirt, erhält man den dem Punkte $B'$ entsprechenden Punkt $b'$ auf dem Messtische. Jetzt ziehe man die Linie $a'b'$, lege die Kippregel an dieselbe und orientire das Tischblatt auf den Punkt $A$; dann lege man die Kippregel an $m$ oder $n$ und visire nach $M$ oder $N$, so giebt der Durchschnittspunkt der an der Schärfe des Lineals gezogenen Linie mit der Linie $a'b'$ den gesuchten Punkt $b$, welcher dem Punkte $B$ auf dem Felde entspricht, und da man durch Anlegung der Kippregel an $m$ und $n$ zwei Bestimmungen für den gesuchten Punkt $b$ erhält, so hat man in deren Uebereinstimmung mit einander zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit der Operation. Den dem Punkte $A$ auf dem Felde entsprechenden Punkt $a$ auf dem Messtische kann man auf ganz ähnliche Art bestimmen, wenn man sich mit dem Messtische wieder nach $A$ begiebt. Wenn die Punkte $a'$ und $b'$ nahe mit einander zusammenfallen, wird die Auflösung unsicher.

Bemerken wollen wir bei dieser Gelegenheit noch, dass schon in dem 1825 erschienenen 3ten Bande der astronomischen Nachrichten. Nr. 62. S. 233 von Gerling die folgende trigonometrische Auflösung unsers Problems gegeben worden ist.

Man setze der Kürze wegen in obiger Figur den Winkel $AMN = x$, den Winkel $BNM = y$; so ist

$$\frac{AB}{AN} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\delta}, \quad \frac{AN}{MN} = \frac{\sin x}{\sin\alpha}$$

und

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta}, \quad \frac{BM}{MN} = \frac{\sin y}{\sin\gamma}.$$

Folglich ist

$$\frac{AB}{MN} = \sin x \, \frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\alpha\sin\delta} = \sin y \, \frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

also

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\alpha\sin\delta\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\delta)}.$$

Digitized by Google

Berechnet man nun den Hülfswinkel $\varphi$ mittelst der Formel

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sin \alpha \sin \delta \sin (\beta + \gamma + \delta)}{\sin \beta \sin \gamma \sin (\alpha + \beta + \delta)},$$

so ist

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \text{tang } \varphi,$$

und folglich

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = -\frac{1 - \text{tang } \varphi}{1 + \text{tang } \varphi},$$

d. i.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x - y) \cot \tfrac{1}{2}(x + y) = -\text{tang } (45° - \varphi),$$

also

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x - y) = -\text{tang } \tfrac{1}{2}(x + y) \text{ tang } (45° - \varphi).$$

Nun ist aber offenbar $x + y = \beta + \delta$, und folglich

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x - y) = -\text{tang } \tfrac{1}{2}(\beta + \delta) \text{ tang } (45° - \varphi).$$

Weil man jetzt $x + y$ und $x - y$ kennt, so kann man auch $x$ und $y$ selbst finden. Hat man aber $x$ und $y$, so ergeben sich $AM$, $AN$, $BM$, $BN$ mittelst der folgenden Formeln:

$$AM = \frac{\sin (\alpha + x)}{\sin \alpha} \cdot MN, \quad AN = \frac{\sin x}{\sin \alpha} \cdot MN;$$

$$BM = \frac{\sin y}{\sin \gamma} \cdot MN, \quad BN = \frac{\sin (\gamma + y)}{\sin \gamma} \cdot MN;$$

und auf diese Weise ist nun die Lage der Punkte $A$ und $B$ gegen $M$ und $N$ bestimmt, wie verlangt wurde.

---

**Einfache Beweise zweier Lehrsätze.** Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin.

1) In einem jeden Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Produkte dieser beiden Seiten multiplicirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Es seien $a$, $b$, $c$ die drei Seiten des Dreiecks und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die ihnen gegenüberstehenden Winkel; dann ist nach einer Grundformel der Dreiecksmesskunst

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta,$$
$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha,$$
$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung mit $a$, die zweite mit $b$ und die dritte mit $-c$ und addirt die Produktengleichungen, so erhält man

Digitized by Google

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma,$$

indem sich die übrigen Glieder als identisch und mit entgegengesetzten Zeichen behaftet aufheben. Hieraus folgt nun unmittelbar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

2) Jede harmonische unendliche Reihe, in welcher alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben, ist divergent.

Beweis. Ist $\frac{A}{a+\nu d}$ irgend ein Glied der harmonischen Reihe, so kann man immer voraussetzen, dass $a$ und $d$ ganze Zahlen sind, weil man entgegengesetzten Falles Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner von $a$ und $d$ multipliciren könnte und dadurch $a$ und $d$, folglich auch $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ u. s. w. in ganze Zahlen übergehen würden.

Betrachtet man die unendliche harmonische Reihe

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots\ldots$$

so kann man sie zerlegen in

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{a} &+ \left\{\frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots + \frac{1}{a(1+d)}\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{a(1+d)+d} + \frac{1}{a(1+d)+2d} + \frac{1}{a(1+d)+3d} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{a(1+d)^2}\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{a(1+d)^2+d} + \frac{1}{a(1+d)^2+2d} + \frac{1}{a(1+d)^2+3d} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{a(1+d)^3}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Da nun der zweite Theil der unendlichen Reihe aus $a$, der dritte aus $a(1+d)$, der vierte aus $a(1+d)^2$ Gliedern u. s. w. besteht, so sieht man leicht, dass jeder einzelne Theil grösser ist, als $\frac{1}{1+d}$, folglich

$$S > \frac{1}{a} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+d} + \ldots\ldots,$$

und da nun die Reihe rechts gewiss divergirt, so wird die unendliche harmonische Reihe $S$ um so mehr divergiren. Hierdurch ist nun aber zugleich auch die Divergenz der Reihe

$$\frac{A}{a}, \quad \frac{A}{a+d}, \quad \frac{A}{a+2d}, \quad \frac{A}{a+3d}, \quad \frac{A}{a+4d}, \ldots$$

bewiesen.

Anmerkung. Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung desjenigen, welchen Cauchy in seinem Cours d'Analyse T. I. p. 127 für die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ gegeben hat.

---

Digitized by Google

**Nachtrag zu dem Aufsatze XIV. im Archive der Mathem. und Phys. I. Theil 1. Heft. (Auflösung des Pothenot'schen Problems). Vom Herausgeber.**

Eine zur Rechnung bequeme Auflösung des Pothenot'schen Problems, über welches die Leser auch einige Bemerkungen in einem im 3ten Hefte S. 335 auszugsweise abgedruckten Briefe des Herrn Majors und Ritters Dr. G. W. Müller zu Hannover an den Herausgeber finden, lag nicht im Zwecke des oben genannten Aufsatzes. Da sich aber aus den in demselben aufgestellten Gleichungen leicht eine sehr elegante Auflösung dieses Problems, die mit der bekannten von Gauss gegebenen Auflösung grosse Aehnlichkeit hat, ableiten lässt, so mögen als Nachtrag zu den in dem genannten Aufsatze gegebenen Entwickelungen hier noch die folgenden Bemerkungen Platz finden.

Wir haben a. a. O. 2. die folgenden sechs Gleichungen gefunden:

$$1.\quad \begin{cases} x' = x + \varrho\cos\varphi,\ y' = y + \varrho\sin\varphi; \\ x'_1 = x + \varrho_1\cos(\varphi+\alpha),\ y'_1 = y + \varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ x'_2 = x + \varrho_2\cos(\varphi+\beta),\ y'_2 = y + \varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

welche, wenn man jetzt der Kürze wegen $\varphi+\alpha=\varphi_1$, $\varphi+\beta=\varphi_2$ setzt, die folgende Gestalt erhalten:

$$2.\quad \begin{cases} x' = x + \varrho\cos\varphi,\ y' = y + \varrho\sin\varphi; \\ x'_1 = x + \varrho_1\cos\varphi_1,\ y'_1 = y + \varrho_1\sin\varphi_1; \\ x'_2 = x + \varrho_2\cos\varphi_2,\ y'_2 = y + \varrho_2\sin\varphi_2. \end{cases}$$

Durch Subtraction des zweiten und dritten Paars von dem ersten erhält man

$$3.\quad \begin{cases} x' - x'_1 = \varrho\cos\varphi - \varrho_1\cos\varphi_1,\ y' - y'_1 = \varrho\sin\varphi - \varrho_1\sin\varphi_1; \\ x' - x'_2 = \varrho\cos\varphi - \varrho_2\cos\varphi_2,\ y' - y'_2 = \varrho\sin\varphi - \varrho_2\sin\varphi_2; \end{cases}$$

wodurch die Coordinaten $x$ und $y$ eliminirt sind. Eliminirt man nun ferner sowohl aus den beiden ersten Gleichungen die Grösse $\varrho_1$, als auch aus den beiden letzten die Grösse $\varrho_2$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$4.\quad \begin{cases} (x' - x'_1)\sin\varphi_1 - (y' - y'_1)\cos\varphi_1 = \varrho\sin(\varphi_1 - \varphi), \\ (x' - x'_2)\sin\varphi_2 - (y' - y'_2)\cos\varphi_2 = \varrho\sin(\varphi_2 - \varphi); \end{cases}$$

d. i. nach dem Obigen

$$5.\quad \begin{cases} (x' - x'_1)\sin\varphi_1 - (y' - y'_1)\cos\varphi_1 = \varrho\sin\alpha, \\ (x' - x'_2)\sin\varphi_2 - (y' - y'_2)\cos\varphi_2 = \varrho\sin\beta. \end{cases}$$

Nun bestimme man, was bekanntlich immer durch leichte Rechnung möglich ist *), die Hülfsgrössen $r_1$ und $\omega_1$ so, dass dieselben den beiden Gleichungen

---

*) Sollen nämlich überhaupt die Grössen $R$ und $N$ den beiden Gleichungen

$$A = R\cos N,\ B = R\sin N$$

gemäss bestimmt werden, so rechnet man am besten nach folgendem Schema:

Digitized by Google

6. $x' - x'_1 = r_1 \cos \omega_1,\ y' - y'_1 = r_1 \sin \omega_1,$

und die Hülfsgrössen $r_2$ und $\omega_2$ so, dass dieselben den beiden Gleichungen

7. $x' - x'_2 = r_2 \cos \omega_2,\ y' - y'_2 = r_2 \sin \omega_2$

genügen; dann erhalten die beiden Gleichungen 5, welche noch die unbekannten Grössen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varrho$ enthalten, offenbar die einfache Form

8. $r_1 \sin (\varphi_1 - \omega_1) = \varrho \sin \alpha,\ r_2 \sin (\varphi_2 - \omega_2) = \varrho \sin \beta;$

und führen durch Division zu der Gleichung

9. $$\frac{r_1 \sin (\varphi_1 - \omega_1)}{r_2 \sin (\varphi_2 - \omega_2)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

oder

10. $$\frac{\sin (\varphi_1 - \omega_1)}{\sin (\varphi_2 - \omega_2)} = \frac{r_2 \sin \alpha}{r_1 \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\sin \beta},$$

die nun $\varrho$ nicht mehr enthält. Berechnet man den Hülfswinkel $\xi$ mittelst der Formel

11. $$\text{tang } \xi = \frac{r_2 \sin \alpha}{r_1 \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\sin \beta},$$

so wird die Gleichung 10.

12. $$\frac{\sin (\varphi_1 - \omega_1)}{\sin (\varphi_2 - \omega_2)} = \text{tang } \xi,$$

und verwandelt sich, wenn man auf beiden Seiten die Einheit subtrahirt und addirt, und dann dividirt, in die Gleichung

13. $$\frac{\sin (\varphi_1 - \omega_1) - \sin (\varphi_2 - \omega_2)}{\sin (\varphi_1 - \omega_1) + \sin (\varphi_2 - \omega_2)} = -\frac{1 - \text{tang } \xi}{1 + \text{tang } \xi},$$

d. i. in die Gleichung

14. $$\text{tang } \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 - \varphi_2) - (\omega_1 - \omega_2)\} \cot \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)\} = -\text{tang } (45^\circ - \xi),$$

aus der sich

15. $$\text{tang } \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)\} = -\cot (45^\circ - \xi) \text{ tang } \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 - \varphi_2) - (\omega_1 - \omega_2)\}$$

oder

---

$$\log . R \cos N = \log A$$
$$\log . R \sin N = \log B$$
$$\log \cot N = \log A - \log B$$
$$N = \ldots .$$
$$\log R = \begin{cases} \log A - \log \cos N \\ \log B - \log \sin N \end{cases}$$
$$R = \ldots \ldots \ldots$$

Digitized by Google

16. $\text{tang } \frac{1}{2}\{(\varphi_1+\varphi_2)-(\omega_1+\omega_2)\} =$
$$-\text{tang } (45°+\xi)\ \text{tang } \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1-\varphi_2)-(\omega_1-\omega_2)\},$$
oder, weil nach dem Obigen
$$\varphi_1-\varphi_2=\alpha-\beta,\ \varphi_1+\varphi_2=\alpha+\beta+2\varphi$$
ist,

17. $\text{tang } \frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)-(\omega_1+\omega_2)+2\varphi\} =$
$$-\text{tang } (45°+\xi)\ \text{tang } \tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)-(\omega_1-\omega_2)\}$$
ergiebt, in welcher Gleichung nun bloss noch die eine unbekannte Grösse $\varphi$ enthalten ist, die also mittelst derselben gefunden werden kann.

Hat man $\varphi$ gefunden, so ergiebt sich $\varrho$ mittelst eines der beiden aus 8. fliessenden Ausdrücke:

18. $$\begin{cases}\varrho=\dfrac{r_1\sin(\varphi_1-\omega_1)}{\sin\alpha}=\dfrac{r_1\sin(\varphi+\alpha-\omega_1)}{\sin\alpha},\\ \varrho=\dfrac{r_2\sin(\varphi_2-\omega_2)}{\sin\beta}=\dfrac{r_2\sin(\varphi+\beta-\omega_2)}{\sin\beta}.\end{cases}$$

Die Coordinaten $x$ und $y$ liefern hierauf die aus 2. sich ergebenden Formeln

19. $$x=x'-\varrho\cos\varphi,\ y=y'-\varrho\sin\varphi;$$

und die Entfernungen $\varrho_1$ und $\varrho_2$ können dann auch leicht mittelst der aus 1. folgenden Ausdrücke

20. $$\begin{cases}\varrho_1=\dfrac{x'_1-x}{\cos(\varphi+\alpha)}=\dfrac{y'_1-y}{\sin(\varphi+\alpha)},\\ \varrho_2=\dfrac{x'_2-x}{\cos(\varphi+\beta)}=\dfrac{y'_2-y}{\sin(\varphi+\beta)}\end{cases}$$

berechnet werden.

Zu bemerken hat man noch, dass die Formel 17. für $\varphi$ jederzeit zwei 360° nicht übersteigende Werthe liefert, und dass man von diesen beiden Werthen immer denjenigen zu wählen hat, welchem in Folge der Formeln 18. ein positiver Werth von $\varrho$ entspricht, worüber wir weiterer Bemerkungen uns hier um so mehr enthalten können, da von diesem Gegenstande schon auf S. 93. im ersten Hefte dieses Theils die Rede gewesen ist.

## Berichtigungen.

Der Name des Herrn Vfs. des Aufsatzes L. in diesem Hefte ist nicht Fleschl, sondern Flesch. Der Fehler ist durch Undeutlichkeit des Mscpts. entstanden.

Die Nummer der ersten Abhandlung in diesem Hefte muss XLVI. statt XLI. sein.

Digitized by Google

# I.

# Literarischer Bericht*).

(Die Herren Autoren und Verleger, namentlich die Verfasser und Verleger von Dissertationen, Programmen u. s. w., welche eine recht baldige Anzeige ihrer Schriften in diesem literarischen Berichte wünschen, werden um recht schleunige Einsendung derselben an die Buchhandlung des Herrn Koch zu Greifswald ersucht. Der Herausgeber wird sich bemühen, diesem Berichte eine immer grössere Vollkommenheit und Vollständigkeit zu geben; dieses Mal war noch so manche frühere Erscheinung nachzutragen, dass absolute Vollständigkeit nicht zu erreichen war.)

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A. S. de Montferrier: Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, tome 3, supplément contenant plusieurs articles sur la géometrie, la trigonométrie et l'astronomie, par le colonel Puissant. Brux. 4. 5 Thlr. 16 gGr.

A System of Practical Mathematics, containing Elements of Algebra and Geometry. With a collection of Accurate Stereotyped Tables, comprising the Logarithms of Numbers, of Sines, Tangents and Secants; Natural Sines, the requisite Nautical and Astronomical Tables, and Tables of Compound Interest and Annuities. By J. Davidson, A. M. With numerous Cuts and Copperplates. 4th. edition, greatly improved and enlarged. 8. 15 s. boards.

Vorlesungen über reine Mathematik von J. Fux, Prof. zu Olmütz. Olmütz 1839. 8. 2 Thlr. (Enthält die gewöhnlichen Elemente.)

*) Der Herausgeber bemerkt, dass diese literarischen Berichte theils von ihm, theils von andern Mitarbeitern verfasst werden.



Digitized by Google

# Arithmetik.

Saigey: Problèmes d'Arithmétique et exercices de calcul sur les questions ordinaires de la vie, sur la géométrie, la mécanique, l'astronomie, la géographie, la physique, la chimie et la métrologie ancienne et moderne. 5. ed. Bruxelles. 8 ggr. Solutions. 4 ggr.

J. Jaclot et Arbel: Récréations arithmétiques ou dix-huit-cents problèmes dont les résultats présentent des faits numériques pris dans l'histoire, la géographie, la physique, la chimie, l'astronomie etc. 2 vol. in 18. Brux. 1 Thlr. 16 ggr.

Die Elemente der Zahlenlehre in System und Beispielen von *Traugott Franke*, Dr. ph., Professor an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Erster Theil. Die Zahlen-Verbindungen und Zahlen-Veränderungen. Dresden und Leipzig. 1840. 8. 12 ggr.

Ist eigentlich als eine systematisch geordnete Sammlung von Beispielen zur Buchstabenrechnung und niedern Algebra zu betrachten, die den Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten erwünscht sein wird, da man an solchen Beispielen nicht Vorrath genug haben kann. Die Beispiele sind, wie der Verf. in der Vorrede bemerkt, so geschaffen, dass sie die folgenden Gesetze vorbereiten, theilweise andere für die Folge wichtige Gesetze enthalten, und überhaupt unter dem Scheine grosser Schwülstigkeit auf einfache, dem Auge gefällige oder dem Gedächtnisse leicht behaltbare Formen führen, um dadurch die Liebe zur Sache, welche bei der abstracten Form sonst bald verschwindet, in dem Lernenden zu wecken und zu erhalten. Die Resultate beizugeben hat der Verf. unterlassen. Er beabsichtigt eine ähnliche Sammlung für die unbestimmte Analytik, die Lehre von den Gleichungen höherer Grade und die Differential- und Integralrechnung folgen zu lassen. Hier namentlich möchte es doch manchem Lehrer wünschenswerth sein, wenn auch die Resultate beigegeben würden.

Stufenmässig geordnete algebraische Aufgaben des ersten Grades mit einer oder mehreren unbekannten Grössen, durch in Worte gefasste Schlüsse und durch Gleichungen auf möglichst verschiedene Weise aufgelöst von *J. Hufschmidt*. Essen. 1841. 8. 18 ggr.

Die Auflösung algebraischer Aufgaben ohne Gleichungen durch blosses Raisonnement, welcher der Verf. in der Vorrede mit Recht das Wort redet, hat schon Lhuilier in seiner Anleitung zur Elementar-Algebra. Tübingen. 1799., als eine treffliche Uebung des Scharfsinnes empfohlen und neben der eigentlichen algebraischen Auflösung in Anwendung gebracht.

Analysis, bearbeitet von *Carl Holtzmann*, Professor an der Grossherzoglich Badischen polytechnischen Schule. Karlsruhe 1840. 8. 2 Thlr.

Digitized by Google

Bloss die sogenannte Analysis des Endlichen. Aufmerksam machen wir auf den auf S. 375 ff. gegebenen auf geometrischen Betrachtungen im Raume beruhenden Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen, auf den wir vielleicht später in diesem Archive zurückkommen werden.

Navier: Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique. 2 Vol. 8. 4 Thlr.

Duhamel: Cours d'analyse de l'école polytechnique. Seconde partie. 8. 2 Thlr.

In Nr. 405 der astronomischen Nachrichten (Bd. 17. S. 326.) giebt Herr Th. Clausen einen Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der Gleichungen in einem „Beweis, dass die algebraischen Gleichungen Wurzeln von der Form $\alpha + \beta i$*) haben" überschriebenen Aufsatze. Dieser an sich sehr sinnreiche Beweis ist jedoch nicht von allem Zweifel frei, weil er auf der Theorie der Reihen, insbesondere auf dem Lagrange'schen Theoreme beruhet, die bis jetzt bekannten Beweise des letztern Theorems aber in so fern als mangelhaft bezeichnet werden müssen, weil sie die Convergenz und Divergenz der Reihe völlig unberücksichtigt lassen. In einem der folgenden Hefte dieses Archivs werden die neuesten, höchst wichtigen Untersuchungen Cauchy's über die Lagrange'sche Reihe mitgetheilt werden, welche den Zweck haben, den Beweis dieser wichtigen Reihe in der angedeuteten Beziehung gehörig zu vervollständigen.

In Nr. 406. der astronomischen Nachrichten (Bd. 17. S. 351.) theilt Herr Th. Clausen den folgenden merkwürdigen Satz über die Bernoullischen Zahlen ohne Beweis mit:

Der Bruch der $n$ten Bernoullischen Zahl wird so gefunden: Man addire zu den Theilern von $2n$ .... $1, 2, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots . 2n$ die Einheit, wodurch man die Reihe Zahlen $2, 3, \alpha+1, \alpha'+1, \ldots . 2n+1$ bekommt. Aus dieser nimmt man bloss die Primzahlen $2, 3, p, p'$, u. s. w. und bildet den Bruch der $n$ten Bernoullischen Zahl:

$$\mp \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \ldots .\right).$$

Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, das untere für ein gerades $n$.

J. J. Jaclot: Traité et table d'addition, enseignant les procédés des calculateurs les plus habiles pour faire cette opération avec promptitude et précision. Bruxell. 18. 6 ggr.

*Barlow's* Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbres up to 10000. Stereotype edition, examined and corrected. Royal 12. 8s. sewed.

Arithmetical Tables. By *William Frost.* 18. 6d. sewed.

*) $i = \sqrt{-1}$.



Digitized by Google

Sammlung mathematischer Tafeln. Als neue und völlig umgearbeitete Auflage von *Georgs Freiherrn von Vega* grösseren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln herausgegeben von Dr. *J. A. Hülsse*. Stereotyp-Ausgabe. Erster Abdruck. Leipzig. Weidmann'sche Buchhandlung. 1840. 3 Thlr. 12 ggr.

Diese neue Ausgabe der in ihrer frühern Gestalt aus zwei Theilen bestehenden grössern Vega'schen Tafeln halten wir für ein in jeder Beziehung sehr verdienstliches Unternehmen, und empfehlen dieselbe allen Mathematikern und allen Praktikern, denen die Ausführung logarithmisch-trigonometrischer und anderer Rechnungen obliegt.

Die gänzliche Ausschliessung der in der ältern Ausgabe enthaltenen astronomischen Tafeln ist dadurch vollständig gerechtfertigt, weil diese Tafeln bei dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie als völlig veraltet bezeichnet werden müssen, und durch die vervollkommnete Gestalt, in welcher jetzt die astronomischen Ephemeriden, namentlich das Berliner astronomische Jahrbuch, die Connaissance des tems, die Effemeridi astronomiche di Milano und der Nautical Almanac erscheinen, in der That auch völlig entbehrlich gemacht werden. Durch diese Ausschliessung der astronomischen Tafeln ist es vorzüglich möglich gemacht worden, die Tafeln in der neuen Ausgabe auf einen weit kleinern Raum zu reduciren, und auch den Preis bedeutend zu ermässigen, da die ältere Ausgabe 5 Thaler, die neue nur 3 Thaler und 12 gute Groschen kostet, und überdies haben die Käufer für die weggelassenen astronomischen Tafeln durch Hinzufügung einiger in der ältern Ausgabe nicht enthaltenen, sehr nützlichen Tafeln, die wir nachher besonders namhaft machen wollen, sehr reichlichen Ersatz erhalten.

Die folgende Angabe des Inhalts wird am besten zur Empfehlung dieser schönen Tafeln dienen.

Einleitung über Einrichtung und Gebrauch der Tafeln

I. Tafel der gemeinen oder briggischen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 108000.

Die Einrichtung dieser Tafel ist die gewöhnliche. Beigefügt ist noch eine kleine Hülfstafel zur Verwandlung der gemeinen Logarithmen in natürliche, und eine Hülfstafel zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in gemeine.

II. Tafel der briggischen Logarithmen für die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 0 bis 90 Grad.

Auch diese Tafel hat im Ganzen die gewöhnliche Einrichtung. In den 5 ersten Graden schreiten die Winkel von 10 zu 10 Secunden, nachher von Minute zu Minute fort. Wir bedauern sehr, dass der Herausgeber nicht durch den ganzen Quadranten die Winkel von 10 zu 10 Secunden wie z. B. in den Callet'schen Tafeln hat fortschreiten lassen. Wäre dies der Fall, so würden seine Tafeln allen übrigen vorziehen.

Angehängt ist eine Tafel der Längen der Kreisbogen für die einzelnen Grade, Minuten und Secunden.

III. Tafel der wirklichen Länge der trigonometrischen Linien.

In dieser Tafel schreiten die Winkel ganz zweckmässig von Minute zu Minute fort.

IV. Sehnentafel für den Halbmesser 500 von 0 bis 125 Grad.

Hülfstafel zur Verwandlung der Centesimalbogen in Sexagesimalbogen.

Digitized by Google

Hülfstafel zur Verwandlung der Sexagesimalbogen in Bruchtheile des Quadranten.

V. Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 102000 und der Primzahlen von 102000 bis 400000.

VI. Tafel der natürlichen Logarithmen für alle auf einander folgenden Zahlen von 1 bis 1000 und für alle Primzahlen von 1000 bis 10000.

Die Logarithmen sind in dieser Tafel in acht Decimalstellen angegeben. Angehängt sind noch die Potenzen von 2 von der 1sten bis zur 45sten, die Potenzen von 3 von der 1sten bis zur 36sten, die Potenzen von 5 von der 1sten bis zur 27sten.

VII. Potenzen der Grundzahl $e$ des natürlichen Logarithmen-Systems für alle Hundertel von 0,01 bis 10 nebst den briggischen Logarithmen dieser Potenzen: oder umgekehrte Tafel der natürlichen Logarithmen, welche für alle Hundertel der natürlichen Logarithmen von 0,01 bis 10,00 die zugehörigen Zahlen nebst ihren gemeinen Logarithmen enthält.

VIII. Tafel der Quadrat- und Cubikwurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000.

Die Quadratwurzeln sind auf 12, die Cubikwurzeln auf 7 Decimalstellen berechnet.

Angehängt sind einige in Decimalbrüche verwandelte oft vorkommende Coefficienten unendlicher Reihen nebst ihren Logarithmen.

IX. Potenzen-Tafel, enthaltend:

A. Die ersten 11 Potenzen aller Zahlen von 0.01 bis 1,00.

B. Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100.

C. Die ersten 3 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 1000.

D. Die ersten 100 Potenzen von 1,01; 1,02; 1,025; 1,0275; 1,03; 1,0325; 1,035; 1,0375; 1,04; 1,045; 1,05 und 1,06.

E. Die ersten 100 Potenzen von $\frac{1}{1,01}$; $\frac{1}{1,02}$; $\frac{1}{1,025}$; $\frac{1}{1,0275}$; $\frac{1}{1,03}$; $\frac{1}{1,0325}$; $\frac{1}{1,035}$; $\frac{1}{1,0375}$; $\frac{1}{1,04}$; $\frac{1}{1,045}$; $\frac{1}{1,05}$ und $\frac{1}{1,06}$.

F. Die Summationen der auf einander folgenden Werthe der Tafel *D*.

G. Die Summationen der auf einander folgenden Werthe der Tafel *E*.

Angehängt ist eine Tafel der Zeiten, in denen sich ein durch zusammengesetzte Zinsen wachsendes Kapital vervielfältigt.

X. Mortalitäts-Tafeln.

Angehängt sind zwei Hülfstafeln zur Verwandlung des Duodecimalmaasses in Decimalmaass, und des Decimalmaasses in Duodecimalmaass.

XI. Tafeln zur Vergleichung der gebräuchlichen Maasse und Gewichte.

XII. Erweiterte Gaussische Tafel zur Berechnung eines Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen nur gegeben sind.

Angehängt ist endlich noch eine Tafel zur Erleichterung des Einschaltens oder Interpolirens unter der Ueberschrift Interpolations-Tafel, und den Beschluss macht eine Tafel einiger oft vorkommenden Zahlenwerthe und der Logarithmen derselben, wie z. B. der Werth von $\pi$, log vulg $\pi$, log nat $\pi$, der Werth von $e$, log vulg $e$, log nat $e$, und mehreres Andere.

Digitized by Google

Die Tafeln IV, VIII, ein Theil der Tafel IX, die Tafeln X, die Tafeln XI und vor allen die Tafeln XII sind neu hinzugekommen.

Nimmt man hierzu nun noch, dass diese Tafeln auf schönes Papier mit nicht zu kleinen, scharfen und deutlichen Lettern gedruckt sind, wodurch sie sich namentlich vor den Callet'schen Tafeln, deren Druck viel kleiner und, wie Jeder, der diese Tafeln oft und viel gebraucht hat, aus Erfahrung wissen wird, angreifend für die Augen ist, sehr vortheilhaft auszeichnen, so wird man gewiss unsere oben ausgesprochene Ueberzeugung, dass diese Tafeln ein sehr verdienstliches und der Empfehlung sehr würdiges Unternehmen sind, theilen, und auch den Preis jedenfalls sehr mässig finden.

Für möglichst genaue Correctur haben ausser dem Herausgeber die Herren Dr. Brandes und Michaelis Sorge getragen.

Logarithmische Tafeln der Nummer-Logarithmen (1—10000), der Sinus und Tangenten in Graden und Minuten, der Tabelle zur Findung des Log. der Summe oder Differenz zweier Zahlen, welche selbst nur durch ihre Log. gegeben sind, und einiger anderer Hülfstafeln. Auf eine neue Weise geordnet und herausgegeben von *A. Meldola*, Lehrer des kaufmännischen Rechnens und der mathematischen Wissenschaften. Mit einer Vorrede vom Conferenzrath Schumacher. Altona. 1840. 8. 16 ggr.

Herr Conferenzrath Schumacher spricht sich in seinem Vorworte über diese Tafeln auf folgende Art aus: „Herr Meldola wollte die Logarithmen mit 5 Decimalen in einen kleinern Raum bringen, und sie dadurch bequemer zum Gebrauche und wohlfeiler machen. Da gerade diese Logarithmen sehr häufig Anwendung finden, so kann ein solches Unternehmen, gut ausgeführt, nur den Rechnern angenehm sein, und dass er es gut ausführen und vorzüglich für correcten Abdruck sorgen werde, verbürgt sein Fleiss und sein Streben nach Genauigkeit. Die Gaussischen Tafeln um den Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen zu finden, die selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, hat er auf den Wunsch des Herrn Geheimeraths Bessel hinzugefügt.“ Dem Urtheile eines so competenten Richters, wie Herr Conferenzrath Schumacher ist, haben wir nur noch hinzuzufügen, dass diese Tafeln auf gutes Papier mit scharfen und deutlichen Lettern gedruckt sind, und gewiss verdienen, von den Rechnern häufig und fleissig gebraucht zu werden.

Tabeller i Mathematiska Ämnen. Utgifne af E. A. Björkman. I Twenne Delar. Förra Delen. Logarithmiska och trigonometriska Tabeller. Stockholm. 1840. 16. 1 Rdr. 36 Sk. (Tafeln über mathematische Gegenstände, herausg. von E. A. Björkman. In zwei Theilen. Erster Theil. Logarithmische und trigonometrische Tafeln).

Populationistik oder Bevölkerungswissenschaft von *Ch. Bernoulli*, Professor zu Basel. Erste Hälfte. Allgemeine Bevölkerungsstatistik oder Verhältnisse der Leben-

Digitized by Google

den. Gebornen, Verehelichten und Sterbenden. Ulm 1840. 8. 1 Thlr. 21 ggr.
(Gehört der Politischen Arithmetik wegen hierher.)

---

## Geometrie.

Euclids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Aufs neue herausgegeben nebst einem Anhange von M. C. Dippe. Sechste verbesserte Ausgabe. Halle 1840. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

The Elements of Euclid: viz. the first six Books, together with the Eleventh and Twelfth. Printed with a few Variations, and additional References, from the Text of *R. Simson*, M. D. Carefully corrected by *S. Maynard*. New edit. 18. 6s. bound.

The Elements of Euclid: the first six Books and the Eleventh and Twelfth. Edited, in the Symbolical Form, by *R. Blakelock*, M. A. 18. 6s. 6d. boards; 7s. bound.

The first six Books of the Elements of Euclid, with a Commentary and Geometrical Exercises. To which are annexed a Treatise on solid Geometry, and short Essays on the Ancient Geometrical Analysis, and the Theory of Transversals. For the use of Schools and Universities. By *Dionysius Lardner*, LL. D. 7th. edit. 8. 7s. boards.

Euclidis Proportionslära med förklaringar; utgifwen af P. N. Ekman, Docens i Mathematiken wid Upsala Universitet. Stockholm 1840. 8. 16 Sk. (Euclids Proportionslehre mit Erklärungen; herausgegeben von P. N. Ekman, Docent der Math. an der Univ. zu Upsala).

Lehrbuch der Geometrie als Leitfaden beim Unterrichte an höhern Bürgerschulen und ähnlichen Lehranstalten, von *W. Mink*, Lehrer der Mathematik an der höhern Stadtschule zu Crefeld. Crefeld 1840. 20 ggr.
Ein für seinen Zweck sich recht wohl eignendes elementares Lehrbuch, welches übrigens, was der Titel unerwähnt lässt, auch die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie enthält.

Lehrbuch der Geometrie für technische Lehranstalten und Gymnasien von H. Rose. Erster Theil. Die ebene Geometrie. Nürnberg 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Digitized by Google

System der Geometrie. Lehrbuch für akademische Vorträge und höhere Unterrichts-Anstalten von Dr. A. Arneth. Von den geraden Linien in der Ebene. Erste und zweite Abtheilung. Stuttgart 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Hauptsächlich den Ansichten von Schweins folgend beabsichtigt der Verf. ein vollständiges System der Geometrie zu liefern, kleidet dieselbe aber gleich vom Anfange an in ein rechnendes Gewand, wodurch freilich ihr schöner synthetischer Character ganz verloren geht, wenn auch auf der andern Seite nicht zu leugnen ist, dass durch den von dem Verf. betretenen Weg allerdings eine Vereinfachung des Systems erreicht wird.

Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von N. Lobatschewsky. Berlin 1840. 12 ggr.

Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben von Dr. Ch. Nagel. Ulm. 1840. 10 ggr.

Ueber die symmetrischen Kreisvielecke von ungerader Seitenzahl von J. H. T. Müller. Gotha 1840. 4. 6 ggr.

Eine sehr lesenswerthe Abhandlung.

Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie von C. T. Anger, Professor am Gymnasium und Direktor der Königlichen Gewerbeschule zu Danzig. Erstes Heft. Einleitung. Theorie der Aehnlichkeitspunkte. Danzig 1839. 4. 8 ggr.

Der Gedanke, welchem diese Schrift ihre Entstehung verdankt, kann ein sehr glücklicher genannt werden. Herr Professor und Director Anger in Danzig beabsichtigt nämlich, in einzelnen nach und nach erscheinenden Heften verschiedene Gegenstände der sogenannten neuern Geometrie auf eine möglichst elementare Weise zu behandeln, und so die merkwürdigen Entdeckungen von Gergonne, Poncelet, Steiner u. A. einem grössern Publicum auf möglichst leichte Art zugänglich zu machen, wodurch Herr Professor Anger sich unstreitig ein wesentliches Verdienst um die grössere Verbreitung dieses schönen Theils der Mathematik, und dessen sehr zu wünschende Einführung in den geometrischen Elementarunterricht erwerben wird. Zweckmässig würden wir übrigens die völlige Ausschliessung der Anwendung der Lehren der analytischen Geometrie aus diesen Heften finden, deren schnelles Aufeinanderfolgen jedenfalls sehr wünschenswerth ist.

Lefebure de Fourcy: Leçons de Géometrie analytique. 4. édit. 8. 2 Thlr. 21 ggr.

Analytische Geometrie im Raum, enthaltend die Flächen zweiter Ordnung, nebst der allgemeinen Theorie der krummen Flächen und der Linien von doppelter Krümmung von *C. F. A. Leroy*, übersetzt nach der zweiten, verbesserten und vermehrten Auflage von *E. F. Kauffmann*. Stuttgart 1840. 1 Thlr. 9 ggr.

In Nr. 408. der astronomischen Nachrichten (Bd. 17, S. 374).

Digitized by Google

befindet sich ein höchst lesenswerther Aufsatz des Herrn S. Löwenstern über die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten, welcher den Zweck hat, das Auffinden der üblichsten Transformationen der rechtwinkligen Coordinaten zu erleichtern.

## Praktische Geometrie.

Francoeur: Géodésie, ou traité de la figure de la terre et de ses parties. 2. édit. 8. 2 Thlr. 21 ggr.

Clerc: Essai sur les élémens de la pratique des levers topographiques. 1. volume. 8. 6 Thlr.

Duhousset: Application de la géométrie à la topographie. 2. édit. Paris. 8. 10 Fr.

An Introduction to Mensuration and Practical Geometry: with Notes, containing the Reason of every Rule. By J. Bonnycastle, late Professor of Mathematics in the Royal Military Academy, Woolwich. 18. edit. corrected and improved by S. Maynard. 4 s. 6 d. bound.

In Nr. 410 der astronomischen Nachrichten (Bd. 18. S. 26.) befindet sich ein Aufsatz des Herausgebers dieses Archivs: Bemerkungen über trigonometrische Nivellements, insbesondere über die terrestrische Strahlenbrechung, von Dr. J. A. Grunert, in welchem der Versuch gemacht wird, eine Methode anzugeben, mittelst welcher man genauere und zuverlässigere Bestimmungen des Coefficienten der terrestrischen Strahlenbrechung erhalten kann, als durch die bisherigen Methoden.

*H. L. Smalians*, Königl. Preuss. Oberforstmeisters etc. Baumhöhenmesser und einfaches Verfahren der Baummessung und Holzberechnung für Forstmänner, Bauherrn und Holzhändler. Stralsund 1840. 12 ggr.

Enthält die Beschreibung eines sehr einfachen Baumhöhenmessers, der zugleich auch als Kreuzscheibe gebraucht werden kann, und den der Herausgeber aus eigener Kenntniss und nach selbst gemachtem Gebrauche empfehlen kann. Er ist in der Löffler'schen Verlagshandlung zu Stralsund für den sehr geringen Preis von 1 Thlr. 15 Sgr. zu haben, und dürfte selbst ein für Schulen instructives, sinnreich eingerichtetes Instrument seyn. Seine Theorie setzt nur die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke voraus und der obigen Beschreibung wird ein Exemplar auf starkem Kartenpapier beigegeben.

Digitized by Google

# Trigonometrie.

**Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie von Friedrich Pross, Professor der Mathematik an der Königlichen polytechnischen Schule zu Stuttgart. 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.**

Eine recht vollständige und sehr deutliche Darstellung der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie mit vielen Anwendungen auf Geodäsie und einer grossen Anzahl vollständig ausgerechneter numerischer Beispiele, die zum Theil aus wirklich ausgeführten Messungen entnommen sind, in welcher Beziehung daher das Buch insbesondere Praktikern empfohlen zu werden verdient. Die goniometrischen und cyclometrischen Reihen hat der Verf. auch aufgenommen, dabei aber nie die Bedingungen der Convergenz und Divergenz berücksichtigt, weshalb die Behandlung dieser wichtigen Lehre keineswegs dem neuern Zustande der Mathematik und den jetzigen Anforderungen entspricht. Aber auch abgesehen hiervon müssen wir den auf S. 56 und 57 gegebenen Beweis der bekannten Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ für völlig ungenügend und verfehlt erklären. Von der Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

die als aus der Analysis bekannt angenommen wird, ausgehend, zeigt nämlich der Verf., dass die Ausdrücke

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

die er der Kürze wegen durch $M$ und $N$ bezeichnet, und die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ gewisse Eigenschaften, wie z. B.

$$M^2 + N^2 = 1 \text{ und } \cos x^2 + \sin x^2 = 1,$$

ferner $M = 1$, $N = 0$ für $x = 0$, und $\cos x = 1$, $\sin x = 0$ für $x = 0$, mit einander gemein haben, und schliesst dann auf S. 57 auf folgende Art:

„Die Ausdrücke $M$ und $N$ haben also ganz die Eigenschaften von $\cos x$ und $\sin x$, woraus demnach folgt, dass:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x.$$

Man hat also:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots“.$$

Daraus aber, dass Functionen gewisse Eigenschaften mit einander gemein haben, kann man doch wohl nicht auf ihre Gleichheit im Allgemeinen schliessen! Solche falsche Schlüsse verwirren nur den Anfänger und erzeugen falsche Begriffe.

Digitized by Google

Wir können nicht umhin, dem Herrn Verfasser rücksichtlich der Convergenz und Divergenz der Reihen die weiter unten angeführte Stelle aus einem Briefe des leider zu früh verstorbenen trefflichen Abel an seinen Lehrer, den Professor Holmboe in Christiania recht dringend an's Herz zu legen.

In der im Eingange namhaft gemachten Rücksicht wird das Buch aber doch Nutzen stiften.

Die sphärische Trigonometrie in analytischer Darstellung nebst einem Anhange grössten Theils neuer goniometrischer Formeln von Carl Breymann. Wien 1840. 8. 12 ggr.

Die Schrift kann Anfängern wegen ihrer deutlichen und vollständigen Darstellung empfohlen werden. Die Lehre vom sphärischen Excess hätte der Verf. aber doch auch aufnehmen sollen, da dieselbe für die Geodäsie so höchst wichtig ist.

(Die trigonometrischen Tafeln s. unter Arithmetik.)

## Mechanik.

De motu corporum libere cadentium. Particula I. historiam hujus scientiae continens. Scripsit Dr. C. G. A. Becker. Vratislaviae 1840. 4. 8 ggr.

Boucharlat: Elémens de Mécanique. 3. édit. 8. 3 Thlr.

## Praktische Mechanik.

Die Mechanik oder Anleitung zur praktischen Maschinenkunde und zur Beurtheilung und Leitung bewegender Kräfte. Aus dem Engl. nach Chambers Erziehungs-Cursus übers. vom Professor Dr. Mensing. Erfurt. Gr. 12. 12 ggr.

Allgemeine Maschinen-Encyclopädie, im Verein mit G. Altmüller und A. Burg (Proff. am polyt. Inst. zu Wien), Th. Fischer (Maschinenmeister) und M. F. Gätzschmann (Prof. an der Bergakademie in Freiberg), C. G. Hummel (Lector an der polytechn. Lehranstalt in Copenhagen), K. Karmarsch (Director der Gewerbschule in Hanover), F. Reich (Professor an der Bergakademie in Freiberg), J. Schneider (Prof. am Coll. Carol. in Braunschweig), J. A. Schubert (Prof. an der technischen Bildungsanstalt) und E. Weinlig (Ingenieurlieutenant in Dresden), Dr. A. Weinlig (in Leipzig), J. Weisbach (Prof. an der Bergakademie in Freiberg) herausgegeben von Dr. *Jul. Ambr. Hülsse.* Leipz. 1840. 8. 1. u. 2. Lief. mit Atlas in Folio 5 Thlr. 8 ggr.

Digitized by Google

Von diesem Werke, welches für praktische Mechanik wichtig zu werden verspricht, sind uns bis jetzt zwei Lieferungen zugegangen, die schon mehrere sehr ausführliche und lehrreiche Artikel enthalten.

Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle physique. 2. édit. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Lanz et Betancourt: Essai sur la composition des machines. 3. édit. 4. 6 Thlr.

D'Aubuisson de Voisins: Traité d'hydraulique à l'usage des ingénieurs. 2. édit. Paris. 8. 9 Frcs.

Piobert et Tardy: Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical, et sur l'écoulement de l'eau. 8. 1 Thlr. 14 ggr.

Andraud: De l'air comprimé et dilaté comme moteur. Paris. 8. 3 Frcs.

Urban Jürgensens allgemeine Grundsätze der genauen Zeitmessung durch Uhren oder Zusammenfassung der Grundsätze des Uhrenbaues zur sorgfältigsten Zeitmessung, mit einem Anhange versehen, enthaltend zwei Abhandlungen über die Uhrmacherkunst und Beschreibung eines sehr genau gehenden Metallthermometers. Nach der zweiten durch Ludwig Urban Jürgensen besorgten und vermehrten Ausgabe deutsch bearbeitet. Leipzig 1840. 4. 3 Thlr. 12 ggr.

## Astronomie.

Traité élémentaire de Physique céleste, ou Précis d'Astronomie théorique et pratique, servant d'introduction à l'étude de cette science, par *G. de Pontécoulant.* Ouvrage, destiné aux personnes peu versées dans l'étude des sciences mathématiques T. I. II. Paris 1840. 8. 4½ Thlr.

Ein gut geschriebenes populäres Lehrbuch der Astronomie, das nur die elementarsten mathematischen Kenntnisse voraussetzt, und für die Liebhaber der französischen Literatur eine willkommene Erscheinung seyn wird, da es die Hauptlehren der Astronomie deutlich und ziemlich vollständig vorträgt. Etwas mehr hätten wir jedoch in einem solchen Buche über die Fixsterne zu finden geglaubt, denen nur das bloss drei Seiten lange dreizehnte Kapitel gewidmet ist. In Deutschland besitzen wir schon mehrere sehr vorzügliche Schriften ähnlichen Inhalts. Dem zweiten Theile sind einige Noten mathematischen Inhalts über die Verwandlung der Rectascension und Declination in Länge und Breite und umgekehrt, über die Parallaxenrechnung, über die Bestimmung der grössten Mittelpunktsgleichung der Sonne durch Beobachtungen, über die elliptische Bewe-

Digitized by Google

gung, über die Berechnung der Planetenbahnen, über das Gesetz der allgemeinen Gravitation, über die Werthe der Massen der Planeten, über die Gestalt der Erde, über die Veränderung der Schwere und der Länge des Secundenpendels beigefügt, in denen wir nichts Neues, was hier einer besondern Mittheilung werth wäre, gefunden haben.

Handbok i Practiska Astronomien af S. A. Cronstrand. Första Häftet. Till ledning under föreläsningarna wid det högre Militär-Lärowerket på Marieberg. Stockholm. 1840. 8. 1 Rdr. 32 sk. (Handbuch der praktischen Astronomie von S. A. Cronstrand. Erstes Heft. Zum Leitfaden bei den Vorlesungen an der höhern Militärunterrichtsanstalt auf Marieberg).

Jahrbuch für 1840. Herausgegeben von *H. C. Schumacher*, mit Beiträgen von *Bessel*, *Erman*, *Mädler* und *Olbers*. Stuttgart und Tübingen. 1840. 8. 2 Thlr.

Die Einrichtung des astronomischen Theils dieses Jahrbuchs kann als bekannt vorausgesetzt werden. Die Aufsätze, welche dieser Jahrgang enthält, sind folgende:

Ueber Maass und Gewicht im Allgemeinen und das preussische Längenmaass im Besonderen von F. W. Bessel.

Ueber die Weltstellung der Körper unseres Sonnensystems von Mädler.

Ueber die neuern Sternbilder von Olbers.

Untersuchungen über den Einfluss des Monds auf die Witterung von Mädler.

Ueber meteorologische Beobachtungen auf einer Seereise um die Erde von A. Erman.

Besonders machen wir auf den Aufsatz von Bessel aufmerksam, in welchem ausführliche Nachricht über die Maassregeln ertheilt wird, welche vor Kurzem in Preussen zur Festsetzung der Einheit des preussischen Längenmaasses und Behufs der leichten Erlangung sehr genauer Copien derselben ergriffen worden sind. Ueber diesen wichtigen und allgemein interessanten Gegenstand verbreitet sich auch ein Aufsatz von Bessel in den Astronomischen Nachrichten. Band 17. Nr. 397.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1842. Berlin. 1840. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Enthält folgende Abhandlungen:

Ueber die Einrichtung des Jahrbuchs. Geographische Lage der Hauptsternwarten, zusammengestellt von Dr. Wolfers.

Ueber die Vorausberechnung der Planetendurchgänge.

Ueber zwei nautische Aufgaben. 1. Berechnung der nautischen Aufgaben nach den Grundsätzen der runden Schifffahrt. 2. Die gewöhnlichen Methoden der Seefahrer zur Reduction der Monddistanzen.

In dem letzten Aufsatze sind fünf verschiedene Methoden zur Reduction der Monddistanzen zusammengestellt und bewiesen; die beiden ersten sind völlig genau, die drei letzten sind Näherungsmethoden.

In der Hoffnung, dass vielen Lesern, die dieses treffliche Jahrbuch nicht besitzen, dadurch ein angenehmer Dienst geleistet werden wird, wollen wir im Folgenden das von Herrn Dr. Wolfers mit

Digitized by Google

grosser Sorgfalt und kritischer Genauigkeit zusammengestellte Verzeichniss der Hauptsternwarten nebst ihrer geographischen Lage mittheilen, da dies die Punkte auf der Erdoberfläche sind, deren geographische Positionen gegenwärtig als am genauesten bestimmt angesehen werden können.

| Name des Orts. | Geograph. Breite + nördlich — südlich | Länge v. Berlin in Zeit. + westlich — östlich | Östl. Länge von Ferro in Bogen. |
|---|---|---|---|
| Abo | + 60° 26′ 56″, 8 | — 0h 35′ 33″, 3 | 39° 56′ 49″, 5 |
| Altona | + 53 32 45, 3 | + 0 13 48, 9 | 27 36 16, 1 |
| Berlin | + 52 30 16, 0 | 0 0 0 | 31 3 30, 0 |
| Bonn | + 50 44 8, 6 | + 0 25 8, 5 | 24 46 22, 5 |
| Bremen | + 53 4 36, 0 | + 0 18 19, 7 | 26 28 34, 5 |
| Breslau | + 51 6 30, 0 | — 0 14 34, 4 | 34 42 6, 0 |
| Brüssel | + 50 51 10, 8 | + 0 36 7, 0 | 22 1 45, 0 |
| Cambridge | + 52 12 51, 8 | + 0 53 12, 0 | 17 45 30, 0 |
| Christiania | + 59 54 42, 4 | + 0 10 35, 7 | 28 24 34, 5 |
| Copenhagen | + 55 40 53, 0 | + 0 3 16, 3 | 30 14 24, 8 |
| Cracow | + 50 3 50, 0 | — 0 26 15, 5 | 37 37 22, 5 |
| Dorpat | + 58 22 47, 1 | — 0 53 19, 5 | 44 23 22, 5 |
| Dublin | + 53 23 13, 0 | + 1 18 57, 5 | 11 19 7, 5 |
| Edinburg | + 55 57 23, 2 | + 1 6 19, 1 | 14 28 43, 5 |
| Florenz | + 43 46 40, 8 | + 0 8 32, 0 | 28 55 30, 0 |
| Gotha | + 50 56 5, 2 | + 0 10 39, 1 | 28 23 43, 5 |
| Göttingen | + 51 31 47, 9 | + 0 13 49, 0 | 27 36 15, 0 |
| Greenwich | + 51 28 39, 0 | + 0 53 35, 5 | 17 39 37, 5 |
| Hamburg | + 53 33 5, 0 | + 0 13 40, 9 | 27 38 16, 5 |
| Helsingfors | + 60 9 42, 3 | — 0 46 16, 0 | 42 37 30, 0 |
| Königsberg | + 54 42 50, 4 | — 0 28 25, 0 | 38 9 45, 0 |
| Kremsmünster | + 48 3 24, 0 | — 0 2 56, 9 | 31 47 43, 5 |
| Mannheim | + 49 29 13, 7 | + 0 19 44, 1 | 26 7 28, 5 |
| Marseille | + 43 17 49, 0 | + 0 32 6, 0 | 23 2 0, 0 |
| Mailand | + 45 28 0, 7 | + 0 16 49, 2 | 26 51 12, 0 |
| München | + 48 8 45, 0 | + 0 7 9, 0 | 29 16 15, 0 |
| Neapel | + 40 51 46, 6 | — 0 3 24, 8 | 31 54 42, 0 |
| Nicolajew | + 46 58 20, 6 | — 1 14 19, 6 | 49 38 24, 0 |
| Padua | + 45 24 2, 0 | + 0 6 5, 7 | 29 32 4, 5 |
| Palermo | + 38 6 44, 0 | + 0 0 9, 9 | 31 1 1, 5 |
| Paramatta | — 33 48 49, 8 | — 9 10 30, 8 | 168 41 12, 0 |
| Paris | + 48 50 13, 0 | + 0 44 14, 0 | 20 0 0, 0 |
| Petersburg | + 59 56 31, 0 | — 1 7 44, 0 | 47 59 30, 0 |
| Pulkowa | + 59 46 18, 0 | — 1 7 49, 2 | 48 0 48, 0 |
| Prag | + 50 5 18, 5 | — 0 4 9, 3 | 32 5 49, 5 |
| Rom | + 41 53 54, 0 | + 0 3 40, 8 | 30 8 18, 0 |
| Speyer | + 49 18 55, 2 | + 0 19 49, 0 | 26 6 15, 0 |
| Stockholm | + 59 20 31, 0 | — 0 18 39, 3 | 35 43 19, 5 |
| Turin | + 45 4 6, 0 | + 0 22 47, 1 | 25 21 43, 5 |
| Upsala | + 59 51 50, 0 | — 0 16 59, 3 | 35 18 19, 5 |
| Vorgeb. d. g. H. | — 33 56 3, 0 | — 0 20 19, 5 | 36 8 22, 5 |
| Warschau | + 52 13 1, 0 | — 0 30 17, 0 | 38 7 45, 0 |
| Wien | + 48 12 35, 0 | — 0 11 56, 4 | 34 2 36, 0 |

Digitized by Google

Jahrbuch der K. Sternwarte bei München für 1840. Herausgegeben von J. Lamont. München. 1840. 12. 1 Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen u. s. w. Herausgegeben von *Fr. v. P. Gruithuisen*, ordentlichem Prof. der Astronomie zu München. Drittes Jahr. München 1840. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

---

## Physik.

---

Lamé: Cours de Physique de l'école polytechnique. 2. édit. 3 Volumes. 6 Thlr. 16 ggr.

Peyré: Cours de Physique. 2. édit. 8. 4 Thlr.

C. Despretz: Traité élémentaire de Physique. 6. édit. Bruxelles. 8. 3 Thlr. 6 ggr.

Pouillet: Elémens de physique expérimentale et de météorologie, ouvrage adopté par le conseil royal de l'instruction publique, pour l'enseignement de la physique dans les établissemens de l'université. 4. éd. Bruxelles. 8. 2 Thlr. 18 ggr.

Becquerel: Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme, et de leurs phenomènes naturels. T. V. 2. Partie. T. VI. 1. Partie. 12 Thlr.

Matteucci: Essai sur les phénomènes électriques des animaux. 8. 1 Thlr. 3 ggr.

Dr. G. Delffs: De conditione columnae voltaicae electro-statica. Dissertatio physico-mathematica. Kiliae. 4 ggr.

Die Galvanoplastik oder das Verfahren cohärentes Kupfer in Platten oder nach sonst gegebenen Formen, unmittelbar aus Kupferauflösungen, auf galvanischem Wege zu produciren. Von Dr. M. H. Jacobi, Kaiserl. Russ. Hofrathe u. s. w. St. Petersburg. 1840. 8. 1 Thlr.

Einem Jeden, welcher die durch Herrn Hofrath M. H. Jacobi gemachte höchst wichtige Erfindung der Galvanoplastik genau kennen zu lernen wünscht, kann der Herausgeber diese Schrift aus voller Ueberzeugung empfehlen. Sie ist sehr deutlich verfasst, und enthält auch, gewissermassen als Einleitung für weniger mit der Physik und Chemie bekannte Leser, eine Darstellung der Lehre vom Galvanismus, welches der sehr zu wünschenden weitern und allgemeinern Verbreitung derselben gewiss sehr förderlich seyn wird.

Digitized by Google

Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber. Leipzig. 1840. 4. 3 Thlr. 8 ggr.

Dieses wichtige Werk enthält eine Reihe magnetischer Karten, die durch Herrn Professor Wilhelm Weber und Herrn Doctor Goldschmidt allein nach der von Gauss im dritten Jahrgange der Resultate des magnetischen Vereins bekannt gemachten Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus entworfen worden sind. Die Anzahl der Karten ist 18.

Theorie der Wolken oder Nepheleologie nach ihrem neuesten Standpunkte bearbeitet. Von Anton Gundinger. Wien. 1840. 8. 12 ggr.

Enthält eine populäre Darstellung der bekannten Theorie der Wolken.

Ueber die nicht periodischen Aenderungen der Temperaturvertheilung auf der Oberfläche der Erde in dem Zeitraume von 1789 bis 1838. Eine in der Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung von *H. W. Dove*, Mitgliede der Akademien der Wissenschaften zu Berlin u. s. w. Berlin 1840. 4. 2 Thlr.

Wichtig für die Meteorologie.

Garnier: Traité de Météorologie ou physique du globe. 2 Vols. 8. 4 Thlr.

Peltier: Météorologie. Observations sur la formation des trombes. Paris. 8. 8 Frcs.

H. Lecoq: Elements de géographie, physique et de météorologie, édition belge par J. W. Schmitz. Bruxelles. 8. 3 Thlr. 18 ggr.

Voyage autour du monde exécuté pendant les années 1836 et 1837 sur la corvette la Bonite commandée par Vaillant. Observations météorologiques. 8. 6 Thlr.

L. F. Wartmann: Mémoire sur les étoiles filantes observées à Genève, dans la nuit du 10 au 11 août 1838. Bruxelles. 8. 16 ggr.

Arago's Unterhaltungen aus dem Gebiete der Naturkunde. 4. Theil. Aus dem Franz. von Dr. C. F. Grieb. Stuttgart. 1840. 1 Thlr. 18 ggr.

Ueber die Berechnung der bei Wägungen vorkommenden Reductionen, von *Etatsrath Schumacher*. Hamb. 1838. 4. 16 ggr.

Diese den wissenschaftlichen Theil des Jahresberichts der mathematischen Gesellschaft zu Hamburg für 1837 bis 1839 bildende Abhandlung scheint erst jetzt in den Buchhandel gekommen zu sein, weshalb wir hier auf dieselbe wegen ihres höchst lehrreichen Inhalts besonders aufmerksam machen. Alles was bei der Ausführung genauer Wägungen dem Physiker und Chemiker zu wissen nöthig ist, findet er nebst zwölf Hülfstafeln zur Erleichterung der auszuführenden Rechnungen in dieser trefflichen Abhandlung beisammen.

---

Digitized by Google

## Vermischte Schriften.

Oeuvres complètes de *N. H. Abel*, Mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du *Roi* par *B. Holmboe*, professeur de mathématiques à l'université de Christiania, etc. Tome premier, contenant les oeuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant. Tome second, contenant les oeuvres de l'auteur qui n'ont pas été publiées auparavant. Christiania. 1839. 4. 16 Thlr. 16 ggr.

Dieses Werk gehört unstreitig zu den wichtigsten Erzeugnissen der neuern mathematischen Literatur, und alle Mathematiker sind Seiner Majestät dem Könige von Schweden zu dem wärmsten Danke verpflichtet, dass Er den Herrn Professor Holmboe zu Christiania, durch welchen, was gewiss hier besonders bemerkt und hervorgehoben zu werden verdient, Abel zuerst auf die Laufbahn, die er nachher mit so grossem Ruhme verfolgt hat, geführt worden ist, in den Stand gesetzt hat, die Arbeiten eines der ersten Mathematiker der neuern Zeit zu sammeln, und in einer ihrem trefflichen Inhalte völlig entsprechenden äussern Gestalt der gelehrten Welt vor Augen zu legen, eine Aufgabe, welcher sich Herr Professor Holmboe mit einer Liebe und Sorgfalt entledigt hat, die der grössten und wärmsten Anerkennung werth ist.

Der erste Theil enthält, wie schon der Titel besagt, lauter Abhandlungen, die schon früher, theils in dem Crelle'schen Journal, Theil I — IV, theils in Nr. 138 und 147 der Astronomischen Nachrichten abgedruckt worden sind; alle sind aber hier von dem Herrn Herausgeber in französischer Sprache geliefert worden, wodurch sich derselbe um die grössere und allgemeinere Verbreitung dieser wichtigen Schriften ein wesentliches Verdienst erworben hat. Ausserdem sind in diesem ersten Theile noch Nachrichten über Abels Leben enthalten, die sich zum Theil auch schon in Crelle's Journal, Theil IV. S. 402 finden, und daher hier als bekannt vorausgesetzt werden können. Bemerken wollen wir jedoch, dass Herr Professor Holmboe einen an diesem Orte sich findenden Irrthum jetzt berichtigt. A. a. O. wird nämlich der 25. August 1802 als Abels Geburtstag angegeben, welches aber nach des Herrn Professor Holmboe Angabe dahin zu berichtigen ist, dass Abel vielmehr am 5. August 1802 zu Findöe in der Diöcese Christiansand, wo sein Vater Sören Georg Abel Prediger war, das Licht der Welt erblickt hat.

Der zweite Theil enthält, mit Ausnahme einiger wenigen, die früher in dem Magazin for Naturvidenskaberne für 1823 und 1825, in Det kongelige norske Videnskabersselskabs Skritter. Trondhjem. 1827., und in dem 5ten und 6sten Theile des Crelleschen Journals erschienen sind, bis jetzt noch ungedruckte Abhandlungen, weshalb wir dessen Inhalt hier vollständig angeben wollen:

I. Sur les maximums et minimums des intégrales aux différences.



Digitized by Google

II. Sur les conditions nécessaires pour que l'intégrale finie d'une fonction de plusieurs variables et de leur différences soit intégrable etc.

III. De la fonction $\Sigma(\frac{1}{x})$.

IV. Les fonctions transcendantes $\Sigma(\frac{1}{a^2})$, $\Sigma(\frac{1}{a^3})$, ... $\Sigma(\frac{1}{a^n})$ exprimées par des intégrales définies.

V. Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{c-1}\,(l\frac{1}{x})^{a-1}\,.\,dx$.

VI. Sommation de la série $y=\varphi(o)+\varphi(1)\,.\,x+\varphi(2)\,.\,x^2+\ldots+\varphi(n)\,.\,x^n$, $n$ étant un nombre entier positif fini ou infini et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationelle de $n$.

VII. L'intégrale finie $\Sigma^n\,\varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple.

VIII. Proprietés remarquables de la fonction $y=\varphi(x)$ déterminée par l'équation $fy\,.\,dy-dx\,\sqrt{\{(a-y)\,(a_1-y)\,(a_2-y)\ldots(a_n-y)\}}=0$, $fy$ étant une fonction quelconque de $y$ qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque $y=a,\,a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_n$.

IX. Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.

X. Extension de la théorie précédente.

XI. Sur la comparaison des fonctions transcendantes.

XII. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.

XIII. Sur quelques intégrales définies.

XIV. Théorie des transcendantes elliptiques.

*Chapitre I.* Réduction de l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4)}}$ par des fonctions algébriques.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$.

*Chapitre II.* Réduction de l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions logarithmiques.

Problème I. Exprimer l'intégrale $\int\frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Problème II. Trouver les conditions nécessaires pour que $\int\frac{x^m+k^{(m-1)}\,x^{m-1}+\ldots+k'x+k}{x^m+l^{(m-1)}\,x^{m-1}+\ldots+l'x+l}\,\frac{dx}{\sqrt{R}}=\mathrm{A}\,.\,\log(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}})$.

Problème III. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction $\mathrm{A}\,.\,\log(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}})$.

Problème IV. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int(\frac{x+k}{x+l})\,.\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par la fonction logarithmique $\mathrm{A}\,.\,\log(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}})$.

Digitized by Google

*Chapitre III.* Sur une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} \text{ et } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Réductions des transcendantes elliptiques de troisième espèce par rapport au paramètre. Méthode de trouver une infinité de formules de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce.

XV. Sur la résolution algébrique des équations.

§. 1. Détermination de la forme générale d'une expression algébrique.

§. 2. Détermination de l'équation la moins élevée à laquelle peut satisfaire une expression algébrique donnée.

§. 3. Sur la forme de l'expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible d'un dégré donné.

XVI. Démonstration de quelques formules elliptiques.

XVII. Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes.

XVIII. Résolution de quelques problèmes à l'aide d'intègrales définies.

1. La valeur de l'expression $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$.

2. Les nombres de Bernoulli exprimés par des intégrales définies, d'ou l'on a ensuite déduit l'expression de l'intégrale finie $\Sigma\varphi(x)$.

XIX. Sur l'équation différentielle $dy=(p+q\,y+r\,y^2)dx$ où $p$, $q$ et $r$ sont des fonctions de $x$ seul.

XX. Sur l'équation différentielle $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)\,dx = 0$.

XXI. Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable.

XXII. Note sur la fonction

$$\psi x = x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\ldots+\frac{x^n}{n^n}.$$

XXIII. Extraits de quelque lettres de l'auteur à Mr. Crelle.

XXIV. Lettre de l'auteur à Mr. Legendre.

XXV. Extraits de quelques lettres de l'auteur à l'éditeur. Notes et développemens de l'éditeur.

Für jetzt möge diese Inhaltsanzeige des vorliegenden wichtigen Werks genügen. Jedoch können wir nicht umhin, die folgende Stelle aus einem unter dem 16. Januar 1826 von Berlin aus an den Professor Holmboe geschriebenen Briefe Abels hier auszuheben, weil dieselbe als ein gewiss sehr wahres und im höchsten Grade zu beherzigendes Urtheil aus dem Munde eines der ersten Mathematiker der neuern Zeit über einen der wichtigsten Theile der Analysis die grösste Beachtung verdient, und es sehr Noth thut, denselben immer besser und schärfer zu begründen, obgleich von mehreren neuern Mathematikern allerdings schon manches Treffliche in dieser Beziehung geleistet worden ist.

Ueber die Lehre von den unendlichen Reihen lässt sich nämlich Abel auf folgende Art aus:



Digitized by Google

Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{ etc.}$$

où $n$ est un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire, la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant. Je ne crois que tu pourras me proposer qu'un très petit nombre de problèmes ou de théorèmes contenant des séries infinies, à la démonstration desquels je ne pourrais faire des objections bien fondées. Fais cela, et je te répondrai. Pas même la formule binôme n'est encore rigoureusement démontrée. J'ai trouvé qu'on a

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \ldots$$

pour toutes valeurs de $m$, lorsque $x$ est moindre que l'unité. Lorsque $x$ est égal à $+1$, la même formule a lieu, mais seulement si $m$ est plus grand que $-1$, et lorsque $x$ est égal à $-1$, la formule n'a lieu que pour des valeurs positives de $m$. Pour toutes les autres valeurs de $x$ et de $m$ la série $1 + mx +$ etc. est divergente. Le théorème de Taylor, base de tout le calcul infinitésimal, n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule démonstration rigoureuse, et celle ci est de Mr. Cauchy dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, où il a démontré qu'on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha \cdot \varphi' x + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \varphi'' x + \ldots$$

tant que la série est convergente; mais on l'emploie à l'ordinaire sans façon dans tous les cas.

La théorie des séries infinies en général est jusqu'a présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? je crois que non. Où est il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste; par exemple

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x - \text{ etc.};$$

en différentiant on obtient

$$\tfrac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{ etc.}$$

résultat tout faux, car cette série est divergente.

La même chose a lieu par rapport à la multiplication et à la division des séries infinies. J'ai commencé à examiner les règles

Digitized by Google

les plus importantes qui (à présent) sont ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en quels cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et m'intéresse infiniment.

Die Mittheilung dieses bemerkenswerthen Urtheils Abels über den Zustand des grössten Theils der Theorie der Reihen geschieht hier aus einem doppelten Grunde: eines Theils, weil es dem Herausgeber dieses Archivs wie aus der Seele geschrieben ist, und derselbe ganz ähnliche Ansichten schon in mehreren seiner Schriften, wie z. B. in der Vorrede zu den Elementen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. geäussert hat; andern Theils, weil nichts mehr als diese Worte Abels geeignet ist, die Ansichten deutlich zu bezeichnen, welche den Herausgeber bei den die Lehre von den Reihen betreffenden Artikeln dieses Archivs in der Folge beständig leiten werden.

Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik von J. A. Grunert. Zweiter Theil. Brandenburg. 1840. 4. 3 Thlr.

Dieser 2te Theil enthält die folgenden Abhandlungen:

Ueber eine Aufgabe aus der Lehre von den Kegelschnitten.

Ueber die Bestimmung der Brechungsverhältnisse.

Analytische Untersuchungen über die continuirlichen Brüche. (Erste Abtheilung).

Völlig elementarer und strenger Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte und des Gesetzes des Hebels.

Bestimmung der Polhöhe, der Zeit und des Azimuths ohne Uhr bloss mittelst eines Azimuthal-Theodoliten.

Ueber die höhern Differentiale der Kreisfunctionen.

Nachtrag zu der Abhandlung über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte, und über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne. (Thl. I. S. 169).

Elementare Entwickelung der Theorie des einfachen Pendels.

Ueber das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ueber das Problem von Douwes.

Bestimmung der Polhöhe durch das Passagen-Instrument.

Ueber die Lehre vom Einschalten.

Jahres-Bericht der Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Vom 3. März 1839 bis zum 3. März 1840. 4.

Enthält als wissenschaftlichen Theil die beiden folgenden lesenswerthen Aufsätze:

Aufgabe. Ein gegebenes hohles Ellipsoid ist zum Theil mit einer gegebenen Masse Wasser gefüllt. Es soll die Gleichung der Curve gefunden werden, in welcher die Horizontalebene der Oberfläche des Wassers das Ellipsoid bei jeder beliebigen Lage desselben schneidet. Der Verfasser hat sich nicht genannt.

Aufgabe. Es wird eine Reihe von $n+1$ Zahlen gesucht, von der Eigenschaft, dass, wenn sämmtliche Glieder der Reihe, jedes Glied für sich, quadrirt werden, jede beliebige Summe der quadrirten Glieder vom ersten Gliede, inclusive desselben angerechnet, wieder eine rationale Quadratzahl werde. Von Herrn Hauptmann Wertheim.

Mémoires (nouveaux) de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. Tome XII, un

Digitized by Google

fort volume in 4° avec gravures et lithographies noires et coloriées. 4 Thlr.

Dieser neueste Band enthält die folgenden mathematischen und physikalischen Abhandlungen:

Pagani: Mémoire sur quelques transformations générales.

Quetelet: Sur la longitude de l'Observatoire à Bruxelles.

— Sur l'état du magnétisme terrestre.

— Catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes.

— Résumé des observations météorologiques et des observations sur les températures de la terre, faites en 1838, à l'observatoire de Bruxelles.

Crahay: Résumé des observations météorologiques faites à Louvain en 1838.

Minkelers: Observations météorologiques.

Martens: Mémoire sur la pile galvanique.

Vermischte Schriften von Friedrich Theodor Schubert. Neue Folge. Erster, Zweiter und Dritter Band. Leipzig. 1840. 8.

Die Art und Weise, wie diese Schriften eines verstorbenen berühmten Mathematikers und Astronomen verfasset sind, kann aus den früher erschienenen vier Theilen derselben als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden. Auch die jetzt erschienenen neuen drei Theile enthalten in klarer und fliessender Sprache geschriebene populäre Aufsätze über Gegenstände der Astronomie und Physik, wie z. B. über die Kometen; über das Planetensystem; über die Fixsterne; über die Milchstrasse; über die Nebelflecke, veränderlichen Sterne, neue Sterne und die Doppelsterne; über den Kalender; über den Schall, über die Blitzableiter und über den Schlaf. Dem ersten Theile ist das Bildniss des Verfassers beigegeben.

Gebildete Leser werden gewiss auch aus diesen wie aus den früher erschienenen Theilen mannigfaltige Belehrung und Unterhaltung schöpfen können.

Für Mathematiker, namentlich für Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten, dürfte insbesondere der im dritten Theile befindliche, vorher absichtlich noch nicht namhaft gemachte Aufsatz „Ueber den „Nutzen der Mathematik," der uns manche gute und pädagogisch wichtige Bemerkungen zu enthalten scheint, von Interesse seyn. Zur Ergötzlichkeit unserer Leser führen wir aus diesem Aufsatze an, wie sich der berühmte Joseph Scaliger, voll Neid und Ingrimm gegen den als Mathematiker besonders durch seinen Commentar zu den Elementen des Euclides berühmten und verdienten Jesuiten Clavius, dem die Verbesserung des Kalenders aufgetragen war, nach welcher Scaligern selbst gelüstet hatte, über diesen und in seinem ungezügelten Zorn über die Mathematiker überhaupt auslässt. Seine eignen Worte lauten folgendermassen: „Putabam Clavium esse aliquid: il est confit en mathématiques, sed nihil aliud scit. Teuto est, bene bibit. Asinus qui praeter Euclidem nihil scit. C'est un gros ventre d'Allemand. Est Germanus, un esprit lourd et patient; et tales esse debent mathematici; praeclarum ingenium non potest esse magnus mathematicus." Schubert fügt ganz richtig hinzu: „Solche Angriffe verdienen keine Widerlegung, sie beschimpfen nur den, der sie macht."

Digitized by Google

# II.

# Literarischer Bericht.

## Geschichte der Mathematik.

In den Hallischen Jahrbüchern für deutsche Wissenschaft und Kunst 1841. Nr. 67. findet man sehr lesenswerthe Erinnerungen an B. F. Thibaut von A. Tellkampf.

In den Blättern aus der Gegenwart für nützliche Unterhaltung und wissenschaftliche Belehrung von Diezmann. 1841. Nr. 12. S. 113. findet man interessante Züge aus Arago's Leben, besonders über seine Erlebnisse auf Majorca im Jahre 1808 bei Gelegenheit seiner Gradmessung.

Nella solenne inaugurazione della statua di Galileo, rime degli arcadi della colonia alfea, offerte in omaggio agli scienziati italiani nel lor primo congresso in Pisa nell' ottobre 1839. Pisa. 8.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

D. F. Hecht: Lehrbuch der Arithm. und Geom. Zum Gebrauche bei dem Unterr. an den Bergschulen. Erster Cursus. Gemeine Arithm. 2te Auflage. Freiberg. 1841. 8. 8 ggr.

Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt, von J. A. Grunert. Leipzig. 1841. Erster Theil. Erste Abth. Elemente der theoretischen und praktischen Arithmetik. Zweite Abth. Politische Arithmetik. gr. 8. 3 Thlr. 1 ggr.



Digitized by Google

Der zweite Theil wird in zwei Abtheilungen die Geometrie mit Einschluss der Stereometrie, die ebene Trigonometrie und die Geodäsie, der dritte ebenfalls in zwei Atheilungen die Physik, insbesondere auch die Meteorologie enthalten.

Leçons de mathématiques. Par l'Abbé Bordès. Paris. 8.

Cours de mathématiques pures. Par N. Didiez. Paris. 4. 10 Fr.

Leçons élémentaires de mathématiques, comprenant arithmétique, algèbre, géométrie, trigonometrie, statique. Par Poirrier. 2 Vol. 8.

Eléments de mathématiques et de cosmographie. Par Coince. 8. 4 Fr.

Cours d'arithmétique, de géometrie et de trigonometrie, à l'usage des sous-officiers du corps royal de l'artillerie. 12. Paris. 4 Fr.

Cours de mathématiques, à l'usage de l'ingenieur civil. Par Adhémar (Application de géométrie descriptive. Ombres). 8. 15 Fr.

Corso di Matematica. Di Picardi. Napoli. 1839. 8.

Dizionario delle scienze matematiche pure ed applicate, compilato da una società di antichi allievi della scuola politecnica di Parigi, sotto la direzione di A. S. de Montferrier. Prima versione italiana con numerose aggiunte e correzioni del dottor Giuseppe Gasbarri e di Giuseppe François. Firenze. 1840. 8.

## Arithmetik.

A. Kummer: Die Zahlenrechnung in Beispielen und Aufgaben. Für Bürger- und Volksschulen bearbeitet. 2te Aufl. Dresden. 1840. 8. 16 ggr.

Eine recht sehr zu empfehlende, äusserst reichhaltige Sammlung arithmetischer Aufgaben bis zu den Proportionsrechnungen, die sich fast immer auf eine sehr zweckmässige Weise an naturwissenschaftliche, historische, geographische, statistische, technische und andere ähnliche Gegenstände anschliessen, weshalb wir auf diese gewiss recht sehr beachtungswerthe Sammlung alle Bürger- und Volksschulen, so wie auch die Gymnasien zum Gebrauch in den untern Klassen besonders aufmerksam machen. Die Resultate sind, was auch zweckmässig ist, von den Aufgaben abgesondert und können in ein besonderes Heft gebunden werden.

Anweisung zur Berechnung einer Zahl, in Zeit von einer Stunde bis auf 20 Ziffern, als Quadrat oder als Quadratwurzel, als Cubus oder als Cubikwurzel, sowohl in Decimal- als Duodecimalzahlen, nebst anderweitigen Vergleichungen und Beispielen. Von Dr. J. H. Suhr. Bremen. 1840. 4. 10 ggr.

Digitized by Google

Man stosse sich nicht an den etwas prunkenden Titel. Die kleine Schrift verdient wohl gelesen zu werden.

Questions in Arithmetic, comprising Examples in all the Rules of that Science, with an Appendix, containing Problems in those branches of Mechanics and Hydrostatics which are required for the ordinary B. A. Degree. By James Harris. Cambridge. 1840. 12. 3 s. 6 d.

Hotson's Principles of Arithmetic, containing a variety of examples for Practice. Second edition. 12. 4 s. Camb. 1840.

Hind's Principles and Practice of Arithmetic, comprising the Nature and Use of Logarithmsetc. Third edition. 12. 4s. 6 d. Camb. 1840.

White's practical System of mental Arithmetic; or a New Method of making calculations by the Action of a Thought. 3d Edit. 12. 3 s. 6 d. bound.

A Manual of Logarithms and Practical Mathematics by James Trotter. Edinburgh. 1840. 12. 4 s. 6 d. half-bound.

Trattato elementare di Aritmetica. Edizione seconda messa in un nuovo ordine ad uso degli allievi de' fratelli delle scuole cristiane. Torino. 1840. 12.

M. Rühlmann: Logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln. Zunächst für Schüler gewerblicher Bildungsanstalten, so wie für praktische Rechner überhaupt. 2te Stereotyp-Ausgabe. Dresden u. Leipzig. 1840. 12. 12 ggr.

Alle Logarithmen auf 6 Decimalen; die Logarithmen der Zahlen bis 10080; die Logarithmen der trigonometrischen Linien für die Winkel von Minute zu Minute; überall mit Beifügung der Differenzen. Natürliche trigon. Linien von 10 zu 10 Minuten. Länge der Kreisbogen. Tafeln für das Höhenmessen mit dem Barometer von Gauss. Specifische Gewichte. Trigonometrische Formeln. — Guter Druck und wohlfeiler Preis empfehlen dieses kleine Buch zu dem beabsichtigten Zwecke.

Tables of the Logarithms of numbers, and of Sines, Tangents and Secants, to six Places of Decimals. By Edward Riddle. 8. 2 s. 6 d. cloth.

Mémoire relatif à la théorie des nombres. Loi réciproque. Par Brennecke. Paris. 4.

Whewell's doctrine of Limits, with its applications, namely, the first three sections of Newton, conic sections, the differential calculus. Camb. 1841. 9 s.

J. A. Arndt: Beispiele und Aufgaben aus allen Theilen der Arithmetik und Algebra. Leipzig. 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Ein für Lehrer der Mathematik an Gymnasien etc. recht sehr zu empfehlendes Buch.



Digitized by Google

E. Heis: Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 2te Aufl. Köln. 1840. 8. 1 Thlr.

Diese Sammlung erstreckt sich ungefähr über denselben Kreis wie Meier Hirsch.

A. Hartrodt: Lehrbuch der in den Gymnasial-Unterricht gehörenden allgemeinen Arithmetik. Leipzig. 1840. 8. 21 ggr.

Die den einzelnen Abschnitten beigefügten Uebungsbeispiele und auch die ganze Behandlung empfehlen dieses Buch. Ueber die Convergenz der Reihen kommt indess nichts nur einigermassen Genügendes vor, und Bemerkungen, wie z. B. die auf S. 209: „Um „einige der obigen Binomialformen zur annähernden Berechnung „irgend eines bestimmten Zahlenwerthes zu gebrauchen, müssen die „Reihen convergent sein, d. h. die nachfolgenden Glieder „immer kleiner und kleiner werden." wären lieber ganz zu unterdrücken gewesen, da z. B. die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, deren Glieder auch immer kleiner und kleiner werden, bekanntlich keine convergirende, sondern vielmehr eine divergirende Reihe ist.

P. J. E. Finck (Prof. zu Strassburg): System der niedern und höhern Algebra für höhere polytechnische Lehranstalten. Leipzig. 1841. 8. 2 Thlr.

Ein sehr gutes Buch, das manche auf eigenthümliche Weise dargestellte Lehren enthält. Ob dasselbe eine Uebersetzung aus dem Französischen ist, ist nicht gesagt; es scheint aber so, insbesondere wenn man einige Noten, namentlich die auf S. 245 vorkommende am Ende, berücksichtigt. Jedenfalls war das Buch einer Uebersetzung werth. Eine Sammlung zweckmässiger Uebungsaufgaben ist auch beigegeben, auf S. 465—474.

Mayer et Choquet: Traité élémentaire d'algèbre. 3me éd. Paris. 1840. 8. 7 Fr. 50 c.

Wood's Elements of Algebra Eleventh edition, with Notes, additional Propositions and Examples by Lund. Camb. 1841. 8. 12 s. 6 d.

Hind's Introduction to the Elements of Algebra, being a Sequel to the Principles and Practice of Arithmetic. Camb. 1840. 12. 5 s.

The Elements of Algebra, designed for the use of Schools. By J. H. Colenso. 2d Ed. London. 1840. 12. 7 s. cloth.

Elements of Algebra. By Robert Wallace. New edition. London. 1840. 8. 2 s. 6 d. cloth.

Hall's (Rev. J. G.) Elements of Algebra, for Schools and Colleges. Lond. 1840. 8. 6 s. 6 d.

Elements of Algebra, to the end of simple equations, for the use of Harrow school. 1840. 12. 3 s. 6 d.

Digitized by Google

Wright's Supplement to Elementary Algebra. 1840. 12. sewed. 2 s. 6 d.

A. van Bemmelen: Lessen over de Algebra of Stelkunst, ten gebruike der Latijnsche Scholen en Gymnasien. Amsterdam. 1840. 8.

Paalzow: Die Gleichungen des dritten Grades mit einer Unbekannten, methodisch abgehandelt. Prenzlau. 1841. 4. (Programm des Gymnasiums zu Prenzlau von Ostern 1841 von dem Director des Gymnasiums, Herrn Paalzow).

M. A. Stern: Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen. Eine von der K. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift. (Besonders abgedr. aus Crelle's Journal für die Mathem. Bd. XXII.) Berlin. 1841. 4. 16 ggr.

Schon der Umstand, dass dieser Schrift von der K. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften der Preis zuerkannt worden ist, spricht hinreichend für die Wichtigkeit der darin enthaltenen Untersuchungen.

Hymers's Treatise on the Theory of algebraical Equations. Second edition. Camb. 1840. 8. 9 s. 6 d.

Sulle equazioni di terzo e quarto grado, memoria di Vittorio de la Casa. Ad uso dei geometri principianti. Padova. 1840. 4.

Nuove ricerche sulla risoluzione generale delle equazioni algebriche del p. Girolamo Badano carmelitano scalzo professore di matematica nella regia università di Genova. Genova. 1840. 4.

Sui Problemi di Analisi indeterminata; osservazioni analitiche dell' abate G. A. Longoni. Monza. 1840. 4.

Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementen-Reihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung von L. Oettinger. Freiburg. 1840. 16 ggr.

Für die weitere Ausbildung der combinatorischen Analysis und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig.

Dobson's Illustration of the Binomial Theorem. Cambridge. 1840. 4. 1 s. 6 d.

Die Hauptsätze der Differenzialrechnung nach einer neuen, elementaren Methode dargestellt von J. W. Scheibert. Berlin. 1840. 8. 16 ggr.

Da der Vf. die grossen Fortschritte, welche in neuester Zeit vorzüglich durch Cauchy und Andere in Bezug auf die schärfere Begründung der Differenzialrechnung gemacht worden sind, ganz ignorirt, insbesondere auf die Bedingungen der Convergenz und Divergenz der

Digitized by Google

Reihen auch nicht die mindeste Rücksicht nimmt, so kann dieses Buch auf einen wissenschaftlichen Werth keinen Anspruch machen. Auch wissen wir nicht, worin die neue elementare Methode, von der auf dem Titel die Rede ist, bestehen soll, da von der Entwickelung einer Function in eine Reihe nach der so ungenauen und einer Unzahl von Zweifeln unterliegenden Methode der unbestimmten Coefficienten ausgegangen wird, und die in §. 1. gegebene Erklärung des Differentials im Wesentlichen ganz mit dem Lagrange'schen Begriffe oder vielmehr dem, welchen Lacroix in seinem bekannten grösseren Werke gebraucht, zusammenfällt.

Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy. Par M. l'Abbé Moigno. Tome 1. Calcul différentiel. Paris 1840. 8. 2 Thlr. 20 ggr.

Wir halten dieses Werk, dessen Zweck durch seinen Titel hinreichend bezeichnet wird, für eine sehr wichtige und sehr zu beachtende Erscheinung auf dem Gebiete der Literatur der höhern Analysis, weil man die neuen wichtigen Untersuchungen Cauchy's, vorzüglich über die schärfere Begründung der höheren Analysis und ihrer Anwendung auf die Geometrie im Allgemeinen, über die Convergenz und Divergenz der Reihen, über den Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, über die Convergenz der Lagrange'schen Reihe etc. nirgends so vollständig und gehörig systematisch geordnet beisammen findet, als in diesem Werke, und empfehlen dasselbe daher einem Jeden aus vollster Ueberzeugung, wer sich über diese neuen wichtigen Fortschritte der Wissenschaft möglichst vollständig zu belehren wünscht. Freilich aber erfordert das Studium, wenn man noch nicht an diese Betrachtungsweisen gewöhnt ist, sondern sich früher immer an Lagrange und Lacroix gehalten hat, Zeit, Ausdauer, Anstrengung und Mühe, und mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie z. B. in der vorigen Schrift, kommt man freilich kürzer weg. Wie unberechenbar gross aber der Vortheil und der Nutzen ist, welchen das sorgfältige Studium eines Werkes, wie z. B. das des Herrn Moigno, gewährt, und wie gross die Klarheit ist, zu welcher man bei gehöriger Ausdauer endlich gelangt, wird ein Jeder an sich selbst bestätigt finden, wenn er nur mit Muth und Kraft an's Werk geht und nicht ermüdet.

Principes de l'Analyse infinitésimale. Par Finck. 1 Fr. 50 c.

Cournot: Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. 2 Vols. Paris. 1840. 8. 16 Fr.

Lezioni di Introduzione al calcolo sublime di Gaspare Mainardi. Part. I. II. Pavia. 1839.

C. Jürgensen: Differential og Integral-Regning. Copenhagen. 1840. 8.

Mémoire sur les intégrales définies Euleriennes, et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'a l'évaluation des fonctions de grands nombres. Par Binet. Paris. 4.

---

Digitized by Google

## Geometrie.

F. W. Looff: Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. 2r Cursus. Stereometrie und (ebene u. sphärische) Trigonometrie. Berlin. 1840. 8. 8 ggr.

A. Huberdt: Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst vielen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militairschulen. Berlin. 1841. 8. 1 Thlr.

Besonders durch die recht zweckmässigen Aufgaben empfehlungswerth.

Lehrbuch der Geometrie von K. Snell. Leipzig. 1841. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Wir können den Geist, in welchem dieses Werkchen geschrieben ist, in der Kürze nicht besser charakterisiren, als wenn wir es der bekannten Weise, in welcher B. F. Thibaut die Elemente der Mathematik darzustellen pflegte, an die Seite stellen. Dass der Vf. diese Methode für die einzig wahre und richtige hält, wollen wir ihm nicht verargen, obgleich unsere subjective Ueberzeugung eine völlig verschiedene ist, und empfehlen auch das Buch allen denen, welchen der Weg des Euclides nicht zusagt, recht sehr, da es in seiner Art gut geschrieben ist. Gewundert haben wir uns übrigens ungemein, dass auf einer sächsischen gelehrten Schule (der Verf. ist Lehrer der Mathematik an der Kreuzschule zu Dresden), auf denen ja immer das Studium der Alten mit Recht für die Grundlage jeder streng wissenschaftlichen Bildung gegolten hat, und auch die Wissenschaften in deren strengem und sicheren Geiste behandelt und vorgetragen worden sind, die Geometrie in einer von demselben so sehr abweichenden Weise gelehrt wird. Wir müssen offen bekennen, dass wir dies auf einer gelehrten Schule (auf einer Real-, Gewerb- oder höheren Bürgerschule würde sich die Sache anders gestalten) nach unserer Ueberzeugung für keinen Fortschritt des mathematischen Unterrichts halten, lassen indess gern dem Vf. seine Ueberzeugung. Eben so sehr aber, wie wir dies zu thun geneigt sind, hätten wir gewünscht, dass der Vf. in der Vorrede sich etwas milder über die Anhänger der euclidischen Methode ausgesprochen hätte, indem er ja nur hätte bedenken sollen, dass z. B. in England letztere Methode in ihrer strengsten Form ganz allgemein und ohne alle Ausnahme für die allein richtige und wahre gehalten wird und auch in Deutschland sehr gewichtige Namen unter ihre Anhänger zählt. Ein Mittelweg scheint uns jedoch auch hier der beste zu sein und hat sich uns durch langjährige und auf sehr verschiedenartigen Lehranstalten gemachte Erfahrungen für die Belebung des mathematischen Unterrichts und für die — was wir hier ausdrücklich bemerken — allgemeine Anregung aller nur einigermassen befähigten Schüler zu mathematischen Beschäftigungen am zweckmässigsten erwiesen, womit auch sehr viele andere erfahrene Lehrer übereinstimmen. Der von dem Vf. in der Vorrede angeregte Erfolg, den Thibaut durch seine Vorlesungen bewirkte (wir gehörten im Jahre 1817 selbst zu seinen Schülern), war allerdings in gewisser Rücksicht ein

Digitized by Google

sehr grosser. Derselbe bestand aber, wie wir glauben, vorzüglich in der Erweckung des Interesses und der Liebe für die elementaren Lehren der Mathematik (wir sprechen hier bloss von einem elementaren Gegenstande, und fassen daher auch nur die dahin einschlagenden Vorlesungen Thibaut's in's Auge) bei schon in den Jahren ziemlich vorgerückten jungen Männern, vorzüglich Theologen, Juristen u. s. w., die grösstentheils ohne alle strenge mathematische Vorbildung auf die Universität kamen, durch eine allerdings höchst ansprechende und in jeder Beziehung wahrhaft kunstreiche Darstellung. Auf einer gelehrten Schule aber, wo die Geistesgymnastik, wenn wir so sagen dürfen, der einzige Zweck ist, welchen der mathematische Unterricht zu erreichen suchen und immer vor Augen haben muss, möchte nach unserer unmaassgeblichen Meinung die Sache doch eine etwas andere Gestalt annehmen.

Cahiers de géométrie élementaire, pour servir de complément au Traité de Legendre. Par Jules Planche. Paris. 8.

Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits. Par Finck. 2e édit. in 8. 5 Fr.

Geometria ad uso delle scuole della R. Militare Accademia di Sebastiano Vassalli. Edizione seconda. Torino. 1840. 8.

Euclid's Elements, Books I. to VI., XI., XII. by Simson. New edition by Maynard. 18. bound 6 s.; 8. bound 6 s. 6 d. London 1839 et 1841.

The same, in the symbolical form, by Blakelock. 18. bound 6 s. 6 d. Lond. 1840.

The Elements of Euclid, viz the First Six Books, together with the Eleventh and Twelfth. By William Rutherford. London. 1840. 6 s. bound.

F. Märker: Theorie der Parallellinien. Meiningen. 1839. 8. 3 ggr.

Diese Herrn Prof. Kries in Gotha zur Feier seines funfzigjährigen Dienstjubiläums gewidmete Schrift wird hier angezeigt, weil sie jetzt erst in den Buchhandel gekommen zu sein scheint. Uebrigens bemerken wir, dass eine Beurtheilung von Theorieen der Parallellinien in diesem literarischen Berichte in der Regel nicht gegeben werden wird, weil dazu eine dessen Zweck nicht entsprechende zu sehr in's Detail gehende Kritik erforderlich sein würde.

Essai sur la théorie des parallèles. Par Hauy. Paris. 8.

Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie von C. T. Anger. Zweites Heft. (Anwendungen der Theorie der Aehnlichkeitspunkte auf die merkwürdigen Punkte im Dreiecke und die Apollonischen Berührungs-Aufgaben. Fortsetzung der allgemeinen Betrachtungen). Danzig. 1841. 4. 12 ggr.

Wir freuen uns, schon jetzt die Fortsetzung dieser sehr verdienstlichen Beiträge zur neueren Geometrie anzeigen zu können.

Digitized by Google

Quadrature du cercle et autres découvertes, par R. le Geay.

Solution géometrique et rigoureuse du problème de la quadrature du cercle, résolue au moyen de la géométrie élémentaire. Paris. 8.

Saggio di ricerche sulla Poligonometria analitica, di Pietro Callegari. Imola. 1839. 8.

Hymers's Treatise on conic sections and the application of Algebra to Geometry. Second edition. Camb. 1840. 8. 7 s. 6 d.

Quadratura dell' Iperbola e rettificazione della Parabola, ottenute con mezzi elementari e con formole finite, memoria letta all' ateneo di Venezia dal dottore Pietro Magrini. Venezia. 1840. 8.

Proprietà principali di alcune curve trascendenti, esposte da Teofrasto Cerchi. Milano. 1840.

Curve a quattro centri, ossia ovali, costruite per archi di cerchio; memoria dell dott. Lorenzo Tabacchi. Padova. 1841. 8.

Traité de la coupe des pierres. Par Adhémar. 2e édit. Paris. 8.

Traité des ombres. Par Adhémar. Paris. 8. 20 Fr.

H. Simonis: Application de la géométrie descriptive ou traité des ombres. Gand. 1840. 4.

H. Strootman: Beginselen der beschrijvende Meetkunst, bevattende de leerwijze der projectien, de oplossing van werkstukken betrekkelijk de regte lijn, het platte vlak en den bol, benevens eene korte verhandeling over de perspectief en de schaduwen. Te Breda. 1840. 8.

L. S. Kellner: Den beskrivende (descriptive) Geometries anvendte Deel, 3die Hefte. Copenhagen. 1840. 8.

---

## Praktische Geometrie.

---

Leçons primaires d'agrométrie ou d'arpentage. Par G. Gilliet Damitte. 2e édit.

Cours de topographie et de géodésie du corps royal d'état-major. Par Salneuve. 8. 8 Fr. 50 c.

Journal spécial des géomètres-arpenteurs, redigé par Boissière. 12. Prix annuel 12 Fr.

Digitized by Google

Barême-pantomètre, ou Système métrique appliqué à toutes surfaces et à tous solides, depuis un centimètre jusqu'à 10 mètres. Par Fautras. Vendôme. 8.

Géométrie en action, ou Eléments de géometrie appliquée aux arts. Par Barré. 12. Angers.

Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz. Nach Befehl der Hohen Tagsatzung aus den Protocollen der eidgenössischen Triangulirung bearbeitet und herausgegeben von J. Eschmann, Oberlieutenant im eidgenössischen Oberstquartiermeisterstab. Zürich 1840. 4. 4 Thlr.

Dieses für die Geographie der Schweiz wichtige Werk enthält die Resultate der trigonometrischen Messungen, welche in den letzten dreissig Jahren in der Schweiz angestellt worden sind. Zuerst wird eine geschichtliche Uebersicht der sämmtlichen in dem genannten Zeitraume in der Schweiz angestellten trigonometrischen Vermessungen gegeben, aus welcher sich ergiebt, dass Tralles, Fehr, Stabshauptmann Pestalozzi, Professor Trechsel, Frey, Lüthardt, Wagner, Oberst Buchwalder, welcher im Jahre 1832 auf dem Sentis nach einem 7tägigen Aufenthalte auf diesem Berge vom Blitze getroffen und sein Gehülfe leider das Opfer dieses Ereignisses wurde, Ingenieur Sulzberger, Lieutenant Bruppacher, Osterwald, Professor Huber, Oberstlieutenant Merz, die Majore v. Saussure und Delarageai, Domherr Berchtold, Hofrath Horner, Mechanicus Oeri, Generalmajor Finsler, die Oberstquartiermeister Wurstemberger und Dufour, so wie endlich ganz vorzüglich Oberlieutenant Eschmann zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenem Grade bei diesem grossen Unternehmen mitgewirkt haben. Dann folgen die Original-Beobachtungen der Dreieckswinkel erster Ordnung, hierauf die Messung der Grundlinie bei Aarberg (im Ganzen nach der von Schumacher bei der Messung der Basis bei Braack im Jahre 1820 angewandten Methode), dann das Verzeichniss der Dreiecke erster Ordnung, dann die geographischen Ortsbestimmungen der Dreieckspunkte erster Ordnung, dann das Verzeichniss der Dreiecke zweiter Ordnung mit Einschluss der Bestimmungen einiger Punkte dritter Ordnung und der gegenseitigen Azimuthe der Punkte zweiter Ordnung, hierauf das Verzeichniss der geographischen Positionen (mit Einschluss der Höhe über dem Meere) sämmtlicher Punkte, und zuletzt die astronomischen Beobachtungen und die Höhenbestimmungen, bei denen sich auch einige beachtenswerthe Bemerkungen über die terrestrische Strahlenbrechung finden. Angehängt ist eine schöne Uebersichtskarte sämmtlicher Messungen. Der Anschluss an die französischen Dreiecke ergab folgende Vergleichung:

Seite Rämel — Faux d'Enson.

| | | |
|---|---|---|
| Französische Dreiecke . | = | 35997,22 Meter |
| Schweizerische Dreiecke | = | 35997,27 - |
| Unterschied | = | 0,05 - |

Der Anschluss an die österreichischen Dreiecke ergab folgende Vergleichungen:

Digitized by Google

Seite Pizzo Forno — Pizzo Menone di Gino.

| | |
|---|---|
| Oesterreichische Dreiecke | = 44572,77 |
| Schweizerische Dreiecke | = 44572,12 |
| Unterschied | = 0,65 |

Seite Pizzo Menone di Gino — Monte Legnone.

| | |
|---|---|
| Oesterreichische Dreiecke | = 21124,67 |
| Schweizerische Dreiecke | = 21124,54 |
| Unterschied | = 0,13 |

Seite Kumenberg — Frastenzersand.

| | |
|---|---|
| Oesterreichische Dreiecke | = 15985,23 |
| Schweizerische Dreiecke | = 15995,81 |
| Unterschied | = 0,58 |

Seite Frastenzersand — Fundelkopf.

| | |
|---|---|
| Oesterreichische Dreiecke | = 11957,95 |
| Schweizerische Dreiecke | = 11959,94 |
| Unterschied | = 1,99 |

Den beiden letzten Angaben ist in den Oesterreichischen Protokollen die Bemerkung beigefügt, dass sich die definitive Ausgleichung der österreichischen Triangulirung noch nicht bis an diesen Theil der Provinz Tyrol ausgedehnt habe.

Aus den obigen schönen Uebereinstimmungen darf allerdings der Schluss gezogen werden, dass das Dreiecksnetz der Schweiz allen geographischen Zwecken vollkommen genügt.

---

## Trigonometrie.

---

A. Huberdt: Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militair-Schulen. Berlin. 1841. 6 ggr.

Die Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der Kegelschnitte für Gymnasien und Oberrealklassen von F. J. Herrmann. Giessen. 1841. 8. 16 ggr.

Hymers's Treatise on Trigonometry plane and spherical, and on Trigonometrical Tables and Logarithms, together with a Selection of Problems and their Solutions. Second edition. Camb. 1841. 8 s. 6 d.

Snowball's Plane and spherical Trigonometry together. Fifth edition. Camb. 1840. 8. 10 s. 6 d.

Hewitt's Problems and Theorems in Plane Trigonometry. Camb. 1840. 6 s.

Trigonometry, and its Application to Astronomy, Dialling, and Trigonometrical Surveying. By Richard Abbatt. New edition. 8. 7 s neatly bound in cl.

Digitized by Google

Elementerna af Plana Trigonometrien, Utgifna af P. N. Ekman, Docens i Mathematiken wid Upsala Uniwersitet. Stockholm. 16 sk.

Grundlinier litt Plana Trigonometrien jemte Ett Försök att förtydliga Interpolations-Methoden af A. O. Gestrin. Stockholm. 8.

## Mechanik.

W. A. Rüst: Die Mechanik in Anwendung auf Künste und Gewerbe. Erste Abtheilung. Mechanik fester Körper. Für Praktiker bearbeitet. Berlin. 1840. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

W. Whewell: Elementar-Lehrbuch der Mechanik. Zum Gebrauch für technische Lehranstalten. Aus dem Engl. übersetzt von C. H. Schnuse. Braunschweig 1841. 1 Thlr. 16 ggr.

Beide vorhergehende Schriften haben gleichen, durch ihre Titel hinreichend bezeichneten Zweck, und erfüllen denselben, jedes in seiner Art, recht gut. Das erste fasst jedoch bloss die Anwendung auf die eigentliche Maschinenlehre in's Auge; das zweite berücksichtigt daneben auch insbesondere die Anwendungen, welche die Lehren der Statik fester Körper in der Baukunst finden. Das erste wird in seiner zweiten Abtheilung auch die Mechanik flüssiger Körper darstellen, und in der dritten die Construction und Zusammensetzung einzelner Maschinen enthalten. Das zweite enthält bloss die Mechanik fester Körper. Die ganz elementare geometrische (und trigonometrische) Darstellung, in welcher ja überdies bekanntlich die Engländer Meister sind, hat uns besonders in dem zweiten Buche sehr angesprochen, und dasselbe verdiente daher eine deutsche Bearbeitung vollkommen, die auch als eine völlig gelungene zu bezeichnen ist.

Eléments de statique pour servir d'introduction à un cours de physique, suivis d'une solution simple des triangles sphériques. Par L. G. 2 Fr. 50 c.

Gaubert, Traité de mécanique à l'usage des élèves des écoles polytechnique et normale. Paris. 1840. 8. 8 Fr.

Roche: Traité de balistique appliquée à l'artillerie navale. 1re partie. Paris. 1840. 8. 5 Fr.

Whewell's Elementary Treatise on Mechanics for the use of students in the University. Sixth edition. Camb. 1841. 8. 7 s. 6 d.

Corso elementare di Meccanica ed Idraulica, del dr. Vincenzo Amici. Vol. I. (Meccanica teorica.) Firenze. 1840. 8.

Ricerche sul moto molecolare de' solidi, di Domenico Paoli. Firenze. 1840. 8.

Digitized by Google

J. P. Delprat: Beginselen der Dynamica, voor kadetten der Artillerie en Genie. Te Breda. 1840. 8.

J. P. Delprat: Beginselen der statica en hydrostatica. Te Breda. 1840. 8.

C. F. Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. Leipzig. 1840. 8. 8 ggr.

Um den Inhalt dieser wichtigen Schrift im Allgemeinen möglichst deutlich zu bezeichnen, wollen wir den ganzen ersten Paragraphen mittheilen:

„Die Natur bietet uns mancherlei Erscheinungen dar, welche wir durch die Annahme von Kräften erklären, die von den kleinsten Theilen der Substanzen auf einander ausgeübt werden, und den Quadraten der gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportional sind.

Vor allem gehört hierher die allgemeine Gravitation. Vermöge derselben übt jedes ponderable Molecül $\mu$ auf ein anderes $\mu'$ eine bewegende Kraft aus, welche, wenn man die Entfernung $= r$ setzt, durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ ausgedrückt wird, und eine Annäherung in der Richtung der verbindenden geraden Linie hervorzubringen strebt.

Wenn man zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen zwei magnetische Flüssigkeiten annimmt, wovon die eine als negativ betrachtet wird, so üben zwei derartige Elemente $\mu$, $\mu'$ gleichfalls eine bewegende Kraft auf einander aus, welche durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ gemessen wird und in der verbindenden geraden Linie wirkt, aber als Abstossung, wenn $\mu$, $\mu'$ gleichartig, als Anziehung, wenn sie ungleichartig sind.

Ganz Aehnliches gilt von der gegenseitigen Wirkung der Theile der elektrischen Flüssigkeiten auf einander.

Das linearische Element $ds$ eines galvanischen Stroms übt auf ein Element des magnetischen Fluidums $\mu$ (wenn wir letzteres zulassen) ebenfalls eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung $r$ umgekehrt proportional ist; aber hier tritt zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch $\mu$ und die Richtung von $ds$ gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen $r$ mit der Richtung von $ds$ macht. Nennt man diesen Winkel $\Theta$, so ist $\frac{\sin\,\Theta\,.\,\mu ds}{rr}$ das Maas der bewegenden Kraft, welche $ds$ auf $\mu$ ausübt, und eben so gross ist die von $\mu$ auf das Stromelement $ds$ oder dessen ponderablen Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Wenn man mit Ampère annimmt, dass zwei Elemente von galvanischen Strömen $ds$, $ds'$ in der sie verbindenden geraden Linie anziehend oder abstossend auf einander wirken, so nöthigen uns die Erscheinungen, diese Kräfte gleichfalls dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional zu setzen, zugleich aber erfordern

Digitized by Google

jene eine etwas verwickelte Abhängigkeit von der Richtung der Stromelemente.

Wir werden uns in dieser Abhandlung auf die drei ersten Fälle oder auf solche Kräfte einschränken, die sich in der Richtung der geraden Linie zwischen dem Elemente, welches wirkt, und demjenigen, auf welches gewirkt wird, äussern, und schlechthin dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind, obwohl mehrere Lehrsätze mit geringer Veränderung auch bei den andern Fällen ihre Anwendung finden, deren ausführliche Entwickelung einer andern Abhandlung vorbehalten bleiben muss."

In den astronomischen Nachrichten Nr. 418 findet sich: Beweis des von Jacobi gefundenen Lehrsatzes, dass ein flüssiges, sich um die eine Axe drehendes Sphäroid von drei verschiedenen Hauptaxen im Gleichgewicht sein könne, von T. Clausen.

## Praktische Mechanik.

Notions de statique et mécanique industrielle. Par Peyré. 8. 5 Fr.

Traité d'Hydraulique, à l'usage des ingénieurs. Par d'Aubuisson de Voisins. 2e éd. 8. 9 Fr.

Cours de dessein linéaire appliqué au dessein des machines. Par C. Armengaud. 4. 6 Fr.

The Mechanics of Engineering. By Whewell. London. 1840. 8. 9 s.

Memoria sulla relazione tra le acque dell' Arno e quelle della Chiana, del conte Vittorio Fossombroni, inserita nella parte matematica del tomo XXII. delle „Memorie della Società italiana delle scienze residente in Modena". Seconda edizione. Firenze. 1840. 8.

Handbok i Praktisk Mekanik af Arthur Morin. Öfwersatt, under iakttagande af alla formlers och tabellers reduktion efter Swenskt mått och wigt-system, och med betydliga tillägg försedt af J. S. Bagge, Prof. wid Bergs-Skolan i Fahlun. Stockholm. 8. 3 Rdr.

## Optik.

Dioptrische Untersuchungen von C. F. Gauss. Göttingen. 1841. 4. 8 ggr.

Digitized by Google

Diese schönen Untersuchungen des berühmten Vfs. haben vorzüglich den Zweck, bei den bekannten eleganten Formeln von Cotes, Euler, Lagrange und Möbius die Dicke des Glases zu berücksichtigen, so wie auch eine genauere Feststellung mehrerer dioptrischen Grundbegriffe.

D. Brewster, A treatise on the microscope. London. 8. 6 s.

Principes de perspective linéaire. Par Bacillon. 4. 5 Fr.

Bouillon, Principes de perspective linéaire, appliqués d'une manière méthodique et progressive au tracé des figures. Paris. 1840. 4. 5 Fr.

In den astronomischen Nachrichten Nr. 415 und Nr. 417 findet man zwei schöne Aufsätze von Bessel und T. Clausen über die Grundformeln der Dioptrik.

## Astronomie.

Von Biots trefflichem Traité élémentaire d'Astronomie physique erscheint jetzt eine dritte Ausgabe.

Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper im Sonnensystem von W. Beer und J. H. Mädler. Weimar. 1841. 4. 1 Thlr. 16 ggr.
Theils neue, theils in Schumachers astronomischen Nachrichten schon veröffentlichte Aufsätze, hier von Neuem abgedruckt.

Hymers's Elements of the Theory of Astronomy. Second edition. Camb. 1840. 8. 14 s.

De correctione elementorum Veneris et Mercurii ex observato transitu per Solem Disquisitio. P. I—IV. Praes. Mag. A. T. Bergius; Respp. J. L. Ringzell, J. W. Lindblad, G. M. Lundquist et J. O. Carlsberg. Upsaliae. 4.

O'Brien's Mathematical Tracts. Part. I., on Laplace's Coefficients, the Figure of the Earth, the Motion of a rigid body about its Centre of Gravity, and Precession and Nutation. Camb. 1840. 8. 4 s. 6 d.

Quetelet, Sur la longitude de l'Observatoire royal de Bruxelles. 4.

Descrizione del circolo meridiano dell' J. R. Osservatorio di Padova, seguita da un catalogo di stelle fisse per l'anno 1840, distribuito in zone rapporto alla declinazione. Parte prima, contenente le stelle dell' equatore fino al 10° di declinazione boreale.

Digitized by Google

Di Giovanni Santini. Padova. 1840. 4. Estratta dal vol. V. de „Nuovi saggi dell' accademia di Padova."

Mesure d'un arc de parallèle moyen entre le pole et l'équateur. Par le colonel Brousseaud. Limoges. 4.

Calcul de navigation à l'usage des officiers de la marine marchande et des capitaines au cabotage. Nantes. 8.

A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy by Edward Riddle. 3d Edition. 8. 12 s. bound.

J. Lamont: Jahrbuch der Königlichen Sternwarte bei München für 1841. Vierter Jahrgang. München. 8. 1 Thlr.

Die Einrichtung dieses Jahrbuchs kann im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Auf die astronomische Ephemeride folgt ein vorzüglich in Bezug auf Baiern sehr vollständiges Verzeichniss geographischer Positionen, in welchem die in Bogen und Zeit angegebenen Längen für Baiern von dem Meridian der Sternwarte bei München, für die übrigen Punkte von dem Pariser Meridian an gerechnet sind. Dann folgen gesetzliche Bestimmungen über das baierische Maass und Gewicht, Zusammenstellung neuerer Maass- und Gewichtseinheiten, Meilenmaasse, gesetzliche Bestimmungen über das Münzwesen in verschiedenen Ländern mit besonderer Rücksicht auf den süddeutschen Zollverein, und fast der ganze übrige Theil des Buchs von S. 91 bis S. 236 ist der Meteorologie gewidmet. Zuerst Beobachtungen der Königlichen Gerichtsärzte in Baiern, wobei zugleich die von dem Vf. auf eigenthümliche Weise construirten Barometer beschrieben werden, welche die Königlich Baierschen Gerichtsärzte zur Anstellung der ihnen aufgetragenen, vierteljährig an die Sternwarte einzusendenden Beobachtungen nach und nach sämmtlich erhalten sollen. Welche grosse Ausdehnung schon jetzt diese Beobachtungen gewonnen haben, geht daraus hervor, dass schon an 271 Punkten, die in dem Jahrbuche namentlich angegeben werden, in den verschiedenen Provinzen des Staates von den Gerichtsärzten Beobachtungen angestellt werden, und dass sich schon an 78 Orten neue oder verificirte Instrumente befinden. Alle diese von dem thätigen Vf. getroffenen Einrichtungen verdienen anderen Staaten, wo von den Kreis-Physikern, oder wie diese Beamten sonst heissen mögen, vorschriftsmässig meteorologische Beobachtungen angestellt werden müssen, zur Nachahmung empfohlen zu werden. Nur wenn diese Beobachtungen überall zu so viel als möglich mit einander übereinstimmenden Zeiten, mit guten vorher gehörig mit einander verglichenen Instrumenten angestellt und der oberen Leitung und Controlle eines mit dem Fache ganz vertrauten Mannes wie in Baiern unterworfen werden, können dieselben der Wissenschaft wahrhaften Nutzen bringen. Ferner giebt der Vf. Nachricht über einen noch besonders von ihm gestifteten meteorologischen Verein, und liefert hierauf einen sehr lesenswerthen, populär gehaltenen Aufsatz über die zweckmässige Anstellung meteorologischer Beobachtungen, welchen wir allen angehenden Beobachtern aus Ueberzeugung empfehlen. Nach Mittheilung der von den Mitgliedern des meteorologischen Vereins bis jetzt an die

Digitized by Google

Sternwarte eingesandten Beobachtungen und der auf der Sternwarte selbst in den Jahren 1825—1836 angestellten Beobachtungen, aus denen sich die Höhe von München (Barometer der Sternwarte) über dem Meere im Mittel 1576 Pariser Fuss ergiebt, wird endlich noch von der Verbindung eines grossen magnetischen Observatoriums mit der Sternwarte Nachricht gegeben, welches durch die Munificenz Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen mit den grössten Mitteln ausgestattet und in der Mitte des vorigen Jahres vollendet worden ist. Die im August vorigen Jahres begonnenen magnetischen Beobachtungen werden täglich von 6 Uhr Morgens bis 6 Uhr Abends jede Stunde nach mittlerer Göttinger Zeit gemacht; die Nacht hindurch wird alle zwei Stunden der Stand der Instrumente aufgezeichnet; jeden Monat trifft ein Termintag, wo 24 Stunden hindurch alle 5 Minuten die Declination und alle 10 Minuten die Horizontal-Intensität bemerkt wird. In so grosser Ausdehnung und Vollständigkeit werden unsers Wissens die magnetischen Beobachtungen noch nirgends angestellt. Möge der so thätige und kenntnissreiche Vf. in seinem Eifer nie erkalten und immer durch die kräftigste bei solchen Unternehmungen so nothwendige Gesundheit unterstützt werden!

J. F. Encke: Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Berlin. Erster Band. Berlin. 1840. 5 Thlr.

Eine höchst erfreuliche und wichtige Erscheinung. Die Einleitung enthält die Beschreibung der neuen Berliner Sternwarte und ihrer wichtigsten Instrumente, namentlich des neuen grossen Meridiankreises von Pistor, nebst trefflichen Abbildungen des Gebäudes nach allen seinen Theilen, insbesondere auch der Kuppel und des Meridiankreises. Hierauf folgen: 1. Beobachtungen mit dem Pistor'schen Meridiankreise. 1838. April 16. — 1839. Aug. 31. — 2. Beobachtungen am Durchgangsfernrohr von Ost nach West. — 3. Meteorologische Beobachtungen. (1836 Januar 1. — 1839. August 31. Thermometer R. Barometer. Wind. Wolken. Dreimal täglich.) — 4. Magnetische Beobachtungen. (1836. Mai 11. — 1839. August 31.) — 5. Beobachtungen mit dem Refractor und den beweglichen Instrumenten (Doppelsterne; Messungen der Planetendurchmesser; Sternbedeckungen, Sonnenfinsternisse, Planetendurchgänge u. s. w.; Beobachtungen des Cometen von Pons oder vielmehr Encke. 1838).

Connaissance des temps pour l'an 1843. Paris. 8. 7 Fr. 50 c.

L'Annuaire du bureau des longitudes pour l'an 1840, augmenté de notices scientifiques par Arago. Paris. 12. 1 Fr.

Atlas des phénomènes célestes, donnant le tracé des mouvements apparents des planètes. Par Dien. Année 1841. Paris. 4. 15 Fr.



Digitized by Google

# Physik.

C. Scherling: Leitfaden bei dem Unterrichte in der Physik, für Real- und höhere Bürgerschulen. 2r Cursus. Lübeck. 1840. 8. 15 ggr.

H. Birnbaum: Die Begründung der ersten Kenntnisse in der Physik oder mechanischen Naturlehre für Schule und Haus des Bürgerstandes. Braunschweig. 1841. 8. 15 ggr.

Ein gutes Buch, dem wir recht vielen Eingang in gebildete (denn andere lässt sein Inhalt nicht zu) Familien wünschen. Jedoch müssen wir ausdrücklich bemerken, dass nur der eigentlich mechanische Theil der Physik in dessen Kreis gezogen und die Lehre von der Wärme, der Electricität, dem Magnetismus und dem Lichte ganz unberücksichtigt geblieben ist, welches wahrscheinlich durch die Worte: mechanische Naturlehre, auf dem Titel angedeutet werden soll, aber dem sonstigen Begriffe der mechanischen Naturlehre (S. z. B. E. G. Fischers mechanische Naturlehre) nicht gemäss ist. Zweckmässig und der allgemeineren Verbreitung des Buchs förderlich wäre es gewiss gewesen, wenn auch die Lehre von den sogenannten Imponderabilien mit aufgenommen worden wäre. Auch dürfte es selbst noch in unserer Zeit nicht ganz ohne Nutzen gewesen sein, wenn der Vf. einige Rücksicht auf seines Landsmannes (wenn wir nicht irren) Hellmuth Volksnaturlehre zur Vertilgung des Aberglaubens genommen hätte.

Deguin, Cours élémentaire de Physique. 3e édition. T. I. Paris. 1840. 8. 9 Fr. 50 c.

Nouveau Manuel complet de Physique, ou Eléments abrégés de cette science. Par Bailly. Nouv. édit. in 18. 8 Fr. 50 c.

Traité élémentaire de physique, chimie, toxicologie et pharmacie. Par Favart. 2 Vol. 8. 14 Fr.

G. Bird, Elements of natural philosophy. London. 8. 12 s.

Snowball's Cambridge Course of Elementary Natural Philosophy, being demonstrations of the Propositions in Mechanics and Hydrostatics, for Candidates for the ordinary degree. Second edition. 1840. 12. 4 s.

Trattato elementare di Fisica matematica. Di Emanuele Estiller. Tom. I. Palermo. 1839.

Lezioni di Fisica di Carlo Matteucci, date nell' i. e r. univ. di Pisa nell' anno 1840. Pisa 1840. 8.

Nouveau système des tourbillons appuyé par des expériences qui démontrent la réalité des tourbillons admis par Descartes. Par Guerineau. Poitiers. 8.

Digitized by Google

Spiegazione della attrazione de' corpi e sue leggi, di Antonio Pontillo. Verona. 1839. 8.

Sopra l'identita dell' attrazione molecolare coll' astronomica; opera del cav. Leopoldo Nobili di Reggio. Modena. 1840. 4.

Pneumatics, containing an Analysis of the Mechanical Properties of aerial fluids, with a Description of Pneumatic Machines, by Hugo Reid. Edinburgh. 1840. 8. 2 s. cloth.

Storia dell' Elettricità, di Antonio Carnevale Arella. Alessandria. 1839. 8. Vol. I. II.

Relazione storico-critica sperimentale sull' Elettro-Magnetismo del Prof. Francesco Zantedeschi. Venezia. 1840. 8.

A. Quetelet, Second mémoire sur le magnétisme terrestre en Italie. Bruxelles. 4.

— Sur l'état du magnétisme terrestre à Bruxelles pendant les douze années de 1827 à 1839. Bruxelles. 4.

Leop. Nobili, Questioni sul Magnetismo. 8. Modena.

— — Nuovi trattati sopra il Calorico, l'Elettricità ed il Magnetismo. 8. Ibid. 6 L.

Klauprecht: Die Lehre vom Klima in land- und forstwirthschaftlicher Beziehung. Karlsruhe. 1840. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Bildet die vierte Abtheilung des Lehrbuchs der land- und forstwissenschaftlichen Naturkunde von J. Ch. Hundeshagen, und enthält eine gute Zusammenstellung der betreffenden Gegenstände, ohne eben die Resultate eigner Untersuchungen mitzutheilen.

F. A. Schneider: Beiträge zur Astro-Meteorologie oder über den muthmasslichen Einfluss des Standes der Planeten, Cometen etc. auf die meteorologischen Erscheinungen an der Erdoberfläche. Leipzig. 1840. 4. 8 ggr.

Der Vf. will die höchst wichtige Entdeckung gemacht haben, dass der Luftdruck, die Wärme, die Windrichtungen etc. berechnet werden können, wenn man die meteorologischen Beobachtungen bei Sonnen-Auf- und Untergang, bei Mond-Auf- und Untergang, zu der Zeit, wenn der Mond das neue Licht empfängt, und 12 Stunden später anstellt und die Ergebnisse dieser Beobachtungen unter andern auch so zusammenträgt, dass dabei der Stand der Planeten berücksichtigt wird!!

Glaube dies dem Herrn Rechnungsrathe wer's will und kann.

Später ist noch ein Nachtrag zu dieser Schrift erschienen. Berlin. 1841. 4. 4 ggr.

A. Quetelet, Resumé des observations météorologiques faites en 1839 à l'Observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles. 4.

A. Quetelet, Deuxième Mémoire sur les variations annuelles



Digitized by Google

de la température de la terre à différentes profondeurs. Bruxelles. 4.

A. Quetelet, Catalogue des principaux apparitions d'étoiles filantes. Bruxelles. 4.

Discours sur l'ensemble des phénomèmes qui se sont manifestés à la surface du globe depuis son origine jusqu'à l'époque actuelle. Par le vicomte d'Archille. 4.

Sulla necessità di stabilire un regolare sistema di osservazioni di Fisica terrestre ed atmosferica; memoria letta alla sezione di fisica nella prima riunione degli scienziati italiani dal cav. V. Antinori. Firenze. 1840. 8.

Denkwürdigkeiten aus dem Leben Sir Humphry Davy's, herausgegeben von seinem Bruder John Davy. Deutsch bearbeitet von D. C. Neubert, Eingeleitet von D. R. Wagner. 4 Bände. (Der erste mit Davy's Bildnisse.) Leipzig. 1840. 8. 5 Thlr. 12 ggr.

Schade, dass der sehr hohe Preis dieser wohlgelungenen Uebersetzung der Lebensbeschreibung eines der grössten Naturforscher der neuern Zeit viele, denen dieselbe im höchsten Grade interessant und lehrreich sein muss, abhalten wird, sie zu kaufen. Durch eine bessere Oekonomie des Drucks würde gewiss ein mässigerer Preis möglich zu machen gewesen sein.

## Vermischte Schriften.

Der Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse (Februar 1841) enthält die folgenden Aufsätze:

1. Ueber die Nachweisung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen von der Beschaffenheit der für sie gegebenen Coordinaten-Gleichungen von dem Herrn Major Dr. G. W. Müller zu Hannover.

Der Zweck dieses sehr beachtenswerthen Aufsatzes ist in der Kürze folgender. Wenn

$Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

die Gleichungen zweier Ebenen (für rechtwinklige Coordinaten) sind, und $\varphi$ den Neigungswinkel dieser beiden Ebenen bezeichnet, so wird in der analytischen Geometrie bekanntlich die Formel

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

bewiesen, aber meistens kein Criterium angegeben, wie man den den Winkel $\varphi$, der natürlich zwei Werthe, einen spitzen und einen stumpfen haben kann, zu nehmen hat. Ein solches Criterium anzugeben ist nun der Zweck dieses Aufsatzes und der von Herrn Major Dr. Müller zu diesem Behuf aufgestellte Satz ist folgender:

Wenn man unter $\varphi$ den Neigungswinkel der beiden Ebenen

Digitized by Google

gegen einander versteht, in dessen Oeffnung der Anfang des zum Grunde gelegten Coordinatensystems liegt (die Fälle, wo der Anfang der Coordinaten in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen liegt, werden ausgeschlossen), so muss für $\varphi$ der spitze oder stumpfe Winkelwerth genommen werden, je nachdem der Quotient

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{DD'}$$

negativ oder positiv ist.

Es wäre wünschenswerth, diesen Satz auf schiefwinklige Coordinatensysteme zu erweitern, wozu wir die Leser des Archivs auffordern möchten.

2. Ueber einige Eigenschaften der um Parabeln durch Tangenten beschriebenen Dreiecke, von Herrn Director C. Rümker zu Hamburg.

Dieser Aufsatz enthält einige recht nette Eigenschaften der Parabel, von denen die meisten wohl bis jetzt noch nicht bekannt gewesen sind. Einiges aus diesem Aufsatze haben wir in diesem Hefte unter den Uebungsaufgaben mitgetheilt.

3. Einige mechanische Aufgaben von Herrn E. John zu Hamburg, nämlich folgende:

a) Wenn ein Schacht bis zum Mittelpunkte der Erde reichte und ein Stein hineinfiele, die Relation zwischen Zeit, Raum und Geschwindigkeit des fallenden Körpers zu finden.

b) Den Druck auf den Boden einer cylindrischen Wassersäule zu finden, der sich vom Mittelpunkte der Erde bis zu ihrer Oberfläche erstreckt.

c) Angenommen, dass sich eben so eine Luftsäule vom Mittelpunkte der Erde bis zu ihrer Oberfläche erstreckt, so soll die Dichtigkeit der Luft für jede Entfernung vom Mittelpunkte gefunden werden.

d) Ein massives, aus einer cylindrischen Scheibe bestehendes Schwungrad, dessen Halbmesser $= r$, Dicke $= h$, Dichtigkeit $= \delta$, Masse $= M$, bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um seine Axe; es soll die Entfernung $\varepsilon$ von der Axe gefunden werden, wo eine der Bewegung direct entgegengesetzte Kraft $Mv = M\varepsilon\omega$ das Schwungrad sogleich zur Ruhe bringen würde.

e) Um die Welle eines Schwungrades der vorher angegebenen Art ist ein Seil gewunden, woran ein Gewicht $= m$ der Bewegung des Rades entgegenwirkt; es soll die Relation zwischen der Zeit und der restirenden Geschwindigkeit gefunden werden.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. T. I. Torino. 1839. 4.

Hierin folgende Abhandlungen:

Observations thermométriques faites à S. Jean de Maurienne depuis 1826 à 1838.

Mémoire sur les rapports entre le pouvoir conducteur des liquides pour les courans électriques et la décomposition chimique qu'ils en éprouvent par Botto et Avogadro.

Mémoire sur l'équilibre des colonnes par Pagani.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti Bononiensis. T. IV. Fasc. 2. Bononiae. 1839. 4.

Digitized by Google

Hierin Aloysii Casinelli Disquisitio analytica in functionem $\overline{\log(1+x)}^m$.

## Preisaufgaben *).

Societas Jablonoviana has proponit quaestiones, a. 1841, 1842 et 1843 solvendas.

II. E disciplinis physicis et mathematicis.

In annum 1841. „Impedimenti, quo flumen electricum, quod vocant, retardatur in transcundo vel per corpora liquida, vel a corporibus liquidis ad solida, separata comparatio instituatur exacta mensura in iis liquidis metallisque, quae maxime in usu sunt ad experimenta galvanica vel electrochemica."

In annum 1842. „Testibus historiae matheseos scriptoribus, Hutton et Chasles, ab initio saeculi XVI. in Germania status algebrae, si ab aequationibus tertii ordinis discesseris, tam promotus erat, ut haec doctrina in patria nostra magis exculta videretur quam in ipsa Italia. Jam vero ex illo tempore quum unici Christophori Rudolfii Javerani nomen et opera ad nos perveneriut; qui exempla sua e bibliotheca Vindobonensi hausisse fertur, quaeritur an ante illum jam „cossistae" germanici fuerunt, qui proprio Marte artem promoverent. Quod ut diiudicetur, opus erit, ut in MSS. inedita bibliothecarum Norimbergensium, Vindobonensium, Monacensium aliorumque inquiratur (Cf. Drobisch, de Joannis Widmanni Egerani arithmetica mercatorum. Lips. 1840)."

In annum 1843. „Recenseantur methodi gravioris momenti, tum analyticae, tum syntheticae, inde a Mongii aetate in geometria inventae, quibusque finibus omnium ac singularum frugifer usus circumscriptus sit, doceatur."

Ad commentationes quaestionibus responsuras Latina lingua, aut Francogallica, aut Germanica uti licet; cunctas vero luculenter scriptas et paginarum notis signatas esse oportet. Praeterea monemus, addendam esse schedulam obsignatam, quae intus nomen auctoris indicet, habeatque simul extus inscriptum gnomen eamdem, quae in commentationis limine comparet. Pretium commentationi, quae praemio digna declarabitur, constitutum est numus aureus viginti quatuor ducatorum. Quod ad primas commentationes, in a. 1841 propositas attinet, eae ante mensis Novembris hujus anni finem ad Societatis h. t. Secretarium, Frid. Christ. Aug. Hasse, Doctr. Histor. Auxill. Prof. ord., gratis mittendae sunt.

Preisaufgabe der französischen Akademie.

Trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies pour déterminer complètement les maxima et minima des intégrales multiples.

Einlieferungstermin 1. April 1842. Preis 3000 Fr.

*) Wollen gelehrte Gesellschaften und Akademieen mir die Programme, worin sie ihre Preisaufgaben bekannt machen, zusenden, so sollen dieselben sogleich in dem Archive zu ihrer weitern Verbreitung abgedruckt werden.

Digitized by Google

# Inhalt des zweiten Bandes des Cambridge Mathematical Journal *).

## Plane Geometry.

On the elementary principles of the application of algebraical symbols to Geometry. By *D. F. Gregory.* — On a symmetrical form of the equation to the Parabola. — Demonstrations of expressions for the area of a triangle. — Problem „Given the $n^{th}$ part of a straight line to find the $(n+1)^{th}$ part." — Demonstrations of two properties of the abscissae of the angular points of a polygon circumscribing a parabola. — Investigation of the general equation to diametral curves. — On the general theory of the loci of curvilinear intersection. — On the general interpretation of equations between two variables in algebraic geometry. By *W. Walton.* — On the general theory of multiple points. By *W. Walton.* — Simple demonstration of a property of the conic sections. — On the existence of real asymptotes to impossible branches of curves. — On a theorem in the geometry of position. — Analytical demonstrations of Stewart's theorems. By *R. L. Ellis.*

## Analytical Geometry of three dimensions.

On the number of normals which can be drawn from a given point to an algebraical surface. By *M. Terquem.* — Investigation of the locus of points for which the sum of the squares of the normals drawn from them to a surface of the second order is constant. By *M. Terquem.* — Condition that a surface should be touched by a plane in a curved line. — Applications of the method of spherical co-ordinates. — On the perspective of the co-ordinate planes. — On the lines of curvature in an ellipsoid. By *R. L. Ellis.* — Geometrical interpretation of Lagrange's condition in the theory of maxima and minima of functions of two variables. — Symmetrical solutions of problems respecting the straight line and plane. By *George Boole.* — On singular points in surfaces. By *D. F. Gregory.*

## Algebra.

On the transformation of an analytical expression. — Researches in the theory of analytical transformations, with a special application to the Reduction of the general equation of the second order. By *George Boole.* — Demonstration of a proposition in the theory of numbers. — Expression for any positive integral power of a logarithm. — On the expansion of sines and cosines of multiple arcs in ascending powers of the cosines and sines of the simple arcs. — On the expressibility of the roots of algebraic equations. By *J. M. Peebles.* — On the equation of payments. — On the develop-

*) Da dieses Journal wohl in Deutschland nicht so häufig gelesen wird, wie es verdient, so werde ich in der Folge immer den Inhalt der einzelnen erscheinenden Hefte vollständig mittheilen. Diesmal nehme ich den ganzen so eben vollendeten zweiten Band, der die Nummern VI—XII (Mai 1841) in sich fasst.

Digitized by Google

ment of the square roots of numbers by continued fractions. By *James Booth.* — Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations. By *J. J. Sylvester.* — Practical rule for reducing a square root into a continued fraction. — On the irrationality of $\epsilon$. — New solution of a cubic equation. By *J. Cockle.* — On a method of algebraic elimination.

### Differential and integral calculs.

On singular solutions and particular integrals of differential equations. By *W. Walton*, Nos. I. and II. — On the failure of formulae in the inverse processus of the differential calculus. — On certain theorems in the calculus of variations. By *George Boole.* — On the integration of linear differential equations with constant coefficients. By *George Boole.* — Series for the approximate values of definite integrals. — On the integration of certain classes of differential equations. By *R. L. Ellis*, Nos. I. and II. — Investigation of the radius of curvature in polar cvrves. — Demonstration of a property of Laplace's coefficients. — On the integration of equations of partial differentials. By *B. Bronwin.* — Evaluation of a definite multiple integral. By *D. F. Gregory.* — Remarks on Poisson's proof that $F(\mu, \omega)$ can be expanded in a series of Laplace's functions. — Demonstration of the correctness of Fourier's expansions of functions in series consisting of sines or cosines only. — On certain integral transformations. By *B. Bronwin.* — Note on the definite integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin \theta)\, d\theta$. — Theorem respecting general differentials. — Extension of a property of Laplace's functions to homogeneous functions generally.

### Mechanics.

On the condition of equilibrium of a system of mutually attractive fluid particles. — On a property of the brachystrochrone when the forces are any whatsoever. — Investigation of the angle between the apsides of the path of a projectile moving in a surface of revolution, when the orbit is nearly circular. — On the sympathy of pendulums. — On the tautochrone in a resisting medium. — On the motion of a pendulum whose point of support is disturbed. — On the form of a bent spring.

### Astronomy.

Investigations of the variations of the node and inclination. — Geometrical investigation of the aberration in right ascension and declination. — Analytical solutions of problems in plane astronomy.

### Light.

Method of finding the approximate values of definite integrals which occur in the calculations of diffraction. — Note on the calculation on the intensity of light at the centre of the shadow of a small circular disk. — On fringes of interference produced by oblique reflection at the surface of a small mirror. By *A. Bell.* — Solutions of Senate-House Problems.

Digitized by Google

# III.

# Literarischer Bericht.

(Um diesem literarischen Berichte in Bezug auf die Erscheinungen der mathematischen und physikalischen Literatur in den Jahren 1840 und 1841 möglichste Vollständigkeit zu geben, ist in dieser Nummer noch Einiges, was früher theils übersehen, theils vorläufig absichtlich ausgelassen worden war, nachgetragen worden. In einer der folgenden Nummern, wenn es irgend möglich ist, schon in Nr. IV., wird eine vollständige Uebersicht der in den neuesten Bänden — 1840 und 1841 — der Schriften aller gelehrten Gesellschaften und Akademieen enthaltenen mathematischen und physikalischen Abhandlungen geliefert werden).

## Geschichte der Mathematik.

Histoire des sciences mathématiques en Italie par Libri. T. III et IV. 8. 1841. 5 Thlr. 8 ggr.

Die ersten früher erschienenen Theile dieses Werks sind bekannt genug.

Historische Entwickelung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibnitz von Dr. K. J. Gerhardt. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Salzwedel.

Whewell, W., Geschichte der inductiven Wissenschaften, der Astronomie, Physik, Mechanik, Chemie, Geologie etc. Nach dem Englischen mit Anmerkungen von J. J. Littrow. 2 Bde gr. 8. Stuttgart. 1840. 2 Thlr. 18 ggr.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Hoffmeister, R. H., Leitfaden für den mathematischen Unterricht in Mittelschulen, 1. 2. Curs., Arithmetik und Geometrie. 1840. gr. 8. 1 Thlr.



Digitized by Google

Doerk, H. G., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien. 2. Bd. gr. 8. Elbing. 16 ggr. (1. und 3. 1839. 1 Thlr. 8 ggr.)

Matthias, Dr. J. A., Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Arithmetik und die gemeine Algebra, die Elementar-Geometrie, ebene Trigonometrie und Apollonischen Kegelschnitte. 3 Hefte, 7. Aufl. gr. 8. 840. Magdeburg, 1 Thlr.

Francoeur, L. B., vollständiger Lehrcursus der reinen Mathematik, nach der 4. Originalausg. aus dem Französ. übers. und mit Anmerk. und Zusätzen vers. von Dr. E. Külp. 1. Band 3. und 4. Buch gr. 8. 1840. Bern. 1 Thlr. 11 ggr. 2. Bd. 1. Buch 1841. 2 Thlr. (1. Band 1. u. 2. Buch 1839. 1 Thlr. 2 ggr.)

Lehrbuch der angewandten Mathematik für Realgymnasien und höhere Bürgerschulen. Von H. L. Boltze, Dr. phil. und Collaborator an der Saldern'schen Schule zu Brandenburg a. H. Zweiter Theil. Statik und Mechanik fester Körper. Berlin. 1841. 8. 21 ggr.

Auch mit dem besonderen Titel:

Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Realgymnasien und höhere Bürgerschulen u. s. w.

Dieses Lehrbuch der angewandten Mathematik ist hervorgerufen worden durch das immer bestimmter und unabweisbarer hervortretende Bedürfniss einer grossen Anzahl von Schülern, schon auf der Schule in einen grössern Theil der Lehren der sogenannten angewandten Mathematik mit einer gewissen Vollständigkeit und mit gehöriger Berücksichtigung des Gebrauchs im praktischen Leben eingeführt zu werden, und ist also auch ein sehr erfreuliches Zeichen der Zeit. Nach der Absicht des Vfs. soll dasselbe aus vier Theilen bestehen, von denen laut der Vorrede der erste die bürgerliche und Staatsrechenkunst, der zweite (hier vorliegende) die Mechanik, der dritte geometrisches Zeichnen und Feldmessen, der vierte Astronomie und mathematische Geographie enthalten wird. Der wegen eines besondern Bedürfnisses zuerst herausgegebene, uns vorliegende, zweite Theil enthält die Statik und Mechanik fester Körper mit gehöriger Berücksichtigung des Praktischen in zweckmässiger Kürze. Eigenthümlich ist dem Vf. Mehreres in der Lehre von den Kräftepaaren, der elementaren Darstellung der Lehre von den Trägheitsmomenten, auch bei der Begründung des Gesetzes der allgemeinen Schwere u. s. w., so wie derselbe denn, wie es uns scheint, namentlich auch mit Glück den Versuch gemacht hat, mehrere der wichtigsten Lehren des mechanischen Theils der Physik, die in den physikalischen Lehrbüchern und bei dem physikalischen Unterrichte sich leider meistens nur mit einer blossen historischen Erwähnung müssen abfinden lassen, auf eine zweckmässige und zum Theil elegante Weise elementarisch zu begründen, welche Seite dieses Buchs, wie es uns scheint, besonders hervorgehoben zu werden verdient. Gewünscht hätten wir, dass der Vf. auch das Princip des Reversionspendels mit aufgenommen und gehörig erläutert hätte, und aufmerksam zu machen wollen wir denselben zum Schluss nicht unterlassen, seinem Buche als dritten Theil noch eine fünfte die Lehren der Statik und Mechanik tropfbar und ausdehnsam flüssiger Körper enthaltende Abtheilung hinzu-

Digitized by Google

zufügen, da der vorliegende zweite Theil nur die Statik und Mechanik fester Körper enthält. Bei diesem von uns gewünschten fünften (oder vielmehr dritten) Theile würde der Vf. ganz besonders Gelegenheit finden, den gewöhnlichen Vortrag der Physik an vielen Stellen durch eine zweckmässige elementar-mathematische Darstellung zu vervollständigen, zu wahrer Wissenschaftlichkeit zu erheben, und eben dadurch erst recht fruchtbar und lehrreich für die Schüler zu machen. So sehr wir auch den Plan des Werkes sonst im Ganzen billigen, glauben wir doch, dass dieser von uns gewünschte, die Lehren der Statik und Mechanik flüssiger Körper enthaltende Theil seiner grossen Wichtigkeit für das praktische Leben wegen, durchaus nicht fehlen darf, wenn das Buch seinen Zweck vollständig erfüllen soll.

Nouveaux Éléments de Mathématiques pures, par A. Meyer, docteur en sciences, employé au dépot de la guerre, professeur de mathématiques à l'institut Gaggia et à l'université libre de Bruxelles. T. I. Arithmétique. Bruxelles. 1841. 8.

Der Vf. beabsichtigt in ungefähr 20 Lieferungen, jede wenigstens zu 100 Seiten (Preis 4 Fr.), ein vollständiges System der sogenannten reinen Mathematik zu liefern. In der vor uns liegenden ersten Lieferung spricht sich ein grosses sehr löbliches Streben nach Eleganz und möglichster Einfachheit der Darstellung und nach einem systematischen und naturgemässen Entwickelungsgange deutlich aus, weshalb wir glauben das deutsche Publikum auf dieses Unternehmen aufmerksam machen zu müssen. Auch findet sich in dieser Lieferung manches Neue, wie z. B. S. 116. ein dem Vf. eigenthümlicher Beweis des binomischen Lehrsatzes für Facultäten und manches Andere in der Theorie der Facultäten. Ueber die folgenden Lieferungen, in denen sich das Eigenthümliche dieses Werks, aus dem uns auch Lehrer manche gute Winke entnehmen zu können scheinen, gewiss noch mehr und noch deutlicher herausstellen wird, werden wir berichten, so bald dieselben erschienen sind. Bis jetzt ist nur die erste bis zu dem dritten „Génération des produits" überschriebenen Kapitel reichende Lieferung zu unserer Kenntniss gelangt. Auch wird sich überhaupt, wenn erst mehr erschienen ist, etwas Vollständigeres über den ganzen Plan des Werks sagen lassen. Für jetzt mag daher diese kurze vorläufige Anzeige genügen.

---

## Arithmetik.

Wirth, Dr. Ph., Grundzüge der Arithmetik nebst den Anfangsgründen der Algebra. Bamberg. gr. 8. 18 ggr.

Traité élémentaire sur l'arithmétique etc. à l'usage du commerce et des finances par Merle. 6me édition. Paris. 1841. 8. 5 Fr.



Digitized by Google

Ferber, C., Enseignement du calcul mental, Strasburg 2e Edit. 12. 1840. 12 ggr.

Elementi di Aritmetica, di Francesco Soave. Edizione corretta sulle antecedenti. Milano. 1841. 12.

Produktentafel, enthaltend die 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100000. Herausgegeben von C. A. Bretschneider, Prof. am Realgymnasium zu Gotha. Hamburg und Gotha. 1841. gr. 8. 16 ggr.

Was diese Tafel enthält, giebt der Titel bestimmt an. Dieselbe empfiehlt sich durch eine auf dem bekannten Satze, dass wenn die niederen Ziffern zweier vielzifferigen Zahlen von der ersten an bis zu einer bestimmten Stelle hin die nämlichen sind, dann auch die niederen Ziffern gleicher Vielfacher jener Zahlen auf eben so viel Stellen unter einander übereinstimmen, wie verschieden auch die Ziffern in den höheren Stellen sein mögen, beruhende sehr zweckmässige Einrichtung und den geringen Raum von nur 6¼ Bogen, welchen sie dieser Einrichtung zufolge einnimmt, durch sehr schönes Papier, scharfen und deutlichen Druck und sehr mässigen Preis in jeder Beziehung, weshalb wir sie in den Händen recht vieler rechnender Mathematiker zu sehen wünschen, denen sie gewiss sehr viele Vortheile und Erleichterungen bei ihren Arbeiten gewähren wird, und die sich daher dem Herrn Vf. zu ganz besonderm Danke verpflichtet fühlen werden. Aber auch in den Händen der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten kann und wird diese Tafel vielen Nutzen stiften, da es für die Schüler immer sehr instructiv sein wird, wenn sie schon bei'm ersten wissenschaftlichen arithmetischen Unterrichte mit der Einrichtung und dem Gebrauche dieser Tafeln und den Gründen, auf denen die erstere beruhet, bekannt gemacht werden, welches auch eine sehr gute Vorbereitung zu dem künftigen Gebrauche der Logarithmentafeln und der trigonometrischen Tafeln sein wird. Es hat uns immer geschienen, dass es sehr nothwendig ist, die Schüler so zeitig als irgend möglich auf den häufigen und wichtigen Gebrauch, welcher von zu verschiedenen Zwecken, immer aber zur Erleichterung und Abkürzung schwieriger und zeitraubender Rechnungen construirter Tafeln in allen Theilen der Mathematik gemacht wird, hinzuweisen und ganz besonders aufmerksam zu machen, wozu bei'm ersten wissenschaftlichen arithmetischen Unterrichte neben den Factorentafeln — deren Einrichtung aber im Ganzen zu einfach ist — nach unserer Ueberzeugung die Produktentafel des Vfs. sehr zweckmässig und vortheilhaft benutzt werden kann, wobei auch noch besonders der praktische Nutzen für manchen künftig zu einer Beschäftigung, bei welcher öfters die Ausführung weitläufiger Rechnungen erfordert wird, übergehen wollenden Schüler in Anschlag gebracht werden muss. Eine sehr lesenswerthe Einleitung über Einrichtung und Gebrauch der Tafeln eröffnet dieselben, und enthält ausser ihrem eigentlichen Gegenstande auch noch manche schätzbare Bemerkungen, die sich in den meisten arithmetischen Lehrbüchern nicht finden. Möge der Vf. auch bei der in der Vorrede angekündigten sehr verdienstlichen Arbeit: nämlich einer neuen und sorgfältigen Berechnung der Zahlwerthe der wichtigsten in der gesammten Mathematik vorkommenden nu-

Digitized by Google

merischen Constanten und Coefficienten, nicht ermüden, und sich nicht abschrecken lassen durch die geringe Anerkennung, die leider oft solchen mühsamen und Zeit raubenden Arbeiten zu Theil wird! Der Dank derjenigen, welche die Verdienstlichkeit derselben, und die ungemeine Sorgfalt und Genauigkeit, welche auf solche Arbeiten gewandt werden müssen, zu würdigen verstehen, wird ihm gewiss zu Theil werden.

Traité sur la théorie des logarithmes par Vallès. 8. 841.

Vega, G., Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch herausg. von Hülse. Leipzig. gr. 8. 1840. 1 Thlr. 6 ggr.

Steinberger, A., Tafel der gemeinen oder Brigg'schen Logarithmen aller Zahlen von 1—1000000 mit 5 oder beliebig 7 Decimalstellen. Ein Auszug aus Vega's Logarithmisch-Trigonometr. Handb. Regensburg. gr. 8. 1840. 8 ggr.

Tables of Logarithms, common and trigonometrical, to five places. Under the superintendence of the society for the diffusion of useful knowledge. 8. 1841. 3 s. swd.

Four figure Logarithms and Anti-Logarithms. On a Card, 1841. 1 s.

The Elements of Algebra, preliminary to the Differential Calculus, and fit for the Higher Classes of Schools in which the Principles of Arithmetic are taught. By Professor De Morgan. 2d Edition 1841. 12mo. 9 s. cloth.

J. G. Hall's Differential and Integral Calculus. 3rd edit. 1841. 8. 12 s. 6 d.

Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen von Kummer. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Liegnitz.

Traité élémentaire des fonctions elliptiques, ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral par P. F. Verhulst. Bruxelles. 1841. 8. 3 Thlr.

Dieses Werk empfehlen wir allen denen, welche sich, ohne auf die ursprünglichen Quellen zurückgehen zu wollen, mit der Theorie der elliptischen Functionen bekannt machen wollen.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnungen und deren wichtigsten Anwendungen von S. D. Poisson. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1841. 8. 2 Thlr. 18 ggr.

Eine auf schönes Papier deutlich und correct gedruckte gute Uebersetzung von Poissons Recherches sur la Probabilité des Jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités. Paris 1837. 4. 25 Fr., welche der Uebersetzer mit einer grössern Anzahl von Zusätzen

Digitized by Google

versehen hat, um dieselbe, wie er in der Vorrede sagt, zu einem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung abzurunden, und dadurch also zugleich den der Uebersetzung gegebenen Titel zu rechtfertigen. Was von dem Uebersetzer herrührt, ist nicht bestimmt angegeben, und wir können darüber auch kein ganz gültiges Urtheil fällen, weil uns das Original in diesem Augenblicke zufällig nicht zur Hand ist.

## Geometrie.

Meyer, C., Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. 3 Bde. gr. 8. Potsdam. 1840. 1 Thlr. 14 ggr.

Gleichmann, H. A., Lehrbuch der ebenen Geometrie, ein Leitfaden beim Unterricht in den Elementen der Mathematik. gr. 8. Meiningen. 15 ggr.

Rüss, W. A., die Geometrie und Trigonometrie. Zunächst für Divisionsschulen und sonstige Militair-Unterrichtsanstalten. gr. 8. Berlin. 1840. 1 Thlr. 4 ggr.

Ludowieg, J. C. H., Lehrbuch der Elementar-Geometrie und Trigonometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. 2. Bd. gr. 8. Hannover. 1840. 2 Thlr. 8 ggr. (1. Bd. 1839. 2 Thlr.)
Eine ausführlichere Anzeige dieses Buchs im nächsten Hefte.

Holzapfel, F. X., Grundlehren der Elementar-Geometrie mit Anwendung auf Berechnung der Körper und Flächen. 8. Constanz. 1840. 9 gr.

Demp, Dr. Q. W., Handbuch der theoret. und prakt. Geometrie. gr. 8. München. 1840. 1 Thlr.

Lehmus, Dr. D. E. F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Bd. 2. Aufl. Berlin. 1840. 1 Thlr. 18 ggr.

Hincke, J., Lehrbuch der geometrischen Formenlehre. 1. Theil: Planimetrische Formenlehre. Mit 9 Figurentafeln. gr. 8. Nordhausen. 1841. 18 ggr.

Dessen Leitfaden d. geometrischen Formenlehre. 1. Theil: Planimetrische Formenlehre. gr. 8. Nordhausen. 1841. 6 ggr.

Hohl, Dr., Vorschule der reinen Stereometrie. 8. Tübingen. 1840. 12 ggr.

Senff, C. J., systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Raume. Eine gekrönte Preisschrift. gr. 4. Dorpat. 1840. 22 ggr.

Die Geometrie genetisch dargestellt für Schulen und zum Selbstunterrichte von R. Simesen, Lehrer der Ma-

Digitized by Google

them und Physik. Mit 175 eingedruckten Holzschnitten. 8. Altona. 1841. 15 ggr.

Die Art und Weise, auf welche man gewöhnlich in der höheren Mathematik die Entstehung der Figuren betrachtet, um daraus ihre Haupteigenschaften kennen zu lernen, führte den Vf. auf den Gedanken, auch die niedere Geometrie durchgehends auf ähnliche Weise genetisch zu behandeln, und dadurch, wo möglich, sowohl dem Anfänger das Erlernen derselben erträglicher zu machen, als auch den Uebergang zum Studium der höheren Mathematik zu erleichtern. In dieser hier mit des Vfs. eigenen Worten angegebenen Weise findet man in der vorliegenden, den Lehrern der Mathematik allerdings zur Beachtung und Benutzung zu empfehlenden Schrift die Lehren der ebenen Geometrie mit Einschluss der ebenen Trigonometrie einfach und klar behandelt, und möchten wir den Vf. uns zu ermuntern erlauben, bald eine ähnliche Bearbeitung der Elemente der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie folgen zu lassen.

Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene. Ein Versuch einer systematisch-elementarischen Entwicklung der sogenannten Planimetrie, Goniometrie und Trigonometrie, der Anfangsgründe der analytischen Geometrie u. s. w. Von Rudolph Wolf, Lehrer der Mathematik an der Realschule in Bern. 8. Bern und St. Gallen. 1841. 15 ggr.

Diese kleine nur 121 Seiten enthaltende Schrift versucht — dies scheint uns ihr eigentlicher Zweck, ihre eigentliche Tendenz und ihr besonderes Verdienst zu sein — die Ergebnisse und Betrachtungsweisen der sogenannten neuern Geometrie in den geometrischen Elementarunterricht einzuführen und bei demselben zu benutzen, wobei sie sich vorzüglich an Steiner anschliesst. Wir halten dies für sehr verdienstlich und in jeder Beziehung zeitgemäss, empfehlen daher auch diese Schrift allen Lehrern, welche, ohne Zeit und Lust zu haben, zu den Quellen zurückzugehen, dasjenige von der sogenannten neuern Geometrie, was für den ersten und nächsten Zweck des geometrischen Elementarunterrichts brauchbar sein möchte, in kurzer Zeit kennen lernen und sich aneignen wollen. Aus dem Gesichtspunkte eines Lehrbuchs betrachtet, können wir aber die Vermischung der ganzen ebenen Trigonometrie, die selbst die bekannten imaginären Moivre'schen Formeln und was sich daran unmittelbar anschliessen lässt, aufnimmt, und der analytischen Geometrie mit den Lehren der synthetischen Geometrie nicht gut heissen, indem auf diese Weise theils der schöne synthetische Charakter der letztern verloren geht, theils keine der genannten Wissenschaften in irgend einer Art zum Abschluss gebracht und der Lehrling in das eigentliche Wesen derselben gehörig eingeführt und wirklich eingeweiht wird. Auch möchten wir die auf Seite 49 sich findende Bemerkung: „Man hat sich auch vielfache Mühe gegeben, die Formeln 38 und 39 „— nämlich die Formeln $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$ und $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ —" logarithmisch zu machen, d. h. die in denselben vorkommenden Summen in Producte umzuwandeln. Da jedoch einerseits die durch diese Umwandlung bezweckte Erleichterung meist nur scheinbar ist, andererseits die Einführung von

Digitized by Google

Hülfsgrössen, Wurzeln u. s. w. Zweideutigkeit in die Formeln bringt, und endlich durch sie das Gedächtniss bedeutend beschwert wird, so kommen sie nach und nach bei den praktischen Rechnern wieder ganz ausser Gebrauch, und sollen auch hier keine Entwicklung finden" keineswegs unterschreiben. Wer da weiss, welcher vielfache und wichtige Gebrauch, namentlich in der Astronomie und Geodäsie von der Einführung sogenannter Hülfswinkel und anderer Hülfsgrössen gemacht wird, um Formeln zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, welche Einfachheit und Leichtigkeit u. A. z. B. Gauss durch solche Hülfsmittel in manche Rechnungen zu bringen gewusst hat, wird mit uns gewiss einverstanden sein, dass der Schüler, der nur irgend weitere Schritte in der Mathematik zu thun beabsichtigt, nicht zeitig genug mit denselben bekannt gemacht und in denselben geübt werden kann. Auch scheinen uns dieselben die trefflichste Uebung in dem Gebrauche der goniometrischen Formeln darzubieten und letztere dem Schüler am besten in das Gedächtniss einzuprägen. Wie schön ist z. B. der Kunstgriff, nach welchem man, wenn der Winkel $\varphi$ aus der in dieser Form oft vorkommenden Gleichung

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$$

bestimmt werden soll, die beiden Hülfsgrössen $r$ und $\Theta$ den beiden Gleichungen

$$a = r \cos \Theta, \; b = r \sin \Theta$$

gemäss, d. h. mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{b}{a}, \; r = \frac{a}{\cos \Theta} = \frac{b}{\sin \Theta}$$

bestimmt, und dann zur Berechnung von $\varphi$ die einfache Formel

$$\sin (\Theta + \varphi) = \frac{c}{r}$$

erhält. Sollte es nicht der Mühe werth sein, den Schüler recht zeitig mit solchen Kunstgriffen und Hülfsmitteln bekannt zu machen? Auch glauben wir nicht, dass, wenn in der Aufgabe nicht selbst eine Unbestimmtheit liegt, durch solche richtig gehandhabte Kunstgriffe und Transformationen eine Unbestimmtheit in die Aufgabe gebracht werde. Lassen etwa die bekannten schönen Formeln für $\sin \frac{1}{2} A$ und $\cos \frac{1}{2} A$ in der ebenen und sphärischen Trigonometrie einer Unbestimmtheit Raum? Lässt es nicht vielmehr z. B. die Formel

$$\sin A = \frac{\sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc},$$

in der ebenen Trigonometrie, auf die man doch am Ende eben so gut durch die ursprüngliche Entwicklung hätte kommen können, wie auf die bekannte völlig bestimmte Formel für $\cos A$, unentschieden, ob der Winkel $A$ zwischen 0 und 90° oder zwischen 90° und 180° zu nehmen ist? Unsere Absicht war hier nur, die grosse Wichtigkeit der Transformationen in der Trigonometrie in möglichster Kürze gegen die von dem Vf. ausgesprochene Meinung herauszustellen, zugleich aber auch die Richtigkeit unserer obigen An-

Digitized by Google

sicht, dass das Schriftchen des Vfs. in manchen Beziehungen unvollständig ist und unbefriedigt lässt, zu beweisen, wobei wir aber auch nicht unterlassen können und wollen, hier am Schluss nochmals auf dessen im Eingange angedeutete Verdienstlichkeit aufmerksam zu machen, dasselbe den Lehrern zur Berücksichtigung bei dem geometrischen Unterrichte zu empfehlen, und den Vf. zu ermuntern, in seinem löblichen Streben die Ergebnisse und Betrachtungsweisen der neuern Geometrie so viel als irgend möglich in den geometrischen Elementarunterricht einzuführen, fortzufahren. Besondere Anerkennung verdienen endlich auch noch die an vielen Stellen beigebrachten historischen und literarischen Notizen.

Principles of Geometry, familiarly illustrated and applied to a variety of useful purposes. Designed for the Instruction of young Persons. By Prof. Ritchie. 2d Edition. 12. 3 s. 6 d. cloth.

Ergänzung des Euklidischen Systems der Geometrie, in Rücksicht seiner ungenügenden Beweise der die Parallellinien und ihre Eigenschaften betreffenden Lehrsätze, von L. A. Seeber. Karlsruhe. 1840. 4. 8 ggr.

Zur Theorie des Kreises von H. Schmidt. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Halberstadt.

Ueber die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks oder Vierecks berühren, von dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, von Dr. Nauck. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Schleusingen.

Quadrature du cercle par Le Geay. Fol. 1841.

Traité de géométrie descriptive par Adhémar. 8. Paris. 1841. 20 Fr.

Neubig, Dr. A., 800 Aufgaben aus der rechnenden Geometrie und Trigonometrie etc. 8. Erlangen. 1840. 12 ggr.

Biot, J. G., Versuch einer analytischen Geometrie, angewandt auf die Curven und Flächen zweiter Ordnung. Uebers. und mit Zusätzen von Dr. J. T. Ahrens. 2te Vermehrte Aufl. gr. 8. Nürnberg. 1840. 2 Thlr. 12 ggr.

Complément de géométrie analytique par Page. 8. Paris. 1841. 1 Thlr. 8 ggr.

Versuch einer populären Darstellung der Eigenschaften der Cykloide und ihrer Evolute von Türkheim. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Schweidnitz.

Digitized by Google

## Praktische Geometrie.

Die Pothenotsche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt von C. L. Gerling. 8. Marburg. 1840. 8 ggr.

Durch ein Versehen ist diese kleine sehr beachtenswerthe Schrift in den früheren literarischen Berichten noch nicht angezeigt worden. Der Vf. hat in derselben die wichtigsten Auflösungen des Pothenot'schen Problems durch Rechnung und durch Construction oder mittelst des Messtisches zusammengestellt und ihre praktische Brauchbarkeit überall richtig gewürdigt. Den Auflösungen durch Construction ist vorzüglich ein in den geometrischen Lehrbüchern sich nicht findender allgemeiner, auch an sich interessanter und bemerkenswerther Lehrsatz zum Grunde gelegt worden, auf welchen der Vf. vor vielen Jahren durch eine Andeutung von Gauss aufmerksam gemacht wurde. Besonders hervorgehoben muss endlich noch werden, dass der Vf. auch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei dem Pothenot'schen Problem auf eine sehr deutliche Weise zeigt, um, wenn mehr Messungen als zur absoluten Bestimmung des gesuchten Punktes erfordert werden, gemacht worden sind, die möglichst scharfe Bestimmung aus allem Gegebenen und Beobachteten zu erhalten, wodurch, so wie überhaupt durch viele andere augenscheinlich aus eigner vielfacher und langjähriger Praxis hervorgegangene praktische Bemerkungen und Andeutungen, nach unsrer Ueberzeugung die kleine Schrift sich als eine für den die Pothenot'sche Aufgabe oder bei der Messtischpraxis das sogenannte Rückwärtseinschneiden häufig in Anwendung bringenden Geodäten unentbehrliche darstellt.

## Trigonometrie.

Trigonometrie rectiligne suivie de tables de logarithmes etc. par Lambert. Paris. 1841. 8. 4 Fr. 50 c.

Elements of Trigonometry, and Trigonometrical Analysis, preliminary to the Differential Calculus; fit for those who have studied the Principles of Arithmetic and Algebra, and Six Books of Euclid. By Prof. De Morgan. 12. 1841. 9 s. cloth.

Tröbst, Dr. C. G., Tafel der Sinus, Tangenten, Secanten, mit dem Opus Palatinum verglichen und nach den Differenzen geprüft. 12. Jena. 1840. 12 ggr.

Digitized by Google

## Mechanik.

In den Sitzungen der Petersburger Akademie der Wissenschaften vom 30. October und 18. December 1840 hat Herr Ostrogradsky ein Memoire über die Bewegung der sphärischen Projectile in der Luft vorgelesen, welches für den genannten Gegenstand nach dem, was bis jetzt über dessen Inhalt bekannt geworden ist, jedenfalls sehr wichtig ist.

## Praktische Mechanik.

Wandner, Lehrbuch der technischen Mechanik. Mit 9 Figurentafeln. gr. 8. Regensburg. 1841. 1 Thlr. 3 gr.

Rühlmann, Dr. M., die technische Mechanik und Maschinenlehre, zunächst als Leitfaden für den Unterricht an Lehranstalten, so wie auch zum Gebrauch für Techniker jeder Art ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung bearbeitet. 1r Bd. 1e Abth. Statik fester Körper. gr. 8. Dresden. 1840. 21 ggr.

Demme, A. V., der praktische Maschinenbauer, mit vielen Kpf. 3 4. 5. Bd. 8. Quedlinburg. 1840. 41. 6 Thlr. 4 ggr. (1. 2. Bd. 1839. 6 Thlr. 4 ggr.)

Hoffmann, E. L., Sammlung der gebräuchlichsten Maschinen, sowohl zusammengestellt als in ihren einzelnen Theilen. N. F. 1. Heft. Fol. Potsdam. 1840. 2 Thlr.

Allgemeine Maschinen-Encyklopädie, herausgegeben von Hülse. Text in 8. 3. 4. 5. Lief. à 1 Thlr. Atlas in Fol. 3. 4. Lief. à 1 Thlr. 16 ggr. Leipzig. 1841.

Haindl, S., Maschinenkunde und Maschinenzeichnen. 2. Lief gr. 4. München. 1840. 3 Thlr. (1. 1839. 3 Thlr.)

Poncelet, industrielle Mechanik, deutsch bearbeitet und mit Anmerk. begleitet von C. G. Kuppler. 1 — 4. Lief. gr. 8. Nürnberg. 2 Thlr.

Description des Machines et procédés consignés dans les brevets d'invention. Publié par les Ordres de M. le Ministre du commerce. 4. Avec fig. Tom. 41. Paris. 1841.

Calculs sur la sortie du vapeur dans les machines locomotives par Jeanneney. Paris. 1841. 8. 5 Fr.

Digitized by Google

## Optik.

Schumachers astronomische Nachrichten enthalten im 18. Bande Nr. 421 einen Aufsatz über Fernröhre mit Glasspiegeln und deren Vorzüge von Herrn Dr. Barfuss.

## Astronomie.

Mädler, J. H., populäre Astronomie. 1—3. Heft, mit vielen Abbild. gr. 8. Berlin. 1841. 1 Thlr. 8 ggr.

Richter, J. A. L., Handbuch der populären Astronomie für gebildete Stände. gr. 8. 1. 2. Band. Quedlinburg. 1840. 3 Thlr.

Arago's popular lectures on Astronomy. Translated, with explanatory notes, by Walter K. Kelly. 1841. 2 s.

Hypothese über die Entstehung des Planeten-Systems und des Weltalls überhaupt von A. L. Trenn. Danzig. 1841. 8. 12 ggr.

Struve, Dr. W., vorläufiger Bericht von der Russischen Gradmessung, mit Allerhöchster Genehmigung auf Veranstaltung der Kaiserl. Universität zu Dorpat während der Jahre 1821—1827 in den Ostsee-Provinzen des Reichs ausgeführt. Folio. Dorpat. 1840 18 ggr.

Fedorow, W., vorläufige Berichte über die von ihm in den Jahren 1832—1837 auf Allerhöchsten Befehl in West-Sibirien ausgeführten astronomisch-geographischen Arbeiten. Im Auftrag der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften herausg. von C. W. Struve. gr. 8. Petersburg. 1840. 1 Thlr. 4 ggr.

Karsten, H., kleiner astronomischer Almanach für Seeleute auf das Jahr 1841. gr. 8. Rostock. 12 ggr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1843. Herausgegeben von J. F. Encke. 8. Berlin. 1841. 2 Thlr. 16 ggr.

Dieser Jahrgang enthält in dem Anhange die folgenden Abhandlungen:

Ueber die Einrichtung des Jahrbuchs.

Geographische Lage der Hauptsternwarten.

Aus diesem neueren Verzeichnisse tragen wir zu dem im ersten Hefte des Archivs, Literarischer Bericht. I. S. 14. mitgetheilten Verzeichnisse nach:

Digitized by Google

| Name des Orts | Geograph. Breite + nördlich — südlich | Länge v. Berlin Zeit. + westlich — östlich | Oestl. Länge von Ferro in Bogen. |
|---|---|---|---|
| Danzig . . . . | + 54° 21′ 4″,0 | — 0h 21′ 3″,4 | 36° 19′ 21″,0 |
| Leiden . . . . | + 52 9 28 ,2 | + 0 35 28 ,0 | 22 8 59 ,6 |
| Modena . . . . | + 44 38 52 ,8 | + 0 9 51 ,6 | 28 35 36 ,0 |

Ueber die selenocentrischen Constanten bei den Stern-Bedeckungen und die Libration des Mondes, nebst Tafeln.

Bemerkungen über das Durchgangs-Instrument von Ost nach West.

## Physik.

**Die Experimental-Physik, ein geistiges Bildungsmittel, in ihren Beziehungen zum praktischen Leben. Ein Handbuch für Lehrer an gehobenen Volks- und Bürgerschulen und technischen Anstalten von Dr. K. F. R. Schneider, Oberlehrer etc. Erste Abtheilung: Die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Dresden. 1841. 8. 9 ggr.**

Wir glauben, dass auch diese Schrift ihren durch den Titel mit hinreichender Deutlichkeit angedeuteten Zweck gut erfüllen wird. Die zweite Abtheilung wird die Statik und Mechanik fester und flüssiger Körper und die Akustik, die dritte die Lehre von den Imponderabilien enthalten. Dann beabsichtigt der Vf. diesem Handbuche einen Leitfaden für die Schüler, und später die Physik des Luftkreises oder die Meteorologie und die Physik des Himmels oder die Astronomie folgen zu lassen. Jedenfalls liefert auch diese Schrift dem aufmerksamen Beobachter auf dem Felde der mathematischen und physikalischen Literatur einen sehr erfreulichen Beweis für das immer bessere Gedeihen und die immer lebhaftere Anerkennung der hohen Wichtigkeit des mathematischen und physikalischen Unterrichts auch auf Schulen einer niedern Gattung, wovon sich gewiss noch die schönsten Früchte erwarten lassen.

Heussi, J., Experimental-Physik methodisch dargestellt. 3. Curs. gr. 8. 1840. 1 Thlr. 8 ggr. (1. u. 2. 1838. 39. 1 Thlr. 16 ggr.)

Dellmann, F., der kleine Physiker 1. die wägbaren Stoffe. gr. 8. 1840. Meurs. 12 ggr.

August, E. F., mechanische Naturlehre. Auszug aus Fischers Lehrbuch der mechanischen Naturl., neu bearbeitet. 2. Aufl. gr. 8. Berlin. 1840. 1 Thlr. 6 ggr.

Fischer, E. G., Lehrbuch der mechanischen Naturlehre, neu

Digitized by Google

bearbeitet von E. F. August, 4. Aufl. gr. 8. 2 Thle. 1. 1837 2. 1840. 5 Thlr.

Fladung, J. A. F., populäre Vorträge über Physik für Damen, Wien. 2. Aufl. 12. 1840. 1 Thlr. 12 ggr.

Figurentafeln zur Physik nebst ausführlicher Erklärung. Für Freunde der Wissenschaft, insbesondere für Gymnasien und Realschulen. Von G. Lauteschläger. 5. Heft. Das Licht. 200 Figuren. Darmstadt. 1841. 8. 12 ggr.

Zweck und Einrichtung dieser Figurentafeln sind aus den früher erschienenen 4 Heften hinreichend bekannt. Das sechste und letzte Heft wird Electricität und Magnetismus enthalten.

Lehrbuch der Physik für höhere polytechnische Lehranstalten von G. Lamé. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. C. H. Schnuse. Dritter Band (Electricität. Magnetismus. Electrodynamik. Physikalische Aufgaben). Darmstadt. 1841. 8. 2 Thlr. 12 ggr.

Die angehängte Sammlung physikalischer, fast sämmtlich auf mathematischem Wege zu lösender Aufgaben, ist sehr lehrreich, und kann Lehrern besonders empfohlen werden.

Gehler, J. S., physikalisches Wörterbuch, neu bearbeitet von Brandes, Gmelin, Littrow, Muncke, Horner und Pfaff, mit vielen Kupfern 9. B. 3. Abth. gr. 8. Leipzig. 1840. 3 Thlr. 8 ggr. (1 bis 9. B. 1. 2. 1825—39. kosten 48 Thlr. 15 ggr.)

Elémens de Physique par Person. Paris. 1841. 8. Les 2 Volumes. 12 Fr.

Mayr, G., Abhandlung über Electricität und sichernde Blitzableiter für jedes Gebäude. 2. Aufl. 8. München. 1841 8 ggr.

Schmidt, Dr. C. H., Unterricht über Magnetismus, Elektricität und Elektromagnetismus. Nebst Beschreibung aller neu erfundenen elektromagnetischen Maschinen. 8. Leipzig. 1841. 8 ggr.

Henrici, F. C., über die Elektricität der galvanischen Kette. gr. 8. Göttingen. 1840. 1 Thlr.

Kämtz, Dr. L. F., Vorlesungen über Meteorologie, gr. 8. 1840. Halle. 2 Thlr. 12 ggr.

Kleefeld, Dr., Meteorologische Beobachtungen angestellt zu Danzig in den Jahren 1831—38. gr. 4. Danzig. 1840. 1 Thlr. 8 ggr.

Stiefel, Ph., Jahrbuch der Witterungs- und Himmelskunde für Deutschland im Jahre 1840. gr. 8. Karlsruhe. 1 Thlr.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahr 1839, herausg. von C. F. Gauss und W. Weber. gr. 8. Leipzig. 1840. 1 Thlr. 20 ggr.

Digitized by Google

Agassiz, L., Untersuchungen über die Gletscher, gr. 8. mit 32 Tafeln in Folio. Solothurn. 1841. 11 Thlr. 8 ggr.

Die neuen Veränderungen der unorganischen Welt oder Geschichte der durch Ueberlieferung nachgewiesenen Einwirkungen des Wassers und des Feuers auf die Gestaltung des festen Theils der Erde, zur Erläuterung geologischer Erscheinungen. Von Carl Lyell. A. d. Engl. v. Carl Hartmann. Weimar. 1841. 8. 2 Thlr. 20 ggr.

Études géologiques dans les Alpes par M. L. A. Necker. T. I. Paris. 1841. 8. 4 Thlr.
Scheint für die Geologie der Alpen wichtig zu sein.

Berghaus, Dr. H., Sammlung hydrographisch-physikalischer Karten der preussischen Seefahrer. 1. Lief. 3 Bl. Imp. Folio. Breslau. 1841. 10 Thlr. 12.

Berghaus, Dr. H., physikalischer Atlas, 5. 6. Lief. Folio. Gotha. 1840. 4 Thlr. — (1—4. Lief. 1838. 1839 kosten 8 Thlr.)

Cosmologie physique par Pater. 8. Paris. 1840.
Cours de magnétisme par Dupotet. 8. Paris. 1840.
De l'air comprimé par Andraud. 8. 2de édition 8. Paris. 1840. 3 Fr.
Discours sur la condition physique de la terre par Regnaud. 8. Paris. 1840.
Exposition du système des vents par Dartigue. 4. Paris. 1840.
Introduction au magnétisme par Gauthier. 8. Paris. 1840. 6 Fr.
Mémoires météorologiques par Morin. 8. Paris. 1840.
Notions physiques par Sainte-Beuve. 8. Paris. 1840.
Opuscules sur les sciences physiques par Desvaux. 8. Paris 1840.
La Physique populaire par Levy. 8. Paris. 1840.
Recueil de mémoires de physique par d'Hombres Firmas. 8. Paris. 1840.
Traité élémentaire de l'électricité par Becquerel. 8. Paris. 1840.
Traité de l'action du fluide électrique par Wanner. 8. Paris. 1840.

Bulletin des sciences physiques et naturelles en Neerlande, rédigé par F. A. W. Miquel, G. J. Mulder et A. W. Wenckenbach. 1840. 6 Livraisons. gr. 8. Utrecht. 4 Thlr.

Årsberättelse om Framstegen i Fysik och Kemi afgifven den 31 Mars 1840; af Jac. Berzelius. Första Delen. Stockholm, 1841. 1 Rdr.

## Vermischte Schriften.

Transactions of the royal, etc. Transactions de la Société Royale d'Edimbourg, vol. XIV. partie 2e, 1840,

Digitized by Google

Edimbourg, in 4.*) — Résultats d'observations faites avec l'anémomètre de M. Whewell, par M. John Rankine. — Sur la couleur de la vapeur et de l'atmosphère dans certaines circonstances, par M. J. D. Forbes. — Sur les formules de Fresnel pour l'intensité de la lumière réfléchie et réfractée, par M. P. Kelland. — Recherches sur les propriétés analogues des coordonnées des sécteurs elliptiques et hyperboliques, par M. W. Wallace. — Sur la diminution de la température avec la hauteur dans l'atmosphère suivant les différentes saisons de l'année, par M. J. Forbes. — Sur la théorie du flot, par M. P. Kelland. — Sur le calcul différentiel, par M. P. Kelland. — Solution d'une équation fonctionelle, avec application au parallélogramme des forces et aux courbes d'équilibration, par M. W. Wallace.

## Preisaufgaben.

### Preisaufgabe der Königlich Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1842.

Cum proprietas functionum transcendentium, quae continentur in hac formula $\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{R}}$, ubi $P$ est functio rationalis et $R$ functio integra ipsius $x$, tantum quatenus $n=2$, disquisitioni partim generali partim speciali subjectae fuerint, cupit societas praemio suo tractationem generalem universae hujus functionum classis provocare, theoremati de ipsarum summatione superstructam, et quidem ejus similem, quae jam in specie ea, ubi $n=2$, a cl. Jacobi (Diar. Crell. IX. p. 394) instituta est.

Allgemeine Bestimmungen wegen Ertheilung des Preises:

In quaestionibus tractandis sermone Latino, Gallico, Anglico, Germanico, Suecico, Danicove uti licebit. Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris sed tessera aliqua, adiiciendaque charta obsignata, eadem tessera notata, quae scriptoris nomen, ordinem, domiciliumque indicet. Qui societati adscripti sunt et in imperio Danico habitant, certamine abstinebunt. Qui in una ex propositis quaestionibus solvenda satisfecerit, ei, ubi aliud praemium nominatum non est, praemii loco tribuetur numus aureus societatis, 50 ducatos Danicos pretio aequans.

Commentationes intra exitum mensis Augusti 1842 Joanni Christiano Oersted, qui societati ab epistolis est, transmissae esse debebunt.

*) Ausgezogen aus L'Institut, Ire Section. No. 388. 3. Juin 1841. p. 192.

Digitized by Google

# IV.

# Literarischer Bericht.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Arithmetik und die gemeine Algebra, die Elementargeometrie, ebene Trigonometrie und die Apollonischen Kegelschnitte von Dr. Johann Andreas Matthias. Siebente Auflage, nach dem Tode des Verfassers revidirt und herausgegeben von J. Hennige, Prof.

Erstes Heft. Die Elemente der allgemeinen Arithmetik und gemeinen Algebra. Magdeburg. 1839.

Zweites Heft. Die Planimetrie. Magdeburg. 1840.

Ueber ein in der siebenten Auflage erscheinendes, in vielen Tausend Exemplaren verbreitetes Lehrbuch eines um die Belebung des mathematischen Schulunterrichts, so wie auch um das gesammte preussische Schulwesen überhaupt, insbesondere in der Provinz Sachsen, hochverdienten Verfassers, an welchen sich alle, die ihm nahe zu stehen das Glück hatten, jederzeit mit der grössten Freude, Dankbarkeit und Liebe erinnern, hier ein Urtheil fällen oder eine Relation liefern zu wollen, würde in jeder Beziehung unangemessen und unstatthaft sein. Vielmehr wird die kurze Anzeige, dass bis jetzt wenigstens von den beiden ersten Heften die siebente Auflage erschienen ist, genügen, um zu zeigen, dass dieses Lehrbuch immer noch fortfährt, zur Beförderung eines gründlichen mathematischen Unterrichts auf höhern Lehranstalten beizutragen. Dem Herrn Herausgeber gebührt aber das Zeugniss, dass er eifrig bemüht gewesen ist, das Werk, ohne dessen allgemeinen Charakter zu verwischen, dem Zwecke, welchen der verstorbene Verf. durch dasselbe zu erreichen beabsichtigte, immer näher zu führen und gemässer einzurichten. In dem

Jahrbuch des Pädagogiums des Klosters unser lieben Frauen in Magdeburg. Neue Fortsetzung. Viertes Heft. 1840.

hat der Herr Herausgeber eine vorläufige Probe seiner neuen Be-



Digitized by Google

arbeitung mitgetheilt, und in einem Vorworte eine Anzeige von derselben gegeben, zugleich auch in diesem Vorworte dem verstorbenen hochverdienten Verfasser ein schönes Denkmal gesetzt.

In der Hoffnung, dass auch die Stereometrie, die Trigonometrie und die Kegelschnitte bald in einer neuen Bearbeitung durch den Herrn Herausgeber erscheinen werden, wünschen wir, dass in diesem Lehrbuche das Andenken seines hochverdienten Verfassers noch lange fortleben und dasselbe immer kräftig dazu beitragen möge, dass dem mathematischen Unterrichte die lebhafteste Anerkennung der hohen Wichtigkeit für die allgemeine und allseitige Ausbildung des jugendlichen Geistes, welche demselben in jeder Beziehung so sehr gebührt, stets erhalten werde.

## Arithmetik.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für die obern Klassen der Gymnasien von C. Scherling, Lehrer der Mathem. und Naturw. am Catharineum in Lübeck. Lübeck. 1841. 8. 16 ggr.

Elemente der Arithmetik und Algebra in System, Commentar und Anwendungen als Lehr- und Uebungsbuch für die mittlern Klassen höherer Lehranstalten und zum Gebrauch für Hauslehrer und beim Selbstunterricht dargestellt von F. H. Müller, Prof. am Gymnasium zu Brandenburg a. H. Zweiter und letzter Theil. Potsdam. 1841. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Der erste Theil dieses sehr viel Gutes enthaltenden Buchs ist im Jahre 1839 in demselben Verlage erschienen. Preis 1 Thlr. 4 ggr.

Finck: Traité élémentaire d'Arithmétique. Strasbourg. 1841. 8. 3 Fr. 50 c.

Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Par Cournot. 2 vol. in 8. Paris. 1841. 10 Fr.

Auf der Universität zu Lund sind neuerlichst die folgenden mathematischen Dissertationen — sämmtlich analytischen Inhalts — erschienen:

Praecipuarum Functionum Trigonometricarum per Analysin Infinitorum Explicatio. Praes. Jon. Brag, Astron. Prof.; Respp. Lorenz Theodor Bager, Arvidus W. Brag et Magnus Fredericus Brag. P. I—III. Lundae. (24 S. 4.).

Regulae Derivandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. Joh. Gustafsson. Lundae. (8 S. 4.).

Regulae simpliciter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Respp. A. G. Tauson et C. F. Naumann. Lundae. (S. 9—24. 4.).

Digitized by Google

Regulae variabiliter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. J. A. Berghman. Lundae. (S. 25–34. 4.).

Regulae variabiliter et independenter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. J. Rodhe. Lundae. (S. 33—40. 4.).

Disquisitio Academica, Integrationem Aequationis cujusdam Differentialis exhibens. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. C. A. Ehrensvärd. Lundae. (16 S. 4.).

Introductio in Elementarem Functionum Ellipticarum Theoriam. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. P. E. Gulin. P. XIII. Lundae. (S. 97—104. 4.).

## Geometrie.

Geometrischer Kursus für die oberen Gymnasial-Klassen, enthaltend Planimetrie, Stereometrie, ebene und körperliche Trigonometrie, mit vielen Uebungsaufgaben. Von J. J. G. Hartmann, Oberlehrer am K. Andreanum zu Hildesheim. Hildesheim. 1841. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Ein gutes Buch, welches zugleich den Beweis von dem guten Zustande des mathematischen Unterrichts auf dem Gymnasium, an welchem der Verf. arbeitet, liefert. Die vielen Uebungsaufgaben, auf die auch schon der Titel hinweiset, sind jedenfalls eine sehr dankenswerthe und zweckmässige Zugabe.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie und Trigonometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten von J. E. H. Ludowieg, Artillerie-Capitain a. D., Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stade. Zweiter Theil, die Stereometrie und sphärische Trigonometrie enthaltend. Hannover. 1840. 8.

Der im Jahre 1839 in einer zweiten Auflage erschienene erste Theil dieses durch leicht übersichtliche, naturgemässe systematische Anordnung und eine sehr klare und gründliche nach einer gewissen Vollständigkeit und Ausführlichkeit strebende Darstellung sich vortheilhaft auszeichnenden Lehrbuchs enthält die ebene Geometrie und ebene Trigonometrie, und diese beiden Theile bilden nun mit dem im Jahre 1835 ebenfalls schon in einer zweiten Auflage erschienenen

Lehrbuche der Arithmetik und der Anfangsgründe der Algebra für Gymnasien und höhere Lehranstalten desselben Verfassers ein Ganzes. Wegen der schon oben gerühmten Ausführlichkeit und Vollständigkeit der Darstellung scheinen sich diese Lehrbücher vorzugsweise für den Selbstunterricht und



Digitized by Google

zum Gebrauche des Lehrers zu eignen, wozu sie wohl auch der Verf. selbst hauptsächlich bestimmt hat, da er schon früher als Leitfaden für die Schüler herausgegeben hat:

Erster Cursus der reinen Mathematik, enthaltend: die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra und der ebenen Geometrie. Zum Gebrauche als Leitfaden beim mathematischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, insbesondere für die mittleren Klassen der Gymnasien. Hannover. 1837. 8. 22 ggr.

Lässt der Verf. nun in ähnlicher Weise noch einen kurzen Leitfaden der Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie erscheinen, so wird er nach unserer Ueberzeugung für die Bedürfnisse der Schüler und Lehrer auf eine sehr zweckmässige Weise gesorgt haben. Die erschienenen neuen Auflagen des Lehrbuchs der Arithmetik und des ersten Theils des Lehrbuchs der Geometrie und Trigonometrie können wohl zu dem Schlusse berechtigen, dass diese Lehrbücher auf vielen Lehranstalten, vorzüglich in Hannover, gebraucht werden, und liefern daher zugleich den für uns wenigstens immer höchst erfreulichen Beweis von dem guten Zustande des mathematischen Unterrichts auf den hannöverschen Gymnasien und andern höhern Lehranstalten. Zur Herausgabe eines Lehrbuchs der Kegelschnitte wird sich der Verf. wahrscheinlich nur entschliessen, wenn auch diese Lehre einen Theil des mathematischen Unterrichts auf den hannöverschen Gymnasien ausmacht, worüber eine nähere Kenntniss uns abgeht. Das neuerlichst erschienene für das Andreanum zu Hildesheim bestimmte, vorher angezeigte Lehrbuch von Hartmann enthält aber auch bloss die von Herrn Ludowieg bearbeiteten geometrischen Theile, nämlich Planimetrie, Stereometrie, ebene und körperliche Trigonometrie.

Lehrbuch der Elementargeometrie. Zum Gebrauche für höhere Bürgerschulen und Realanstalten, so wie zum Selbststudium bearbeitet von F. Rummer. Erster Theil. Ebene Geometrie. Heidelberg. 1841. 8. 14 ggr.

Auch dieses Buch enthält in einem Anhange eine grössere Anzahl theils durch Construction, theils durch Rechnung zu lösender geometrischer Aufgaben.

Wöckel, Dr. L.: Formeln und Aufgaben zur Stereometrie für Gymnasien, Gewerbschulen und zum Selbstunterricht. Nürnberg. 1841. 12. 6 ggr.

Vernier: Géométrie élémentaire. 5me édition. Paris. 1841. 12. 2 Fr. 50 c.

Steiner, Dr. Maur.: de loco geometrico centri lineae rectae definitae cuiusdam longitudinis, cuius termini in peripheria lineae secundi ordinis moventur. Dissertatio. Vratislaviae. 1841. 4. 16 ggr.

Programm, wodurch zu der öffentlichen Prüfung der Schüler der Petrischule, welche Freitag den 2. October 1840 gehalten werden soll, ergebenst einladet F.

Digitized by Google

**Strehlke, Königl. Prof. und Director der Petrischule. Danzig, gedruckt in der Gerhard'schen Officin.**

Dieses sehr lesenswerthe Programm enthält als wissenschaftlichen Theil eine analytische Auflösung der schon von Apollonius im 5ten Buche seines Werks über die Kegelschnitte geometrisch behandelten Aufgabe: Aus einem in der Ebene eines Kegelschnitts gegebenen Punkte Normalen an den Kegelschnitt zu construiren, von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. Ausserdem theilt Herr Director Strehlke auf S. 12—16 unter der Ueberschrift: Pädagogische Mittheilungen eine Anzahl von Aufgaben, Lehrsätzen u. s. w. mit, die im Unterrichte wirklich vorgekommen sind, und sich in irgend einer Weise als anregend und fruchtbar bei der Bildung der Jugend gezeigt haben, und macht zu ähnlichen Mittheilungen in den folgenden Programmen sehr erfreuliche Hoffnung, eine nach unserer Ueberzeugung treffliche Einrichtung, die wir den Verfassern von Programmen an andern Lehranstalten dringend zur Nachahmung empfehlen möchten. Wir werden, wie wir dies schon diesmal oben mit den von Herrn Director Strehlke in dem Programme von 1840 mitgetheilten Aufgaben (für jetzt wenigstens zum Theil) gemacht haben, solche Mittheilungen immer gern im Archive wieder abdrucken lassen, um dieselben der Vergessenheit zu entreissen, welcher leider nur zu oft solche kleine meistens nicht in den Buchhandel kommende Schriften, wie Programme, Dissertationen, u. s. w. anheim fallen. Bemerken wollen wir bei dieser Gelegenheit endlich noch, dass in dem Programme der Petrischule zu Danzig vom Jahre 1839 Herr Director Strehlke die Beachtung der Lehrer der Mathematik sehr verdienende Bemerkungen über den Elementar-Unterricht in der Geometrie mitgetheilt hat.

De chordis linearum et superficierum secundi gradus. Dissertatio quam scripsit etc. C. G. H. Brandes, Phil. Doct. et AA. LL. M. Lipsiae. 1841. 4.

Der Verf. dieser guten Habilitationsschrift ist ein Sohn des trefflichen, den Wissenschaften, seinen Schülern und Freunden leider zu früh entrissenen H. W. Brandes. In dem ersten Kapitel wird der folgende für alle Kegelschnitte gültige Lehrsatz bewiesen:

Si per quamcunque sectionem conicum (generatam) chordae descriptae eaeque ad unum quodcunque punctum omnes directae sunt, earum chordarum centra in sectione conica (generante) jacent, quae per commune chordarum punctum (originem) et per centrum datae sectionis conicae transit, et cujus centrum inter modo memorata duo puncta medium locum tenet. Si generata ellipsis aut parabola est, generans linea similis et similiter posita est. Si generata hyperbola est, generans est: 1) hyperbola similis et similiter posita, si origo in eodem cum generata asymptotorum angulo jacet; 2) par linearum rectarum ad asymptotos parallelarum, si origo in asymptotis generatae usquam posita est; 3) hyperbola, cujus asymptoti ad generatae asymptotos parallelae sunt sed cujus diameter principalis cum diametro generatae rectos angulos facit (hyperbola conjugatae similis et similiter posita), si origo in eo asymptotorum angulo sumta est, qui generatam non continet.

In dem zweiten Kapitel wird hierauf dieser Lehrsatz zur Herleitung einiger Fundamentalsätze der Lehre von den Kegelschnit-

Digitized by Google

ten angewendet, bei welcher Gelegenheit im 25sten Paragraphen der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnitte bestimmt, auch eine neue Bestimmungsart des Mittelpunkts eines durch fünf gegebene Punkte zu legenden Kegelschnitts gelehrt wird. Das dritte Kapitel enthält endlich den Beweis eines dem obigen ganz analogen Satzes von den Flächen des zweiten Grades.

Die Methode, in welcher diese sehr lesenswerthe Dissertation geschrieben ist, kann man füglich mit dem Namen der trigonometrischen bezeichnen, und ist im Allgemeinen dieselbe, welche auch der Vater des Verfs. in seinen Schriften, z. B. in seinem bekannten Lehrbuche der höhern Geometrie in analytischer Darstellung. 2 Thle. Leipzig. 1822. 4., meistens angewandt hat.

## Praktische Geometrie.

Instruction für die praktische Aufnahme mit Messtisch und Kippregel. Kassel. 1840. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Die geometrische Detail-Aufnahme eines Landes oder Darstellung der dabei vorkommenden einzelnen Arbeiten von L. W. Klemm. Stuttgart. 1841. 8. 10 ggr. als drittes Heft zu:

Die Landes-Vermessung und die in ihrem Gefolge befindlichen Arbeiten, erläutert durch die im Königreich Würtemberg zur Ausführung gekommene Vermessung von L. W. Klemm. Drittes Heft. Geometrischer Theil.

Diese kleine Schrift enthält, ohne sich auf das Specielle viel einzulassen, eine zwar kurze, aber gute allgemeine Anleitung zur zweckmässigen Anordnung der bei der geometrischen Detail-Aufnahme eines Landes vorkommenden Arbeiten, wie aus der folgenden Inhaltsanzeige noch mehr erhellen wird: 1) das Mess-System im Allgemeinen. 2) Der Organismus bei den Vermessungs Arbeiten. 3) Das Messtischblatt. 4) Die Mess-Instrumente. 5) Die Punktenbestimmung. 6) Die Parzellar-Vermessung. 7) Das Messungs-Manual. 8) Die Ausführung des Kartenblatts. 9) Die Flächenberechnung. 10) Die Revision. 11) Die Vervielfältigung der Messtischblätter durch die Lithographie. 12) Die geometrische Vertheilung der Grundstücke. 13) Die Bergzeichnung. 14) Zusätze. Anhang. Flächenberechnungs- (Aufnahms-) Register. Wir empfehlen dieselbe daher allen denen, welche mit der Leitung und Ausführung geometrischer Detail-Aufnahmen beauftragt sind, zur Beachtung.

Ducourneau: Traité pratique du mesurage des surfaces cylindriques et des cubes en général. Paris. 1841. 8. $2\frac{1}{4}$ Thlr.

Digitized by Google

## Trigonometrie.

Dr. Joh. Müller: Elemente der sphärischen Trigonometrie für Schulen bearbeitet. Darmstadt. 1841. gr. 12. ¼ Thlr.

Lentheric: Trigonométrie et Géometrie analytique. Paris. 8. 6 Fr. 50 c.

## Mechanik.

E. H. A. Kayser (Prof. an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe): Handbuch der Mechanik, mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höhern Analysis bearbeitet. Carlsruhe. 1840. 8. 4 Thlr.

Eine ausführlichere Anzeige in einem der nächsten Hefte.

## Praktische Mechanik.

Pambour, Graf P. M. G. de: Theoretisch praktisches Handbuch über Dampfwagen, enthaltend die Construction der Locomotiven und ihre Anwendung zur Fortschaffung der Lasten, die Berechnungsart der Geschwindigkeiten, mit welchen sie bestimmte Ladungen fortbewegen, und der Vortheile, welche sie unter allen Umständen gewähren können, die Angabe der Bedingungen, welche bei ihrer Construction zur Erlangung bestimmter Effecte erfüllt werden müssen, Untersuchungen, welche sich auf eine grosse Anzahl in England angestellter Versuche stützen u. s. w. Nach der 2ten Originalauflage deutsch bearbeitet von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1841. 8. 2 Thlr. 8 ggr.

Mougel et Mouchelet: Mécanique des travaux publics, ou Application de la vapeur et des machines les plus modernes. Livr. 1 et 2. Paris. 1841. Folio.

Manuels-Roret. Nouveau manuel complet de constructeur des machines locomotives; par Julien. Paris. 1841. 18. 2 Thlr.

Fourneyron: Mémoire sur les turbines hydrauliques et sur leur application en grand dans les usines et manufactures. Liège. 1841. 8. 1 Thlr. 10 ggr.

Digitized by Google

## Astronomie.

Jahrbuch für 1841. Herausgegeben von H. C. Schumacher mit Beiträgen von Dove, Kämtz, Lehmann, Mädler, Olbers und Quetelet. Stuttgart und Tübingen. 1841. 8. 2 Thlr.

Enthält folgende Aufsätze:

Noch etwas über den veränderlichen Stern $\chi$ Bayeri im Schwan. Nebst einigen Beobachtungen über Variabilis Hydrae von Olbers. Im Jahre 1818 geschrieben.

Ueber die Temperaturveränderungen der Erde in der Nähe ihrer Oberfläche von A. Quetelet.

Bemerkungen bei Gelegenheit der Abhandlung von Quetelet: Ueber den Menschen und die Gesetze seiner Entwickelung, von Dr. F. W. H. Lehmann.

Ueber den Zusammenhang zwischen Temperatur, Luftdruck und Windrichtung, von L. F. Kämtz.

Ueber die Mondgebirge von J. H. Mädler.

Nordamerika und Europa meteorologisch mit einander verglichen von H. W. Dove.

Der übrige Inhalt und die sonstige Einrichtung dieses trefflichen Jahrbuchs, dem wir ungestörten Fortgang wünschen, können als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden. Ausser den Gaussischen Tafeln zur Bestimmung der Höhenunterschiede sind auch die Bessel'schen mitgetheilt, bei denen auch der in der Luft enthaltene Wasserdampf berücksichtigt ist, und vorausgesetzt wird, dass an beiden Stationen ausser dem Barometer und Thermometer auch das Psychrometer beobachtet worden sei.

Auf der Universität zu Lund ist neuerlichst folgende astronomische Dissertation erschienen:

De motu systematis solaris progressivo Disputatio astronomica. Praes. J. M. Agardh, Arithm. Doc.; Respp. B. G. Borg et N. L. Andersson. I. H. Lundae. (33 S. 8.).

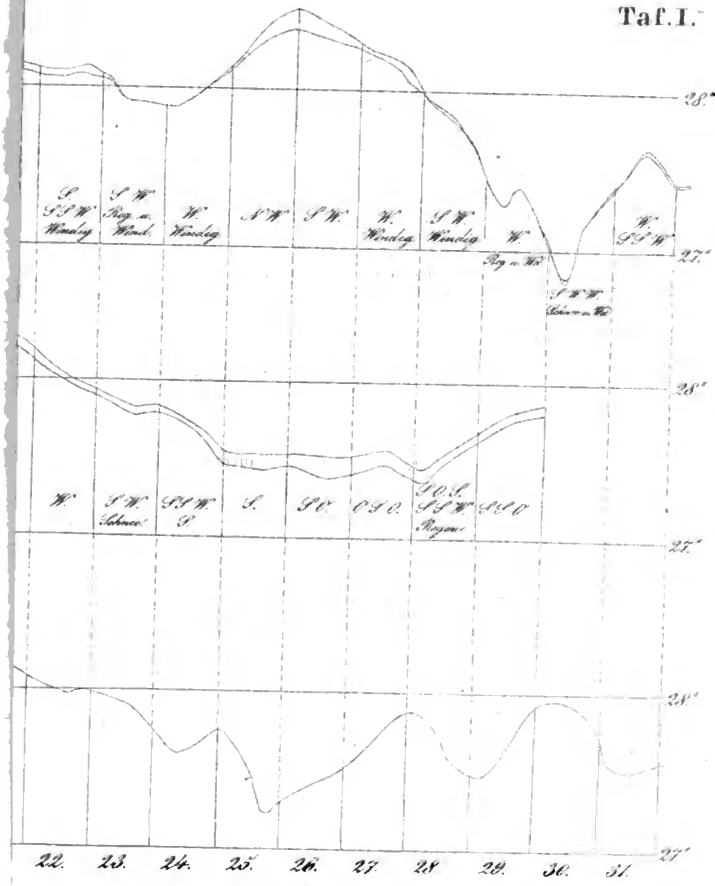
## Physik.

Bergery: Physique et Chimie des écoles primaires. 3me édition. Paris. 1841. 12. 2 Fr. 50 c.

Pouillet: Elémens de Physique expérimentale. 2me Partie et Atlas. Brux. 1841. 8. complet 6 Thlr.

Digitized by Google

Taf. I.




Digitized by Google

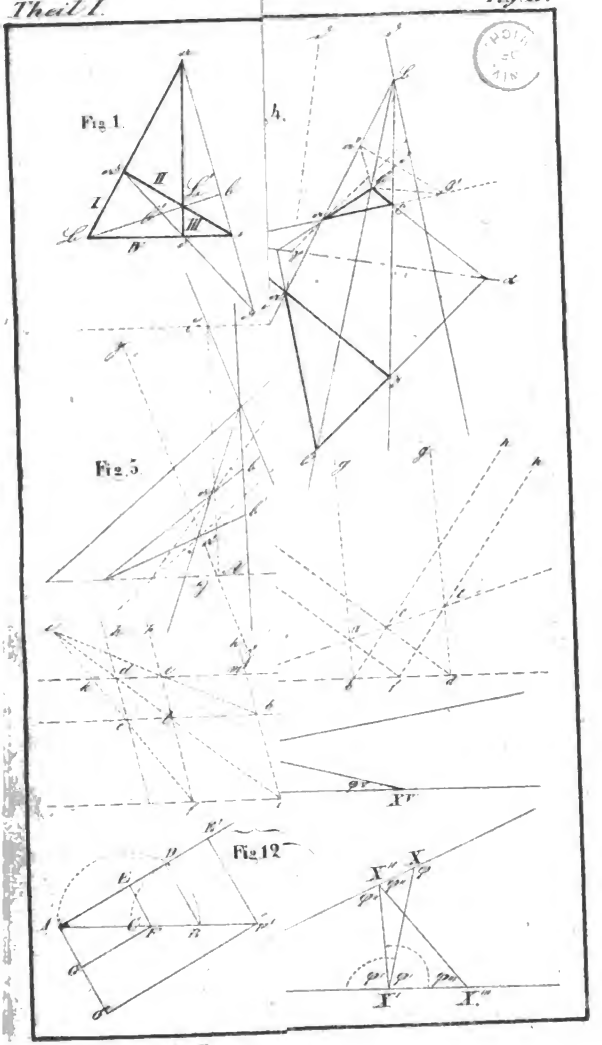
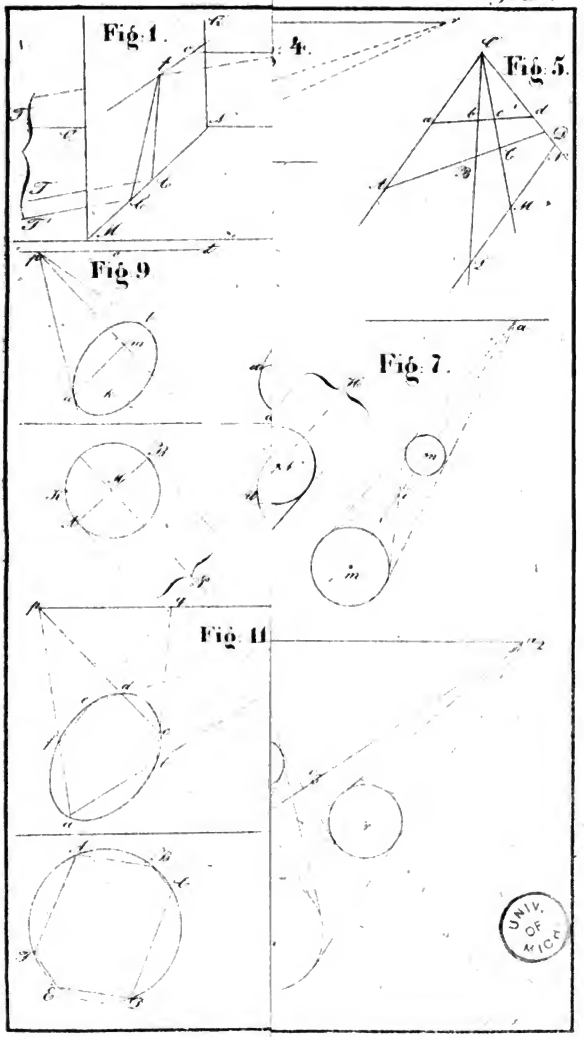


Fig. 1.
h.
Fig. 5.
Fig. 12.

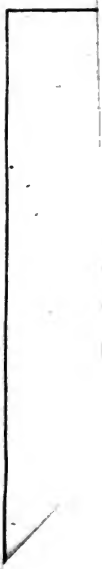



UNIV. OF MICH.

Grunert. Archiv I

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Professor zu Greifswald.

Zweiter Theil.

---

Mit fünf lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

---

**Greifswald.**

Verlag von C. A. Koch.

**1842.**

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichniss des zweiten Theils.

## Arithmetik.


| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| I. | De potestatum periodis, radicibusque primitivis residuisque quadraticis. Auctore C. F. Arndt, math. stud. in Universitate litteraria Gryphisvaldensi. | I. | 1 |
| II. | Ueber Cauchy's Interpolationsmethode. Von dem Herausgeber. | I. | 41 |
| V. | Ueber einen Lehrsatz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Königsberg in der Neumark. | I. | 65 |
| VI. | Vom Kapitalisiren der Zinsen im Laufe des Jahres. Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin. | I. | 68 |
| VII. | Ueber die Theorie der Elimination. Erste Abhandlung. Von dem Herausgeber. | I. | 76 |
| IX. | Ueber die graphische Darstellung der Functionen. Von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. | I. | 111 |
| IX. | Veranschaulichende Darstellung der Primzahlen. Von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. | I. | 112 |
| XII. | Von der numerischen Auflösung der Gleichung $A=(1+x)^m\ (1+bx)$, wenn $x$ ein kleiner Bruch ist. Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin. | II. | 122 |
| XIX. | Zwei allgemeine Summationsformeln für die dritte Potenz der Glieder der Reihen, deren $n$tes Glied $=\pm[1+(n-1).2^x]$ ist. Ein Nachtrag zu Nr. XLI. in Th. I. Heft 3. Von dem Herrn Doctor Hellerung zu Wismar. | II. | 198 |
| XXII. | Ueber die Formeln der zusammengesetzten Zinsrechnung. Von Herrn C. Scherling, Lehrer am Catharineum zu Lübeck. | II. | 213 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XXII. | Ueber die Aufgabe: Wenn die Summe $a$ von $\mu$ Gliedern einer geometrischen Reihe und die Summe $b$ der $r$ten Potenzen dieser Glieder gegeben ist: die Reihe zu bestimmen, d. h. ihr erstes Glied und ihren Exponenten zu finden. Von dem Herausgeber. | II. | 220 |
| XXV. | Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale. Erste Abhandlung. Von dem Herausgeber. | III. | 266 |
| XXVIII. | Bemerkung über den Vortrag der Lehre von der Elimination bei'm mathematischen Elementarunterrichte. Von dem Herausgeber. | III. | 337 |
| XXX. | Ueber die Theorie der Elimination. Zweite Abhandlung. Von dem Herausgeber. | IV. | 345 |
| XXXIX. | Einige Eigenschaften der binomischen Koefficienten. Von Herrn O. Schlömilch zu Wien. | IV. | 434 |
| XLII. | Neue Auflösung des irreduciblen Falls bei den cubischen Gleichungen durch die Kettenbrüche. Von Herrn Thomas Clausen zu Altona. Mitgetheilt von dem Herausgeber. | IV. | 446 |


## Geometrie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| III. | Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ auf einfache Weise entwickelt aus der Grundeigenschaft $v + v' = 2a$. Von Herrn Director Dr. Fr. Heinen zu Düsseldorf. | I. | 61 |
| IV. | Ueber eine Beziehung, welche zwischen vier Punkten, die in einer Ebene liegen, Statt findet. Von Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Königsberg in der Neumark. | I. | 63 |
| VIII. | Ueber die Summen der Winkel in ebenen geradlinigen Vielecken. Von dem Herrn Director J. H. T. Müller zu Gotha. | I. | 106 |
| IX. | Cubatur des Ellipsoids, Hyperboloids mit zwei gleichen Axen. Von Herrn Director Strehlke zu Danzig. | I. | 109 |
| IX. | Ueber den Radius des durch drei Punkte eines Kegelschnitts gelegten Kreises. Von Demselben. | I. | 110 |
| IX. | Ueber die Ellipse als orthographische Projection des Kreises. Von Demselben. | I. | 111 |
| X. | Lehrsatz die Ecken der Pyramiden betreffend. Von dem Herrn Director J. H. T. Müller zu Gotha. | II. | 113 |
| XI. | Combinatorische Lösung der Euler-Pfaffschen Aufgabe in Nr. XXVII. des ersten Theils. Von dem Herrn Professor Dr. Tellkampf zu Hannover. | II. | 117 |
| XIII. | Ueber die Loxodromen auf dem gemeinen Cylin- | | |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | der und Kegel. Von dem Herrn Gymnasiallehrer Dr. Grebe zu Cassel. | II. | 127 |
| XVI. | Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degré et Note relative à la construction de la chaînette. Par Mr. G. J. Verdam, Docteur ès sciences et Professeur de Mathématiques à l'Université de Leide. | II. | 188 |
| XVII. | Ueber die Auflösung der Delischen Aufgabe. Von Herrn Thomas Clausen zu Altona. | II. | 196 |
| XVIII. | Aufzulösende geometrische Aufgabe. Von Herrn Thomas Clausen zu Altona. | II. | 197 |
| XXII. | Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, durch Algebra lösbar. Von Herrn C. Scherling, Lehrer der Mathem. u. Naturw. am Catharineum zu Lübeck. | II. | 215 |
| XXIV. | Beweis eines geometrischen Satzes. Von Herrn Thomas Clausen zu Altona. | III. | 262 |
| XXVI. | Zwei neue Sätze vom ebenen und sphärischen Viereck und Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes. Von dem Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. | III. | 323 |
| XXIX. | Ueber die Behandlungsarten geometrischer Elementar-Aufgaben. Von dem Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt. | IV. | 341 |
| XXXII. | Aufgaben über das Maximum und Minimum. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau. | IV. | 400 |
| XXXIV. | Ueber eine geometrische Aufgabe. Von dem Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt. | IV. | 417 |
| XXXV. | Aufgabe aus der analytischen Geometrie. Von Herrn C. Scherling, Lehrer der Mathem. und Naturw. am Catharineum zu Lübeck. | IV. | 419 |
| XLI. | Mathematische Bemerkungen. Von Herrn J. Flesch, Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Realschule zu Düsseldorf. | IV. | 444 |


## Trigonometrie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| IX. | Ueber die Auflösung der sechs Hauptfälle der sphärischen Trigonometrie durch geometrische Construction in der Ebene. Von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. | I. | 111 |
| XIV. | Trigonometrische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln zweier beliebiger ebener oder sphärischer Dreiecke. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. | II. | 132 |
| XXII. | Kurze und einfache Ableitung der ganzen ebenen | | |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | Trigonometrie aus den beiden Eigenschaften des ebenen Dreiecks, dass die Summe der drei Winkel 180° beträgt, und dass sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten. Von dem Herausgeber. . . . . | II. | 215 |
| XXIII. | Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Vierecks. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. . . . . | III. | 225 |
| XXVIII. | Ueber den unbestimmten Fall der ebenen Trigonometrie. Von dem Herausgeber. . . . . | III. | 333 |


## Geodäsie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| IV. | Trigonometrische Auflösung der in Bd. I. Heft 2. S. 219 behandelten Aufgabe. Von dem Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Königsberg in der Neumark. . . . . | I. | 62 |
| XXXVIII. | Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. . . . . | IV. | 431 |
| XXXVIII. | Ueber das Pothenot'sche Problem. Von Demselben. . . . . | IV. | 433 |


## Mechanik.


| | | | |
|---|---|---|---|
| IX. | Wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse bewegt, während der anziehende Punkt in einem Brennpunkte derselben steht, so ist die anziehende Kraft dem Quadrate der umgekehrten Entfernung des anziehenden von dem angezogenen Punkte proportional. Von dem Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. . . . . | I. | 110 |
| XXI. | Die Oscillationsgeschwindigkeit $v$ eines geradlinig bewegten Aethertheilchens und sein Abstand vom Ruhepunkte lässt sich unter der Voraussetzung, dass die auf das Theilchen wirkende Kraft der Elasticität der Entfernung vom Ruhepunkte proportional sei, durch einfache Hülfsmittel finden. Von Demselben. . . . . | II. | 207 |


## Optik.


| | | | |
|---|---|---|---|
| IX. | Einfache Bestimmung des Brechungsverhältnisses in einem dreiseitigen Prisma durch den Neigungswinkel $\psi$ zweier Seiten-Ebenen des Prismas und durch die Winkel, welche der einfallende und der austretende Strahl an jeder Seite mit dem | | |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | Einfallslothe bilden. Von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. . . . . | I. | 112 |
| XV. | Ueber die Grundformeln der Dioptrik und Katoptrik. Von dem Herausgeber. . . . . | II. | 145 |


## Astronomie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| XXVIII. | Ueber die Berechnung der Länge und Breite eines Gestirnes aus seiner geraden Aufsteigung und Abweichung, und umgekehrt. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. . . . . | III. | 339 |


## Physik.


| | | | |
|---|---|---|---|
| II. | Ueber Cauchy's Interpolationsmethode. Von dem Herausgeber. . . . . | I. | 41 |
| XXII. | Nouvelle batterie galvanique. Mitgetheilt von dem Herausgeber. . . . . | II. | 219 |
| XXXI. | Ueber Jacob Bernoulli's Methode, die Höhe der Wolken zu bestimmen. Von dem Herausgeber. | IV. | 377 |
| XL. | Berechnung des Wheatstone'schen Versuches zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des electrischen Lichtes. Von Herrn J. Flesch, Lehrer der Mathem. und der Naturwissensch. an der Realschule zu Düsseldorf. . . . . | IV. | 439 |
| | (M. s. auch Mechanik und Optik.) | | |


## Geschichte der Mathematik und Physik.


| | | | |
|---|---|---|---|
| XX. | Historische Bemerkungen über das Princip der Differentialrechnung. Von dem Herrn Doctor Gerhardt, Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel. . | II. | 200 |
| XXII. | Ueber Willebrord Snellius als wahren Erfinder der sonst gewöhnlich nach Pothenot benannten geodätischen Aufgabe. Von dem Herrn Professor Dr. Verdam zu Leiden. . . . . | II. | 210 |
| XXII. | Ueber das zur Beförderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts bei der Universität zu Marburg errichtete neue Institut. Von dem Herrn Professor Dr. Gerling zu Marburg. . . . . | II. | 212 |
| XXXVI. | Fibonacci, der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über die Algebra. Von dem Herrn Doctor Gerhardt, Lehrer am Gymnas. zu Salzwedel. | IV. | 423 |
| XXXVII. | Ueber den Ursprung und die Verbreitung unseres gegenwärtigen Zahlensystemes. Von Demselben. | IV. | 427 |


Digitized by Google

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | **Uebungsaufgaben für Schüler.** | | |
| IX. | Von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. | I. | 109 |
| XXI. | Von Demselben. | II. | 207 |
| XXI. | Von dem Herausgeber. | II. | 208 |
| XXI. | Von dem Herrn Professor Dr. Oettinger zu Freiburg i. B. | II. | 208 |
| XXI. | Von dem Herrn Professor Dr. Verdam zu Leiden. | II. | 209 |
| XXII. | Von Herrn C. Scherling, Lehrer am Catharineum zu Lübeck. | II. | 215 |
| XXVII. | Von Herrn Professor Dr. Kunze zu Weimar. | III. | 326 |
| XXVII. | Von Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha. | III. | 330 |
| XXXIII. | Prüfungs-Aufgaben, die in Cambridge den Candidaten des Baccalaureates gegeben worden sind. Aus dem Englischen übersetzt und mit Bemerkungen begleitet von dem Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt. | IV. | 411 |
| | **Literarische Berichte *).** | | |
| V. | | I. | 71 |
| VI. | | II. | 89 |
| VII. | | III. | 103 |
| VIII. | | IV. | 117 |


*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

# I.

# De potestatum periodis, radicibus primitivis residuisque quadraticis.

Auctore

C. F. Arndt

math. stud. in Universitate litteraria Gryphiswaldensi.

Quoniam in disquirendis rebus, quae ad numerorum spectant doctrinam, occupatus forte detexi, de residuis quadraticis theoremata simillima iis exstare, quae de potestatum periodis radicibusque primitivis per virum clariss. Gauss in lucem prodierunt, ut videre licet in ejus Disquis. Arithm. pag. 73 sqq., finem in sequentibus mihi proposui, ut arctissimum horum theorematum vinculum, quatenus fieri possit patefaciam. Quaerenti mihi in hac arena etiam nota se obtulit, ex qua facillime dijudicari possit, utrum in congruentia

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1) \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, p)$$

designante $p$ numerum primum formae $4n+3$, signo superiore utendum sit an inferiore. Quodsi vituperes, quod praeter nova etiam satis nota receperim, tamen novis adhibitis plerumque demonstrandi methodis studioque rem ita instituendi ut latius pateant theoremata, excusatum me esse velim. Sed longiores sumus quam necesse est et ne verbis solum attingamus ea quae volumus ostendere, ad rem ipsam veniamus. Initium autem faciendum erit cum propositione jam ab Euclide inventa et in doctrina numerorum haud dubie memoratu dignissima.

## A. De numeris primis in universum agitur.

**§. 1. Numerus quicunque primus qui neque unum neque alterum duorum numerorum metitur etiam productum horum non metietur.**

Demonstratio. Ut demonstrandi methodus latius pateat, assumamus utrumque numerum datum numero dato primo esse majorem, et designemus numeros datos per $a$, $b$, numerum primum per $p$. Residua illorum ex divisione per $p$ relicta sint $\alpha$, $\beta$, ita ut eos hoc modo liceat exhiberi $a = mp + \alpha$, $b = np + \beta$, ubi uterque $\alpha$, $\beta$ minor quam $p$ atque $m$, $n$ sunt integri. Productum igitur $ab$ for-



Digitized by Google

mam habebit $kp + \alpha\beta$, quam ob rem si $ab$ per $p$ divisibile esset, etiam productum $\alpha\beta$ per $p$ divisibile esse oporteret. Itaque res eo reducta est, ut demonstretur, numerum primum $p$ productum aliquod $\alpha\beta$ metiri non posse, cujus factores ambo sunt minores quam $p$. Hoc vero ita probamus.

1. Si duplum ipsius $\beta$ vel $2\beta$ per $p$ divisibile esset, numerum integrum $\frac{2\beta}{p}$ unitati aequivalere oporteret, quoniam $\beta < p$, $2\beta < 2p$, $\frac{2\beta}{p} < 2$. Neque vero aequatio $2\beta = p$ locum habere potest, quia tum numerus primus impar $p$ per 2 divisibilis esset.

2. Etiam triplum ipsius $\beta$ vel $3\beta$ primus $p$ non metietur. Nam si fieri posset, numerum integrum $\frac{3\beta}{p}$ aut 1 esse oporteret aut 2, quoniam $3\beta < 3p$, atque $\frac{3\beta}{p} < 3$. Si vero haberetur aequatio $\frac{3\beta}{p} = 1$ vel $3\beta = p$, ipse $p$ per 3 divisibilis esset, quod fieri nequit, quia $p$ non est 3 ex suppositione. Si denique esset $\frac{3\beta}{p} = 2$ vel $3\beta = 2p$, ipse $2p$ per 3 dividi posset, quod primo casui repugnat.

3. Quia $p$ productum $2\beta$ non metitur secundum 1. etiam ex eadem causa $2 \cdot 2\beta$ vel $4\beta$ metiri nequit.

4. Quando $5\beta$ per $p$ divisibile esset, una harum aequationum locum habere deberet $\frac{5\beta}{p} = 1$, $\frac{5\beta}{p} = 2$, $\frac{5\beta}{p} = 3$, $\frac{5\beta}{p} = 4$, quoniam $5\beta < 5p$. In priori casu esset $5\beta = p$ atque $p$ per 5 divisibilis; atqui $p$ non est 5, nam valores ipsius $\alpha$ semper sunt minores quam $p$; in secundo casu haberetur $5\beta = 2p$ atque $\frac{2p}{5}$ integer contra 1., in tertio casu $5\beta = 3p$ atque $\frac{3p}{5}$ integer contra 2., in quarto denique casu $5\beta = 4p$ atque $\frac{4p}{5}$ integer contra 3., ergo $p$ productum $5\beta$ metiri nequit.

5. Quomodo ulterius progredi possimus satis intelligitur, sed ut theorema in genere demonstretur, assumamus verum id esse pro omnibus ipsius $\alpha$ valoribus inde ab 2 usque ad primum quemcunque ipso $p$ minorem, ita tamen, ut inter hunc et $p$ alius etiam numerus primus $p'$ exstet. Priorem designemus per $p''$.

Jam dico pro omnibus factoris $\alpha$ valoribus inter $p''$ et $p'$ theorema nostrum valere nec minus pro ipso $p'$ quem numero primo $p''$ proxime majorem esse accipiamus. Nam si quicunque numerus compositus inter primos $p''$ et $p'$ in factores primos hoc modo resolvitur $A^a B^b C^c \ldots$ patet ipsos $A$, $B$, $C \ldots$ minores esse quam $p'$. Jam vero ex suppositione theorema valet pro $A \cdot \beta$, ergo pro $A \cdot A\beta = A^2\beta$, hinc pro $A \cdot A^2\beta = A^3\beta$, universim pro $A^a\beta$. Quo facto propositio valebit pro $A^a\beta \cdot B = A^a B \cdot \beta$, hinc pro $A^a B \cdot \beta \cdot B = A^a B^2\beta$, universim pro $A^a B^b\beta$. Hoc modo progredi licet facillimeque perspicitur revera productum $A^a B^b C^c \ldots$ per $p$ non divisibile esse. Nunc denique etiam $p'\beta$ per $p$ non divisibile erit. Nam si fieri posset, numerus integer $\frac{p'\beta}{p}$ unus ex his esse deberet 1, 2, 3, $\ldots p' - 1$, quoniam $\beta < p$, $p'\beta < p'p$, $\frac{p'\beta}{p} < p'$. Erit igitur $p'\beta$ aut $p$, aut $2p$,

Digitized by Google

aut $3p$, .... aut $(p'-1)p$. In priori casu $\frac{p}{p'}$ esset numerus integer q. e. a. quia $p$ non est $p'$ atque $p$ primus. In secundo casu haberetur numerus integer $\frac{2p}{p'}$ contra l. vel supp., in tertio, quarto, quinto, etc. casu numeri $\frac{3p}{p'}$, $\frac{4p}{p'}$, $\frac{5p}{p'}$, ... $\frac{(p'-1)p}{p'}$ essent integri contra ea, quae statuimus. Hinc sequitur si theorema valeat usque ad productum $p''\beta$ etiam pro producto N . $\beta$ verum esse designante $N$ numer. quencunque inter $p''$ et $p'$ nec minus pro $p'\beta$ ita ut inter $p''$ et $p'$ numerus non exstet primus.

Jam vero propositionem demonstravimus pro productis $2\beta$, $3\beta$, $4\beta$, $5\beta$; ergo (5) valebit pro $6\beta$ et $7\beta$, hinc pro $8\beta$, $9\beta$, $10\beta$ et $11\beta$, hinc pro $12\beta$ et $13\beta$, ex quo sequitur veram eam esse pro producto $\alpha\beta$.

Aliam et quidem simplicissimam demonstrationem videre licet in Disq. Arithmet.

§. 2. Duorum numerorum productum, quorum uterque ad numerum quencunque $p$ est primus, ipse hic non metitur.

Resolvatur $p$ in factores duos $p'$ et $q$ quorum unus $p'$ sit numerus primus ita ut habeatur $p = p'q$. Quodsi productum numerorum datorum quos $a$, $b$ vocemus, per $p$ divisibile esset, etiam per $p'$ manifesto dividi posset. Ipse $p'$ autem nullum horum $a$, $b$ metietur, nam si ex. gr. $a$ esset multiplum hujus primi $p'$, ipse $p'$ quum $a$ tum $p$ metiretur, quo facto $a$ et $p$ divisorem communem haberent contra hyp. Ergo primus $p'$ neque $a$ neque $b$ metietur neque igitur productum (§. 1.), quam ob rem $ab$ per $p$ non erit divisibile.

Coroll. 1. Si quisque numerorum $a$, $b$, $c$, $d$ ... ad num. quencunque $p$ est primus, hic ipse productum $abcd$.. non metietur. Nam propositio valet pro $ab$, hinc pro $abc$, hinc pro $abcd$... ergo universim.

Coroll. 2. Etiam potestas aliqua puta $a^k$ cujus exponens numerus integer positivus, per numerum quencunque $p$ ad $a$ primum divisibilis esse nequit.

§. 3. Quando $p$ ad $a$, $b$, $c$, ... est primus productumque $abc$... $Z$ per $p$ divisibile est, $Z$ per $p$ divisibilem esse oportet.

Resolvatur $p$ in factores primos aequales inter se vel diversos hoc modo $p'$, $p''$, $p'''$, $p^{IV}$, quorum multitudo ex. gr. sit 4. Quia $abc$ .. $Z$ per $p$, ergo per $p'$ divisibilis est $p'$ hujus producti factorem $Z$ metiri debet (§. 1.); si enim $Z$ non metiretur etiam $abc$.. $Z$ metiri non posset. Qua re poni licet $Z = p'Z'$ eritque $\frac{abc\,..\,Z}{p}$ $= \frac{abc\,..\,Z'}{p''p'''p^{IV}}$ numerus integer. Sequitur productum $abc$ .. $Z'$ per $p''$ divisibile esse, ergo etiam $Z'$ (§. 1.) ita ut poni liceat $Z' = p''Z''$, eritque $\frac{abc\,..\,Z}{p} = \frac{abc\,..\,Z''}{p'''p^{IV}}$ numerus integer. Quia igitur $abc$.. $Z''$ ipse num. $p'''p^{IV}$ metitur, etiam $p'''$ hoc productum metietur, quam ob rem poni licet $Z'' = p'''Z'''$ eritque $\frac{abc\,..\,Z}{p} = \frac{abc\,..\,Z'''}{p^{IV}}$ numerus integer. Ponamus denique, quia $Z'''$ per $p^{IV}$ dividi potest, $Z''' = p^{IV}Z^{IV}$ habebimusque per substitutionem $Z = p'Z' = p'p''Z''$



Digitized by Google

$= p'p''p'''Z''' = p'p''p'''p^{IV}Z^{IV} = pZ^{IV}$, ergo revera Z per $p$ divisibilis est.

§. 4. Duo numeri secundum tertium, quem semper positivum esse oportebit, congrui dicuntur aut incongrui prouti hic illorum differentiam metitur aut non metitur. Quorum numerorum, quem tertium diximus, utriusque modulum et quidem alterum alterius residuum aut non-residuum vocemus. Congruentia signum hoc adoptatum est ($\equiv$), ita ut si num. $a$ num. $b$ sec. modulum $m$ congruus est, ita scribendum sit $a \equiv b$ (mod. $m$). Si igitur uterque $a$, $b$ minor est modulo $m$, hi numeri secundum $m$ congrui esse nequeunt, nisi $a = b$. Si vero $a > m$, $b < m$ ipse $b$ erit residuum ex divisione numeri $a$ per $m$ relictum. Nam quum $a - b$ per $m$ divisibilis sit ponendum erit $a - b = k \cdot m$, vel $a = k \cdot m + b$, ex quo sequitur $b$ esse residuum ipsius $a$ per $m$ divisi. Si denique $b$ num. $a$ sec. $m$ est congruus, ipsum $b$ residuo ex divisione numeri $a$ per $m$ relicto congruum esse oportebit. Quibus notionibus stabilitis patebit, cuivis numero $a$ in hac serie

$$0, 1, 2, 3, \ldots m-1$$

residuum respondere secundum modulum $m$ et quidem unum tantummodo nempe id residuo aequivalebit ex divisione numeri $a$ per $m$ relicti.

Haec residua modulo minora alicui numero congrua hujus residua minima sec. mod. prop. vocantur.

§. 5. Inter theoremata quae statim sub aspectum cadunt, haec sunt referenda.

1. Si bini numeri sec. mod. quencunque sunt congrui etiam summa priorum summae posteriorum sec. eundem mod. erit congrua.

2. Quando quisque duorum numerorum aliorum duorum cuique congruus est, etiam priorum differentia posteriorum congrua erit differentiae.

3. Productum numerorum quotcunque, quorum quisque aliorum cuique numerorum congruus est, horum ipsorum producto erit congruum.

Sit enim $a \equiv b$ (mod. $m$), $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$ etc. eritque probanda congruentia $aa'a''$ etc. $\equiv bb'b''$ etc. (mod. $m$). Quoniam differentiae $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$, etc. per $m$ divisibiles sunt (§. 4.) statuendum erit

$$a - b = km,\ a' - b' = k'm,\ a'' - b'' = k''m, \text{ etc.}$$

vel

$$a = km + b,\ a' = k'm + b',\ a'' = k''m + b'', \text{etc.}$$

ubi $k$, $k'$, $k''$ etc. sunt integri Zero non excluso.

Productum $aa'a''$ etc. formae esse $Km + bb'b''$ etc. facile perspicitur, qua re differentia $aa'a'' - bb'b''$ etc. formae erit $Km$, atque per $m$ divisibilis i. e. $aa'a'' \ldots \equiv bb'b'' \ldots$ (mod. $m$).

4. Quando congruentiae

$$a \equiv b,\ c \equiv d \text{ (mod. } m)$$

locum habent atque $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ sunt integri productumque $cd$

Digitized by Google

ad $m$ est primum etiam haec locum habebit congruentia

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \text{ (mod. } m\text{)}.$$

Ex 3. sequitur $ad \equiv bc$, quo facto differentia $ad - bc$ tanquam per $m$ divisibilis forma exhibetur $km$; tum erit $\frac{ad-bc}{cd} = \frac{km}{cd}$ vel $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{km}{cd}$.

Jam vero $cd$ ad $m$ est primus, ergo (§. 3.) $k$ per $cd$ erit divisibilis atque $\frac{k}{cd}$ integer, quam ob rem $\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$ multiplum erit ipsius $m$ i. e. $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d}$ (mod. $m$).

§. 6. Numerus indeterminatus $x$ ita semper potest determinari ut expressio $ax + b$ secundum modulum $m$ ad $a$ primum cuivis numero fiat congrua vel quod idem valet congruentia $ax + b \equiv c$ (mod. $m$) semper poterit resolvi, si quidem $m$ ad $a$ est primus.

Consideremus producta haec

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \ldots .\ (m-1)a.$$

Quum $a$ ad $m$ sit primus nullum horum productorum per $m$ erit divisibile; nam si quodcunque illorum $ka$ ($k < m$) ipse $m$ metiretur etiam $k$ per $m$ divisibilis esset, quod fieri nequit (§. 3.). Et quidem omnia producta sunt sec. $m$ incongrua. Si enim duo quaelibet per $ka$, $k'a$ designamus ita ut $k < m$, $k' < m$, differentiam $ka - k'a = (k - k')a$ ipsum $m$ metiri oporteret, ergo $(k - k')$ (§. 3.) quod fieri nequit. Horum igitur productorum residua minima ex divisione eorum per $m$ relicta erunt ordine neglecto haec

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ m-1.$$

Jam vero differentiae $c - b$ residuum minimum positivum inter illa residua oportet inveniri, quam ob rem $c - b$ alicui productorum, de quibus agitur, congrua erit. Sit hoc productum $ka$ eritque

$$ka \equiv c - b \text{ vel } ka + b \equiv c \text{ (mod. } m\text{)}.$$

Coroll. Quando $a$ et $m$ divisorem comm. habent maximum $\delta$ congruentiae $ax + b \equiv c$ (mod. $m$) satisfieri nequit nisi $c - b$ per $\delta$ est divisibilis. Nam quum congruentiam hanc pro modulo $\delta$ non minus quam pro modulo $m$ oporteat locum habere, numerus $c - b$ per $\delta$ erit divisibilis. Ceterum si resolvi potest ad aliam reducitur

$$\frac{ax}{\delta} \equiv \frac{c-b}{\delta} \text{ (mod. } \frac{m}{\delta}\text{)}$$

in qua $\frac{a}{\delta}$ ad modulum $\frac{m}{\delta}$ est numerus primus.

§. 7. Quando $p$ est numerus primus numerum $A$ non metiens plures quam $n$ secundum modulum $p$ valores incongrui variabilis $x$ non exstant, qui congruentiae

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{ etc. } + Mx + N \equiv 0$$

secundum eundem mod. satisfaciant.

1. Si $n$ unitati aequivalet propositio nostra ex paragr. praeced. illico sequitur.

Digitized by Google

2. Si vero $n$ unitatem superat, congruentia si fieri possit plures quam exempl. gr. $n+1$ valores admittat incongruos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. Tum erit

$$A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} \text{ etc. } + M\alpha + N \equiv 0 \pmod{p}$$
$$A\beta^n + B\beta^{n-1} + C\beta^{n-2} \text{ etc. } + M\beta + N \equiv 0$$
. . . . . .

ergo

$$A(\alpha^n - \beta^n) + B(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \text{ etc. } + M(\alpha - \beta) \equiv 0.$$
. . . . . .

Potestatum differentias quae in hac congruentia reperiantur, per $\alpha - \beta$ divisibiles esse satis notum est, facillimeque perspicitur congruentiam forma exhiberi

$$(\alpha - \beta)\,(A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} \text{ etc. } + L'\beta + M') \equiv 0$$

ergo erit

$$A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} \text{ etc. } + L'\beta + M' \equiv 0$$

quoniam $\alpha - \beta$ per $p$ non divisibilis est, nam $\alpha$, $\beta$ sunt valores incongrui. Jam quum multitudo horum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ... sit $n+1$ atque ipsum $\alpha$ cum aliorum quoque combinari liceat, manifesto $n$ congruentiae formae, quam modo diximus, habebuntur et quidem omnes sunt $(n-1)^{ti}$ gradus. Congruentia igitur $(n-1)^{ti}$ gradus admittet $n$ valores incongruos, ex eadem causa congruentia $(n-2)^{ti}$ gradus $n-1$ valores incongruos. Qua conclusione continuata sequeretur congruentiam primi gradus admittere 2 radices diversas, quod fieri nequit (§. 6). Multo minus plures quam $n+1$ radices diversae congruentiae propositi $n^{ti}$ gradus satisfacient.

§. 8. Designante $\varphi N$ multitudinem numerorum ad $N$ primorum ipsoque minorum et $n$, $n'$, $n''$, etc. omnes divisores numeri $N$ unitate et ipso $N$ non exclusis semper erit $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' + \varphi a'''$ etc $= N$.

1. Quando $N$ est formae $p^n$ vel numeri primi potestas, omnes ejus divisores sunt hi: $1, p, p^2, p^3, \ldots p^n$. Multitudo numerorum ad $p^n$ primorum eoque minorum est $p^{n-1}(p-1)$, ergo

$$\varphi 1 + \varphi p + \varphi p^2 + \varphi p^3 + \ldots + \varphi p^n$$
$$= 1 + (p-1) + p(p-1) + p^2(p-1) \text{ etc. } + p^{n-1}(p-1)$$

quam summam potestati $p^n$ aequivalere ex doctrina serierum constat.

2. Quando $N$ est numerus compositus puta $A^a B^b C^c$ etc. quicunque hujus divisor forma $A^f B^g C^h \ldots$ exhibetur, ita ut exponentes $f$, $g$, $h$ vel nonnulli eorum etiam evanescere possint, attamen minores sint resp. quam $a$, $b$, $c$, ... Poterit igitur $f$ omnes valores inde ab Zero usque ad $a$, $g$ omnes valores inde ab Zero usque ad $b$, $h$ omnes valores a Zero usque ad $c$ etc. accipere. Et si valoribus his respondentes potestates inter se combinantur, manifesto omnes numeri $N$ divisores exstabunt. Jam dico, si numeri $F$, $G$, $H$ etc. sint ad singulas potestates $A^f$, $B^g$, $C^h$ etc. primi etiam productum $FGH\ldots$ ad illud $A^f B^g C^h \ldots$ primum fore. Nam quum hi modo factoros $A$, $B$, $C\ldots$ productum $A^f B^g C^h \ldots$ possint metiri, si producta $A^f B^g C^h \ldots$, $FGH\ldots$ divisorem communem haberent, unum ex factoribus $A$, $B$, $C\ldots$ simul ea metiri oporteret ex. gr. $A$. Tum autem $A$ tanquam primus aut $F$ metiri deberet, aut $G$, aut $H$ etc. v. c. $F$, neque vero $A^f$ ad $F$ esset numerus

Digitized by Google

primus contra suppositionem nostram. Vice versa quicunque numerus ad $A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots$ primus factores modo involvet quorum nullus cum potestatibus $A^{\alpha}$, $B^{\beta}$, $C^{\gamma}\ldots$ habeat factorem communem. Nunc reperiantur numeri ad $A^{0}$, $A^{1}$, $A^{2}$, $\ldots A^{a}$ primi singulisque non majores, deinde numeri ad potestates $B^{0}$, $B^{1}$, $B^{2}$, $\ldots B^{b}$ primi singulisque non majores similiterque de ceteris, $C^{0}$, $C^{1}$, $C^{2}$, $\ldots C^{c}$. Primo dictorum multitudo erit $A^{a}$, secundo $B^{b}$, tertio $C^{c}$ etc. ex prima parte.

Quodsi numeri de quibus agitur inter se combinantur, ex praecedentibus patebit, omnes numeros exstare ad divisores numeri $N$ primos ipsisque non majores manifestoque multitudo habebitur $A^{a}B^{b}C^{c}$ etc. sive $N$.

Aliam licet videre demonstrationem huj. prop. in Gauss Disq. Arithm. pag. 33.

## B. De numerorum periodis, radicibus primitivis residuisque quadraticis.

§. 9. Quum Fermatii theorema in sequentibus maximi sit momenti in memoriam id revocabimus sed ita enunciatum, ut latissime pateat, nempe ut sequitur.

Quando numeri $a$, $p$ sunt inter se primi, semper congruentia

$$a^{\varphi p} \equiv 1 (\text{mod. } p)$$

locum habebit, denotante $\varphi p$ multitudinem numerorum ad $p$ primorum eoque minorum.

Significatis omnibus numeris ad $p$ primis eoque minoribus per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_\mu$$

statim patebit, nullum horum productorum

$$\Theta_1 a \,.\, \Theta_2 a \,.\, \Theta_3 a \,.\, \ldots \,.\, \Theta_\mu \,.\, a$$

per $p$ divisibile esse (§. 2.), deinde producta de quibus agitur secundum $p$ esse incongrua. Nam si universim haberetur $\Theta_\chi a \equiv \Theta_\lambda a$ denominantibus $\Theta_\chi$, $\Theta_\lambda$ numeros ex his $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\ldots \Theta_\mu$ differentiam $\Theta a - \Theta_\lambda a$ ergo $\Theta_\chi - \Theta_\lambda$ per modulum esse divisibilem oporteret, quod fieri nequit. Tertio dico quodvis residuum ex divisione productorum illorum per $p$ relictum ad $p$ esse primum. Nam si residuum producti alicujus $\Theta_\chi a$ est $\varrho$ vel $\Theta_\chi a \equiv \varrho$ quicunque residui $\varrho$ divisor productum $\Theta_\chi a$ metiri deberet, siquidem etiam numerum primum $p$ metiretur. Tum autem aut $\Theta_\chi$ aut $a$ cum $p$ haberet divisorem communem contra ea, quae statuimus. Quum igitur productorum residua sint inaequalia, ad $p$ prima nullumque evanescat, residua haec ordine neglecto his ipsis $\Theta_1 \,.\, \Theta_2 \,.\, \Theta_3 \,\ldots\, \Theta_\mu$ aequivalere statim perspicietur. Ergo hanc habemus congruentiam

$$\Theta_1 a \,.\, \Theta_2 a \,.\, \Theta_3 a \,\ldots\, \Theta_\mu a \equiv \Theta_1 \,.\, \Theta_2 \,.\, \Theta_3 \,\ldots\, \Theta_\mu \text{ (mod. } p)$$

vel hanc $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_\mu \,(a^{\varphi p} - 1) \equiv 0$. Jam vero $p$ ad productum $\Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_\mu$ est primus, quam ob rem (§. 3.) differentia $a^{\varphi p} - 1$ per $p$ divisibilis esse debet i. e. $a^{\varphi p} \equiv 1$ (mod. $p$).

Quando $p$ est numerus primus omnes ad $p$ primi eoque minores sunt

$$1, 2, 3, \ldots p - 1$$

Digitized by Google

ergo $aa^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ quo modo vulgo enunciatur Fermatii theorema.

§. 10. Pedetentim vero quaestio sese offert, num etiam inferiores potestates quam $(\varphi p)^{ta}$ unitati secundum $p$ possint congruae fieri? Hoc argumentum mox aggrediemur, sed id certe contendi poterit, exponentem infimae numeri alicujus $a$ potestatis unitati congruae aut numero $\varphi p$ aequalem esse aut eum certe metiri.

Si enim $a^t$ esset infima numeri $a$ potestas unitati secundum $p$ congrua et $t$ numerum $\varphi p$ non metiretur, ponere liceret $\varphi p = mt + r$, ita ut $r$ non evanesceret minorque esset numero $t$. Erit autem $a^{t\varphi p} \equiv 1$ i. e. $a^{mt+r}$ vel $a^{mt} . a^r$ unitati congrua; jam vero $a^{mt} \equiv 1$ ergo $a^r \equiv 1$ exstaretque minor num. $a$ potestas quam $t^{ta}$ unitati congrua contra supp. nostram.

Quando autem $a^t$ est infima numeri $a$ unitati congrua potestas, hae

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^t$$

secundum $p$ erunt incongruae. Nam si esset $a^x \equiv a^{x'}$ ita ut nullus horum $x$, $x'$ exponentem $t$ superaret, haberetur $a^{x-x'} \equiv 1$ (m. $p$) (§. 5. 4.) quo loco statuimus esse $x > x'$. Atqui $x - x' < t$, ergo $a^t$ non esset infima unitati congrua potestas. Nec minus potestates, quarum exponentes inter $t+1$ et $2t$, inter $2t+1$ et $3t$, inter $3t+1$ et $4t$ etc. continentur, incongruae erunt. Nam quancunque potestatem, cujus exponens inter $t+1$ et $2t$ continetur, potestati alicui cujus exponens $\geqq 1$ et $\leqq t$ congruam fieri facillime intelliget. Idem valet de reliquis. Potestates vero $a^t$, $a^{2t}$, $a^{3t}$, $\ldots\ a^{mt}$ omnes secundum $p$ unitati fore congruas id quoque quisque perspiciet. Habetur igitur periodus nempe potestatum series, quarum residua minima sunt inaequalia omniaque ad modulum prima. Ceterum si $a^t$ est infima unitati congrua potestas atque $a^r \equiv a^\varrho \pmod{p}$ etiam $r \equiv \varrho \pmod{t}$ erit; nam $a^{r-\varrho} \equiv 1$, qua re differentiam numeri $t$ multiplum esse oportebit vel $r \equiv \varrho \pmod{t}$. Vice versa quando congruentiam habes $r \equiv \varrho \pmod{t}$ etiam hanc alteram habebis $a^r \equiv a^\varrho \pmod{p}$.

Si $a^t$ est infima radicis $a$ potestas unitati secundum modulum quemcunque $p$ congrua, $a$ ad exponentem $t$ pertinere, cum Eulero in sequentibus dicemus.

§. 11. Numeros, in quorum periodis omnes ad modulum primi eoque non majores numeri reperiuntur, radices primitivas vocabimus. Sequitur ex hac definitione, exponentem, ad quem radix primitiva pertineat, aequalem esse multitudini numerorum ad modulum primorum eoque non majorum. Pertineat enim radix quaecunque primitiva $a$ ad exponentem $t$ eritque $a^t$ infima numeri $a$ potestas unitati congrua. Jam vero $a$ ad modulum primus nec minus $a^2$, $a^3$, $\ldots\ a^t$ omniaque harum potestatum residua minima sunt inaequalia. Quia igitur periodus haec $t$ numeros ad modulum primos complectitur ceteraeque potestates eadem praebent residua, ut omnes ad modulum primos complectatur, ipsum $t$ multitudini numerorum ad modulum primorum aequivalere necesse erit. Valde autem quaeritur, num revera pro quovis modulo radices inveniantur primitivae et si exstant, quae sit earum multitudo. Videbimus in sequentibus in eo modo casu radices exstare primitivas, in quo mo-

Digitized by Google

dulus sit 4 aut una formarum exhibeatur $p^n$, $2p^n$ denotante $p$ numerum primum imparem. Priusquam autem hoc aggredimur argumentum radices congruentiae superioris gradus, in quibus nititur disquisitio, sunt considerandae. Sed eum statim tractabimus casum, in quo $p$ est numerus primus.

§. 12. Semper exstant numeri, quorum nulla potestas inferior quam $(p-1)^{ta}$ unitati congrua est, vel quod idem valet, pro modulo primo radices exstant primitivae.

Quando $p-1$ in factores suos primos hoc modo resolvitur $A^a B^b C^c \ldots$ dico inveniri posse numerum $\alpha$ ad exponentem $A^a$, num. $\beta$ ad exp. $B^b$, numerum $\gamma$ ad exp. $C^c$ etc. pertinentem. Congruentiam $x^{\frac{p-1}{A}} \equiv 1 \pmod{p}$ non plures quam $\frac{p-1}{A}$ radices admittere diversas ex §. 7. patebit, quam ob rem quisque numerorum $1, 2, 3, 4, \ldots p-1$ quorum multitudo major quam $\frac{p-1}{A}$, congruentiae illi satisfacere non potest. Sit igitur $g$ unus hujusmodi numerus, congruentiae propositae non satisfaciens eritque si ponitur $g^{\frac{p-1}{A^a}} = \alpha$, $\alpha$ numerus ad exponentum $A^a$ pertinens. Potestatem enim $(A^a)^{ta}$ numeri $\alpha$ unitati congruam fore ex Fermatii theoremate intelligitur. Jam si exstarent inferiores numeri $\alpha$ potestates unitati congruae, harum infimae exponens expon. $A^a$ deberet metiri (§. 10.) atque unus esse ex his

$$A^{a-1}, A^{a-2}, A^{a-3}, \ldots\ldots$$

Jam vero $\alpha^{A^{a-1}} = \left(g^{\frac{p-1}{A^a}}\right)^{A^{a-1}} = g^{\frac{p-1}{A}}$ ex suppositione nostra unitati non est congrua multoque minus $\alpha^{A^{a-2}}$, $\alpha^{A^{a-3}}$ etc. ergo $\alpha$ ad exponentem $A^a$ pertinet. Tum dico productum numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui ad exponentes singulos $A^a$, $B^b$, $C^c$, $\ldots$ pertineant, ad exponentem $A^a B^b C^c \ldots$ sive $p-1$ pertinere. Quod productum ad potestatem $(p-1)^{tam}$ elevatum unitati congruum fore facile patet.

Nam $\alpha^{A^a} \equiv 1$, $\beta^{B^b} \equiv 1$, $\gamma^{C^c} \equiv 1$ etc. ergo

$$\alpha^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1,\ \beta^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1,\ \gamma^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1, \text{ qua ex re}$$

$$(\alpha\beta\gamma \ldots)^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1 \pmod{p} \text{ sive } (\alpha\beta\gamma \ldots)^{p-1} \equiv 1.$$

Quodsi productum ad minorem exponentem $t$ pertineret, $t$ numerum $p-1$ metiri deberet. Sit igitur $t = A^{a-1} B^b C^c$ etc. eritque $(\alpha\beta\gamma \ldots)^t = (\alpha\beta\gamma \ldots)^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$. Quum jam $\beta, \gamma, \ldots$ ad exponentes $B^b$, $C^c \ldots$ pertineant potestates $\beta^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$, $\gamma^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$ unitati erunt congruae ergo $(\alpha\beta\gamma \ldots)^t \equiv \alpha^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$. Quum denique $\alpha$ ad exponentem $A^a$ pertineat, debet $A^a$ metiri productum $A^{a-1} B^b C^c \ldots$ q. e. a. Neque igitur $\alpha\beta\gamma \ldots$ ad exponentem $A^{a-1} B^b C^c \ldots$ pertinebit, multoque minus ad minorem.

§. 13. Quoniam residua minima potestatum

$$a, a^2, a^3, \ldots a^{p-1}$$

si modo $a$ est radix primitiva, sunt inaequalia illa numeris ordine neglecto

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

Digitized by Google

aequivalere oportebit, nec minus omnem numerum per $p$ non divisibilem residuo harum potestatum alicui congruum fore. Quodsi $a^n \equiv b \pmod{p}$ $n$ ipsius $b$ indicem cum Eulero vocemus perspicieturque, alicui numero plures secundum eandem radicem primitivam respondere indices et quidem hi indices sec. modulum $p-1$ erunt congrui (§. 10.).

§. 14. Index producti ex quotcunque factoribus compositi summae indicum singulorum factorum secundum modulum $p-1$ congruus est. Etiam index potestatis numeri alicujus producto ex indice radicis in exponentem potestatis secundulum eundem modulum congruus est.

Sint primo propositi duo factores $A$, $B$ eritque demonstrandum, congruentiam

$$\text{Ind } AB \equiv \text{Ind } A + \text{Ind } B \pmod{p-1}$$

locum habere.

Ex notione autem indicum (§. 13.) intelligitur esse si radicem adoptabis quancunque $a$ $a^{\text{Ind } A} \equiv A$, $a^{\text{Ind } B} \equiv B$ sec. mod. $p$, ex quo sequitur $a^{\text{Ind } A + \text{Ind } B} \equiv AB$. Jam vero $a^{\text{Ind } AB} \equiv AB$, ergo etiam $a^{\text{Ind } AB} \equiv a^{\text{Ind } A + \text{Ind } B}$ atque $a^{\text{Ind } AB - (\text{Ind } A + \text{Ind } B)} \equiv 1 \pmod{p}$. Qua re differentiam $\text{Ind } AB - (\text{Ind } A + \text{Ind } B)$ numerus $p-1$ debet metiri, quoniam $a^{p-1}$ est infima ips. $a$ unitati congrua potestas., i. e. $\text{Ind } AB \equiv \text{Ind } A + \text{Ind } B \pmod{p-1}$. $A$ duobus factoribus poterit prorsus simili modo ad tres, hinc ad quattuor, omnino ad quotcunque factores. Sequitur deinde $\text{Ind } A^2 \equiv \text{Ind } AA \equiv \text{Ind } A + \text{Ind } A \equiv 2\text{Ind } A \pmod{p-1}$, $\text{Ind } A^3 \equiv 3\text{Ind } A$, $\text{Ind } A^n \equiv n\text{Ind } A$ sec. mod. $p-1$.

§. 15. Congruentia $x^n \equiv A \pmod{p}$ denotante $p$ numerum primum aut nullam admittet radicem, aut tot radices, quot unitates habeat divisor communis maximus $\delta$ numerorum $n$ et $p-1$. Et quidem nullus numerus congruentiae satisfaciet propositae, nisi potestas $A^{\frac{p-1}{\delta}}$ unitati fit congrua.

Si congruentia resolubilis est sequitur ex indicum doctrina $n\text{Ind } x \equiv \text{Ind } A \pmod{p-1}$, cui semper satisfieri potest, quando $n$ ad $p-1$ est primus (§. 6.), quo in casu unam modo admittet radicem. Sin $n$ et $p-1$ divisorem habent comm. max. $\delta$, indicem ipsius $A$ per $\delta$ divisibilem esse oportet (§. 6.), qua conditione locum habente patet congruentiam

$$\frac{n\text{Ind } x}{\delta} \equiv \frac{\text{Ind } A}{\delta} \left(\text{m. } \frac{p-1}{\delta}\right)$$

admittere $\delta$ valores diversos sec. mod. $\frac{p-1}{\delta}$ vel $p-1$, nempe valores num. $\frac{n\text{Ind } x}{\delta}$ sunt hi

$$\frac{\text{Ind } A}{\delta}, \frac{\text{Ind } A}{\delta} + \frac{p-1}{\delta}, \frac{\text{Ind } A}{\delta} + \frac{2(p-1)}{\delta}, \ldots \frac{\text{Ind } A}{\delta} + \frac{(\delta-1)(p-1)}{\delta}.$$

Jam vero si valores ipsius $\text{Ind } x$ sec. mod. $p-1$ sunt congrui etiam radices respondentes congruentiae $x^n \equiv A \pmod{p}$ sec. $p$ erunt congruae, ergo exstabunt $\delta$ valores diversi.

Quando denique congr. prop. resolubilis esse debet, num. $\text{Ind } A$

Digitized by Google

per $\delta$ divisibilem esse oportebit vel Ind $A \equiv 0$ (mod. $\delta$). Sit $a$ radix quaecunque primitiva eritque

$$a^{\text{Ind } A} \equiv A \text{ (mod. } p), \; a^{\frac{\text{Ind } A(p-1)}{\delta}} \equiv A^{\frac{p-1}{\delta}} \text{ (m. } p).$$

Jam quum $\frac{\text{Ind } A}{\delta}$ sit integer, erit $a^{\frac{\text{Ind } A(p-1)}{\delta}} \equiv 1$ adeoque $A^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1$ (mod. $p$), qua deficiente conditione congruentiae $x^n \equiv A$ (m. $p$) satisfieri nequit.

Coroll. 1. Quando $n = 2$ congruentia $x^2 \equiv A$ (mod. $p$) resolubilis erit, si $A^{\frac{p-1}{2}}$ unitati congrua, sin vero minus non resolubilis. Ut igitur numerus aliquis quadrato sec. mod. primum congruus fiat, potestas $A^{\frac{p-1}{2}}$ unitati debet esse congrua. Quum jam $p-1$ sit numerus par congruentia $x^2 \equiv A$ (m. $p$) aut nullam admittet radicem aut duas.

Coroll. 2. Quando $A = 1$ congruentia $x^2 \equiv 1$ (m. $p$) semper poterit resolvi, si vero $A = -1$ in eo modo casu, quo $\frac{p-1}{\delta}$ est numerus par.

§. 16. Congruentia $x^n \equiv A$ (mod. 2) unam tantummodo radicem admittet nempe 1 quando $A$ est numerus impar, haec vero $x^n \equiv A$ (mod. 4) denotante $A$ etiam nunc numerum imparem, aut nullam, aut unam, aut denique duas.

Propositionis prima pars tam obvia est, ut demonstratione non opus sit. Quod vero attinet ad alteram, sit primo $A$ formae $4n+1$. In hocce casu 1 est radix neque vero 3 nisi exponens $n$ est numerus par. Sit secundo $A$ formae $4n+3$, tum 1 congruentiae non satisfaciet, quia $4n+3-1 = 4n+2$ per 4 non divisibilis neque vero satisfaciet 3 quando $n$ est par. Si vero $n$ est numerus impar manifesto 3 erit radix. Sequitur ex hac consideratione congruentiam $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) semper duas admittere radices nempe 1 et 3.

§. 17. Sequitur ut de modulis una formarum $p^n$, $2p^n$ comprehensis agatur. In §. 15. inventum est, congruentiam $x^n \equiv 1$ (mod. $p$) habere $\delta$ radices sec. $p$ incongruas, denotante $\delta$ maximum communem divisorem num. $n$ et $p-1$. Simili modo enunciabimus theorema quod sequitur.

Congruentia $t^{ti}$ gradus $x^t \equiv 1$ (mod. $p^n$) admittet $\delta$ valores secundum $p^n$ incongruos, denotante $\delta$ divisorem communem maximum numerorum $t$, $p^{n-1}(p-1)$, qua propositione demonstrata patebit congruentiam propositam non plures quam $t$ radices admittere diversas.

Ponatur $\delta = kp\Theta$ ita ut $k$ factorem $p$ non involvat adeoque $k$ ipsum $p-1$ metiatur. Jam dico

1. Si $\alpha$ fuerit radix congruentiae propositae etiam $\alpha + hp^{n-\Theta}$ fore radicem, designante $h$ numerum quemcunque per $p$ non divisibilem. Ceterum illico observandum est, numerum $\Theta$ hunc $n-1$ superare non posse. Sit primo $n - \Theta > 1$ atque $\Theta = 1$, tum erit

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t = hp^{n-\Theta}\{(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} + \alpha(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-2} + \alpha^2(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-3} \text{ etc.} + (\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1}\}.$$

Digitized by Google

Atqui $\alpha + hp^{n-\Theta} \equiv \alpha \pmod{p^2}$ quoniam $n - \Theta > 1$, ergo

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} \equiv \alpha^{t-1} \pmod{p^2}$$
$$\alpha(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-2} \equiv \alpha^{t-1}$$
$$\alpha^2(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-3} \equiv \alpha^{t-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} \equiv \alpha^{t-1}$$

ergo $(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv hp^{n-\Theta} \cdot \alpha^{t-1} \cdot t \pmod{p^{n-\Theta+2}}$

quam ob rem terminus in sinistra parte positus erit formae

$$hp^{n-\Theta}(t\alpha^{t-1} + Kp^2) = hp^{n-\Theta}t\alpha^{t-1} + Khp^{n-\Theta+2}$$

quumque $\Theta = 1$ habetur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv t\alpha^{t-1}hp^{n-\Theta} \pmod{p^{n+1}}$$
$$\equiv 0 \pmod{p^n}$$

quia in hocce casu $t$ per $p$ non vero per $p^2$ divisibilis est. Theorema igitur valet quando $n - \Theta > 1$ atque $\Theta = 1$. Sin $\Theta$ non est 1 assumamus propositionem nostram valere pro $\Theta$ poteritque demonstrari etiam pro $\Theta + 1$ locum habere. Tum autem a valore 1 usque ad 2, hinc ad 3, omnino ad $\Theta$ ascendi poterit. Sit igitur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv t\alpha^{t-1}hp^{n-\Theta} \text{ (m. } p^{n+1})$$

ponaturque $tp$ pro $t$ ita ut $tp$ per $p^{\Theta+1}$ non vero per $p^{\Theta+2}$ sit divisibilis. Habemus

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp}$$
$$= \{(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t\}\ \{(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} + \alpha^t(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-2)} + \alpha^{2t}(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-3)} \ldots + \alpha^{t(p-1)}\}$$

verum

$$\alpha + hp^{n-\Theta} \equiv \alpha \pmod{p^2}, \text{ ergo}$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} \equiv \alpha^{t(p-1)} \pmod{p^2}$$
$$\alpha^t(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-2)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$
$$\alpha^{2t}(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-3)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$

adeoque summa erit congrua $\alpha^{t(p-1)} \cdot p$ vel

formae $\alpha^{t(p-1)} \cdot p + Kp^2$, ergo

$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp}$ formae $(\alpha^{t-1}hp^{n-\Theta}t + Kp^{n+1})$

$\{\alpha^{t(p-1)}p + Kp^2\}$ vel congrua $\alpha^{tp-1}hp^{n-\Theta}tp$

secundum modulum $n + 2$. Erit igitur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp} \equiv \alpha^{tp-1}hp^{n-\Theta}tp \text{ (m. } p^{n+2}).$$

Jam vero $t$ per $p^\Theta$, $p^{n-\Theta}tp$ per $p^{n+1}$ et $(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp}$ per $p^{n+1}$ divisibilis, quam ob rem

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

ita ut prop. valeat pro $\Theta + 1$.

Digitized by Google

Sit secundo $n - \Theta = 1$ atque $\Theta = 1$, tum erit

$$(\alpha + hp)^t - \alpha^t = hp\{(\alpha + hp)^{t-1} + \alpha(\alpha + hp)^{t-2} + \alpha^2(\alpha + hp)^{t-3} + \ldots + \alpha^{t-1}\}$$

Atqui

$$(\alpha + hp)^{t-1} - \alpha^{t-1} = hp\{(\alpha + hp)^{t-2} + \alpha(\alpha + hp)^{t-3} + \text{etc.} + \alpha^{t-2}\}$$

Deinde

$$(\alpha + hp)^{t-2} \equiv \alpha^{t-2} \pmod{p}$$
$$\alpha(\alpha + hp)^{t-3} \equiv \alpha^{t-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha + hp)^{t-2} \equiv \alpha^{t-2}$$

ergo summa erit congrua $\alpha^{t-2}(t-1)$ sec. mod. $p$ vel formae $\alpha^{t-2}(t-1) + Kp$ adeoque

$(\alpha + hp)^{t-1} - \alpha^{t-1}$ erit formae $\alpha^{t-2}(t-1)\ hp + Khp^2$

quam ob rem

$$(\alpha + hp)^{t-1} - \alpha^{t-1} \equiv \alpha^{t-2}(t-1)\ hp \pmod{p^2}$$
$$\text{vel } (\alpha + hp)^{t-1} \equiv \alpha^{t-1} + \alpha^{t-2}(t-1)\ hp$$

prorsus simili modo

$$(\alpha + hp)^{t-2} \equiv \alpha^{t-2} + \alpha^{t-3}(t-2)hp$$
$$(\alpha + hp)^{t-3} \equiv \alpha^{t-3} + \alpha^{t-4}(t-3)hp$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ergo

$$(\alpha + hp)^t - \alpha^t \text{ erit formae } hp\{t\alpha^{t-1} + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\ hp + Kp^2\}$$

vel congrua $hpt\alpha^{t-1} + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\ h^2p^2 \pmod{p^3}$.

Jam vero $\frac{t-1}{2}$ est num. integer adeoque $\frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}$ per $t$ atque igitur per $p$ divisibilis, quam ob rem habemus

$$(\alpha + hp)^t - \alpha^t \equiv hpt\alpha^{t-1} \pmod{p^2}$$
$$\alpha^t \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Simili modo ut antea ad modulos $p^n$, $p^{n+1}$ poterit ascendi. In omnibus igitur casibus habetur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t \equiv \alpha^t \pmod{p^n}$$
$$\text{atque } (\alpha + hp^{n-\Theta})^t \equiv 1$$

quae congruentia pro modulo $p^{n+1}$ non valet.

Ex quo facillime deducitur, numerum aliquem radicem congruentiae propositae esse non posse, nisi in forma contineatur $\alpha + hp^{n-\Theta}$. Quando enim $\alpha'$ ipsi $\alpha$ secundum $p$ neque vero sec. $p^{n-\Theta}$ congruus esset radix poni liceret $\alpha' = \alpha + h'p^\mu$ ita ut sit $\mu < n - \Theta$. Tum erit $(\alpha + h'p^\mu)^t \equiv \alpha^t$ secundum modulum $p^{\mu+\Theta}$ neque vero secund. $p^n$ contra hypoth.

2. Quaecunque radix congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{p^n}$ eidem sa-

Digitized by Google

tisfaciet secund. $p$; jam vero haec $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ habet $k$ radices diversas (§. 15.). Sint hae radices $A$, $B$, $C$, ... Quodsi $\alpha$ est radix congr. prop. ipsi $A$ secundum $p$ congrua etiam

$$\alpha + p^{n-\Theta},\ \alpha + 2p^{n-\Theta},\ \ldots\ \alpha + (p^\Theta - 1)p^{n-\Theta}$$

fore radices (ex 1) patet. Quam ob rem exstant $p^\Theta$ radices congr. nostrae ipsi $A$ sec. $p$ congruae. Idem valet de reliquis $B$, $C$, ... ergo satisfacient omnino $kp^\Theta$ sive $\delta$ si modo demonstratum fuerit

3. Semper radicem $\alpha$ congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{p^n}$ ipsi $A$ secundum $p$ congruam inveniri posse.

Sit $\alpha$ radix congr. sec. mod. $p^{n-1}$ probeturque semper exstare radicem sec. $p^n$ numero $\alpha$ sec. $p$ congruam. Ex praeced. patet

$$(\alpha + hp^{n-1-\Theta})^t \equiv \alpha^t + t\alpha^{t-1}hp^{n-1-\Theta}$$

sec. mod. $p^n$ ergo propter $\alpha^t \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$ $(\alpha + hp^{n-1-\Theta})^t - 1$ per $p^{n-1}$ divisibilis est. Ut autem per $p^n$ fiat divisibilis, $h$ ita debet determinari ut

$$\frac{\alpha^t - 1}{p^{n-1}} + \alpha^{t-1}h\frac{t}{p^\Theta}$$

per $p$ sit divisibilis. Quod semper fieri posse inde clarum, quod $\alpha^{t-1}\frac{t}{p^\Theta}$ ad $p$ est numerus primus. Erit igitur $\alpha + hp^{n-1-\Theta}$ radix quaesita, siquidem $n - 1 - \Theta$ non evanescat.

Sin $n - 1 = \Theta$ erit $t$ per $p^{n-1}$ divisibilis, vel $t = t'p^{n-1}$, $t - t' = t'(p^{n-1} - 1)$ atque $t - t'$ per $p - 1$ divisibilis. Quia autem $A^t \equiv 1$ (m. $p$) erit $A^{t'} \equiv 1$. Quodsi ponimus $A^{t'} = 1 + hp$ habetur $A^t = A^{t'p^{n-1}} = (1 + hp)^{p^{n-1}} \equiv 1$ (m. $p^n$) ex quo sequitur, in hocce quidem casu quamcunque radicem congruentiae $x^t \equiv 1$ (m. $p$) ejusdem secund. mod. $p^n$ fore radicem. Jam vero exstat numerus congruentiae $x^t \equiv 1$ (m. $p$) satisfaciens, hinc ad modulum $p^2$, hinc ad $p^3$, ... ascendi poterit.

§. 18. Etiam congruentia $x^n \equiv 1 \pmod{2p^n}$ admittet $\delta$ radices diversas et non plures, designante $\delta$ divisorem commun. max. num. $t$, $p^{n-1}(p-1)$.

Satisfaciat $\alpha$ congruentiae sec. mod. 2, $\beta$ eidem secundum $p^n$. Si ponimus $N \equiv \alpha$ (m. 2) $\equiv \beta$ (m. $p^n$) erit $N^t \equiv \alpha^t \pmod{2} \equiv \beta^t \pmod{p^n}$ vel $N^t \equiv 1$ (m. 2) $\equiv 1$ ($p^n$), ergo $N^t \equiv 1 \pmod{2p^n}$. Jam vero congruentia $x^t \equiv 1$ (m. 2) unam tantummodo radicem admittit, haec vero $x^t \equiv 1$ ($p^n$) $\delta$ radices, huic denique $N \equiv \alpha$ (m. 2) $\equiv \beta$ (m. $p^n$) unus modo valor qui sit $< 2p^n$, ergo $N$ manifesto habebit $1 . \delta = \delta$ secundum mod. $2p^n$ valores incongruos.

§. 19. Congruentia $x^t \equiv A \pmod{p^n}$ admittit $\delta$ radices diversas.

Quoniam congruentiam resolubilem esse supponimus sit $z$ radix aliqua, vel $z^t \equiv A \pmod{p^n}$. Congruentiam $x^t \equiv 1$ (m. $p^n$) admittere $\delta$ valores sec. modulum incongruos ex §. 17. patet. Sint hi valores $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... $\alpha_\delta$. Jam dico residua minima productorum $z\alpha_1$, $z\alpha_2$, $z\alpha_3$, ... $z\alpha_\delta$ radicibus congruentiae propositae aequivalere. Nam si quancunque radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ ($p^n$) designamus per $\alpha$, erit $\alpha^t \equiv 1$, atqui $z^t \equiv A$ ergo $(z\alpha)^t \equiv A \pmod{p^n}$, quam ob rem $z\alpha$ est radix congruentiae, de qua agitur. Radices igitur erunt hae singulae

$$z\alpha_1,\ z\alpha_2,\ z\alpha_3,\ \ldots\ z\alpha_\delta.$$

Digitized by Google

Jam vero omnia haec producta sec. mod. sunt incongrua; nam si haberetur universim $za_m \equiv za_{m'}$, differentia $z(a_m - a_{m'})$ ergo $a_m - a_{m'}$ per mod. divisibilis esset, quoniam hic ad $z$ est primus. Atqui $a_m$, $a_{m'}$ sunt radices congruentiae $x^t \equiv 1$ atque incongrua, ergo revera producta, quae modo diximus, sec. mod. sunt incongrua. Neque vero plures quam $\delta$ radices exstabunt; nam quum modulum ad $z$ esse primum supponamus, numerus $a$ ita semper potest determinari ut sit $az \equiv z'$ (mod. $p^n$) denotante $z'$ numerum congruentiae propositae satisfacientem. Hinc sequitur $(az)^t \equiv A$, atqui $z^t \equiv A$, ergo $a^t \equiv 1$, ita ut valor $a$ congruentiae $x^t \equiv 1$ ($p^n$) satisfieri debeat. Quaecunque igitur radix congruentiae $x^t \equiv A$ ($p^n$) productorum alicui $za_1$, $za_2$, $za_3$, ... $za_\beta$ congrua erit, qua ex re $\delta$ neque plures exstant radices.

§. 20. Argumentatio §. 12. praesertim in eo vertebatur, ut congruentia $x^t \equiv 1$ (mod. $p$) non plures quam $t$ radices haberet diversas. Quum jam in §§. 16. 17. 18. probatum sit haec etiam pro modulis $p^n$, $2p^n$, 4 locum habere, nihil impedit, quominus etiam pro his modulis demonstratio §. 12. adhibeatur. Ex quo sequitur pro modulis $p$, $p^n$, $2p^n$, 4 designante $p$ numerum primum imparem, semper radices exstare primitivas, i. e. numeros, quorum periodus omnes ad modulum primos eoque non majores complectatur.

Pro reliquis autem modulis radices non exstare primitivas, hoc modo facillime demonstratur.

Sit modulus formae $A^a B^b C^c \ldots$ significetque, si quidem exstare possit, $N$ radicem pro hoc modulo primitivam, ita ut $N^{A^{a-1}(A-1)B^{b-1}(B-1)C^{c-1}(C-1)\cdots}$ sit infima num. $N$ unitati congrua potestas secundum modulum $A^a B^b C^c \ldots$. Jam vero $N$ ad modulum primus est nec minus ad singulos potestates $A^a$, $B^b$, $C^c$; ergo (§. 9.)

$$N^{A^{a-1}(A-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } A^a)$$
$$N^{B^{b-1}(B-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } B^b)$$
$$N^{C^{c-1}(C-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } C^c).$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Designetur dividuus communis minimus numerorum

$$A^{a-1}(A-1),\ B^{b-1}(B-1),\ C^{c-1}(C-1)\ldots$$

per $\delta$, eritque

$$N^\delta \equiv 1 \text{ (m. } A^a) \equiv 1 \text{ (mod. } B^b) \equiv 1 \text{ (m. } C^c)\ldots$$

adeoque

$$N^\delta \equiv 1 \text{ (mod. } A^a B^b C^c \ldots).$$

Quoniam casus, in quo modulus est numeri primi potestas aut ejus duplum exceptus est, numeri

$$A^{a-1}(A-1),\ B^{b-1}(B-1),\ C^{c-1}(C-1)\ldots$$

tanquam pares non erunt inter se primi, ergo horum dividuus communis minimus producto est minor vel

$$\delta < A^{a-1}(A-1)\ B^{b-1}(B-1)\ C^{c-1}(C-1)\ldots$$

quo facto $N$ non esset radix primitiva contra hyp.

Digitized by Google

§. 21. Et adhuc quidem ita nobis progressa ratio est ut disquisitum fuerit, num exstent necne radices primitivae; nunc autem aliud persequamur genus determinandi scilicet multitudinem radicum primitivarum. Dico autem in genere

tot numeros ad exponentem $t$ pertinere, quot sint ad $t$ primi ipsoque non majores et quidem hanc propositionem ad modulos $p^n$, $2p^n$, 4 extendi licebit. Erunt igitur tot radices primitivae, quot sunt ad $p^{n-1}(p-1)$ vel ad 2 primi ipsoque non majores.

Primo observamus $t$ numeros $p^{n-1}(p-1)$, 2 metiri debere (§. 9. sqq.). Quodsi numerus aliquis $a$ ad exponentem $t$ pertinet, residua minima potestatum

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^t$$

erunt inaequalia quumque congruentia $x^t \equiv 1 \pmod{m}$ denotante $m$ aliquem ex his $p^n$, $2p^n$, 4 plures quam $t$ radices diversas admittere nequeat (§§. 16. 17. 18.), manifesto omnes congruentiae illius radices exhibentur potestatum residuis $a, a^2, a^3, \ldots a^t$, quarum quaeque unitati sec. $m$ sit congrua. Jam res eo reducta est, ut ex potestatum residuis ea eligantur, quorum nullum ad minorem quam $t^{tum}$ exponentem pertineat. Dico autem si $k$ ad $t$ sit primus, potestatem $a^k$ sive ejus residuum minimum ad exponentem $t$ pertinere. Hanc autem propositionem probavero, si demonstraverim, potestates

$$a^k,\ a^{2k},\ a^{3k},\ \ldots\ a^{tk}$$

sec. $m$ esse incongruas. Si vero haberetur $a^{\varphi k} \equiv a^{\psi k} \pmod{m}$ designante $\varphi$, $\psi$ aliquem ex his 1, 2, 3, $\ldots$ $t$ esset (§. 10.) $\varphi k \equiv \psi k \pmod{t}$ vel $\varphi k - \psi k = (\varphi - \psi)k$ per $t$ divisibilis ergo $\varphi - \psi$ quoniam $k$ ad $t$ primum esse supposuimus. Atqui $\varphi - \psi < t$, ergo $a^k$ ad exponentem $t$ pertinet.

Quando autem $a$ et $t$ divisorem involvunt communem $\delta$ potestas jam $\frac{t}{\delta}ta$ ipsius $a^k$ unitati fit congrua. Nam quum $\frac{k}{\delta}$ sit integer erit quia $a^t \equiv 1$ etiam $(a^t)^{\frac{k}{\delta}} \equiv 1$ i. e. $(a^k)^{\frac{t}{\delta}} \equiv 1$. Quodsi designamus numeros ad $t$ primos per $k_1$, $k_2$, $k_3$, $\ldots k_\mu$, omnes hae potestates

$$a^{k_1},\ a^{k_2},\ a^{k_3},\ \ldots\ a^{k_\mu}$$

ad exponentem $t$ pertinebunt, reliquae vero numeri $a$ potestates non pertinebunt, ex quo sequitur totidem numeros ad exponentem $t$ pertinere, quot sint ad $t$ primi eoque non majores, dummodo probatum fuerit, unum certe numerum $a$ ad exponentem $t$ pertinere.

Designemus per $\varphi' t$ multitudinem numerorum ipso modulo minorum, qui ad exponentem $t$ pertineant. Deinde sint omnes numeri $p^{n-1}(p-1)$ divisores $t, t', t'', t''' \ldots$ Quum jam quisque numerus minor quam modulus $m$ ad aliquem divisorum illorum pertineat, erit manifesto

$$\varphi' t + \varphi' t' + \varphi' t'' + \varphi' t''' \text{ etc.} = p^{n-1}(p-1).$$

Atqui (§. 8.) quando $\varphi t$ designat multitudinem numerorum ad $t$ primorum eoque non majorum

$$\varphi t + \varphi t' + \varphi t'' + \varphi t''' \text{ etc.} = p^{n-1}(p-1)$$

adeoque

Digitized by Google

$$\varphi t + \varphi t' + \varphi t'' + \varphi t''' \text{ etc.} = \varphi' t + \varphi' t' + \varphi' t'' + \varphi' t''' \text{ etc.}$$

Jam ex praecedentibus patet nullum summae posterioris terminum prioris aliquem posse superare, neque minor esse poterit, quoniam summae sint aequales ergo $\varphi t = \varphi' t$ i. e. tot numeri ad exponentem $t$ pertinent, quot sint ad $t$ primi eoque non majores.

§. 22. Vidimus in §. 20. pro modulo $2^n$ ubi $n > 2$ radices primitivas non exstare. Etiam ex theoremate quod sequitur haec propositio probatur nempe

Si potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda pro modulo assumitur, numeri cujusvis imparis potestas exponentis $2^{n-2}$ unitati fit congrua.

Clariss. Gauss hoc theorema ex prop. §. 17. derivavit.

Sed quoniam ad illam demonstrandam considerationibus valde peculiaribus opus erat atque propositio nostra facilius poterit demonstrari hoc modo eam probabimus.

Assumamus theorema verum esse pro modulo $2^{n-1}$ ita ut sit $a^{2^{n-3}} \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$, designante $a$ numerum quencunque imparem. Ponamus igitur $a^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1}\lambda$ eritque $a^{2^{n-2}} = (1 + 2^{n-1}\lambda)^2 = 1 + 2^n\lambda + 2^{2(n-1)}\lambda^2$. Quoniam vero $n > 2$, $2n - n > 2$, $2(n-1) > n$ erit $2^n\lambda + 2^{2(n-1)}\lambda^2 \equiv 0 \pmod{2^n}$ ex quo sequitur $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$, ita ut theorema valeat pro modulo $2^n$ si verum est pro hoc $2^n$ 1.

Jam vero congruentiae $x^2 \equiv 1 \pmod{2^3}$ omnes numeri impares satisfaciunt, quia quisque numerus impar forma exhibetur $4m \pm 1$ atque semper $(4m \pm 1)^2$ unitati sec. mod. 8 vel $2^3$ fit congruus. A modulo $2^3$ ad $2^4$, ab $2^4$ usque ad $2^5$, omnino ad $2^n$ ascendi poterit.

§. 23. Sequitur, ut dijudicetur, ad quemnam exponentem numerus impar sec. mod. $2^n$ pertineat, deinde quot numeri infra $2^n$ ad exponentem $t$ exstent pertinentes.

Theorema. Quivis numerus impar forma $2^m h \pm 1$ exhibitus, ita ut sit $m > 1$ atque $h$ numerus impar ad exponentem $2^{n-m}$ pertinet sec. modulum $2^n$, ubi $n > 2$ assumitur.

Etiam haec propositio ex §. 17. sequitur, sed ut tota dilucidior fiat res, demonstrationem, quae sequitur, adhibeamus.

Quoniam numerus propositus $a$ est formae $2^m h \pm 1$ erit $a^2$ formae $1 + 2^{m+1}h\,(2^{m-1}h \pm 1)$ vel formae $2^{m+1}h' + 1$, ita ut $h'$ sit numerus impar, quia $m > 1$. Hinc erit

$$a^4 \text{ formae } 1 + 2^{m+2}h''$$
$$a^8 \text{ formae } 1 + 2^{m+3}h'''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{2^\mu} \text{ formae } 1 + 2^{m+\mu}h^{(\mu)}$$

designantibus $h''$, $h'''$, ... $h^{(\mu)}$ numeros quoscunque impares. Jam sit $a^{2^\mu}$ minima ipsius $a$ potestas unitati congrua sec. mod. $2^n$ eritque

$$2^{m+\mu}h^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{2^n}.$$

Quum vero $h^{(\mu)}$ sit numerus impar, erit $2^{m+\mu}$ per $2^n$ divisibilis, inferior ipsius 2 potestas non divisibilis. Itaque habemus $m + \mu = n$ adeoque $\mu = n - m$ atque

$$a^{2^{n-m}} \equiv 1 \pmod{2^n}$$

quam ob rem $a$ ad exponentem $2^{n-m}$ pertinet.



Digitized by Google

Exempl. Sit mod. $2^5 = 32$, num. prop. $11 = 2^3 . 3 - 1$ tum pertinebit 11 ad exponentem $2^{5-2}$ vel 8. sec. mod. 32.

Potestates 11. $11^2$. $11^3$. $11^4$. $11^5$. $11^6$. $11^7$. $11^8$.

Residua 11. 25. 19. 17. 27. 9. 3. 1.

§. 24. Quando $2^n$, ubi $n > 2$, pro modulo assumitur, semper $t$ numeri ad exponentem $t$ pertinebunt. Ipsum vero $t$ numerum $2^{n-2}$ metiri debere ex §§. 9. 22. intelligitur.

Quisque numerus ad exponentem pertinens $2^{n-m}$ forma debet exhiberi $2^m h \pm 1$ (§. 23.), qua re quaestio huc reducta est, ut determinetur quot numeri modulo $2^n$ minores formis $2^m h \pm 1$ contineantur. Debet autem $h$ ita determinari ut sit primo $2^m h + 1 < 2^n$ vel $h < 2^{n-m} - \frac{1}{2^m}$ adeoque $h \leqq 2^{n-m} - 1$, secundo ut sit $2^m h - 1 < 2^n$ vel $h < 2^{n-m} + \frac{1}{2^m}$ adeoque $h \leqq 2^{n-m} - 1$, manifesto enim $h$ tanquam impar ipsi $2^{n-m}$ aequivalere nequit. Valores igitur numeri $h$ erunt hi

$$1, 3, 5, 7, 9 \ldots . 2^{n-m} - 1$$

facillime vero ex inductione intelligitur, multitudinem horum terminorum esse $2^{n-m-1}$. Itaque formis $2^m h \pm 1$ comprehenduntur $2^{n-m-1} . 2$ vel $2^{n-m}$ numeri minores modulo $2^n$, ergo $2^{n-m}$ numeri ad exponentem $2^{n-m}$ pertinebunt.

Exempl. Ad exponentem 4 secundum mod. 16 pertinent 4 numeri nempe 3, 5, 11, 13.

| Potestates sunt | Residua minima |
|---|---|
| $3^1$. $3^2$. $3^3$. $3^4$ | 3. 9. 11. 1 |
| $5^1$. $5^2$. $5^3$. $5^4$ | 5. 9. 13. 1 |
| $11^1$. $11^2$. $11^3$. $11^4$ | 11. 9. 3. 1 |
| $13^1$. $13^2$. $13^3$. $13^4$ | 13. 9. 5. 1 |

§. 25. Ut propositiones, quae sequuntur spectantque ad periodos potestatum, radices primitivas et residua quadratica magis inter se connexae sint atque theoremata quid simile habeant, satis appareat, priusquam ulterius progredimur, notiones quasdam de residuis quadraticis praemittemus.

§. 26. Ex congruentiae notione sequitur quadrata $a^2$, $(m-a)^2$ secundum modulum $m$ esse congrua. Qua re potestatum

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots . (m-2)^2, (m-1)^2$$

residua minima non omnia erunt inaequalia quumque quadratum aliquod, cujus radix ipsum $m$ superat, quadrato alicui cujus radix $< m$ congruum debet fieri patebit numeros exstare, qui quadrato non sint congrui neque minus numeros revera quadrato alicui congruos. Illi numeri moduli propositi **non-residua**, hi vero **residua** vocantur quadratica. Et primo quidem criterium aliquod inveniendum, utrum numerus aliquis moduli propositi sit residuum an non residuum. Etiamsi in §. 15. Coroll. 1. jam invenimus, numerum aliquem esse residuum aut non-residuum moduli cujusvis pri-

Digitized by Google

mi prouti potestas $A^{\frac{p-1}{2}}$ unitati sec. $p$ congruus sit aut incongruus tamen nunc aliud assequamur ratiocinandi genus huic ipsi materiae magis idoneum.

§. 27. Quando $p^n$, $2p^n$, 4 pro modulis assumantur atque $a$ significet numerum ad quemque horum primum denique $\varphi m$ exprimat multitudinem ad modulum primorum eoque non majorum numerorum, tum dico

1. Si $a$ sit residuum quadraticum moduli illarum formarum aliqua comprehensi, semper potestatem $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati congruam esse.

2. Vice versa si $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati congrua sit, semper $a$ residuum quadraticum esse moduli propositi.

Demonstratio. Prima pars. Quia $a$ est moduli $m$ residuum quadraticum inveniri poterit quadratum aliquod $\alpha^2$, cui $a$ secund. $m$ sit congruus vel $\alpha^2 \equiv a \pmod{m}$, qua re $(\alpha^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ i. e. $\alpha^{\varphi m} \equiv a^{\frac{1}{2}\varphi m}$. Atqui quum $a$ ad $m$ primum esse supponamus $\alpha^{\varphi m} \equiv 1 \pmod{m}$ (§. 9.) adeoque $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1 \pmod{m}$.

Hanc proprietatem valere pro modulo quocunque inde manat, quod nihil impedit, quominus argumentatio nostra ad quemvis adhibeatur modulum. Longe vero aliter res sese habet in altero casu.

Secunda pars. Congruentia

$$x^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1 \pmod{m}$$

admittit $\varphi m$ radices (§. 9.) tot enim exstant numeri ad modulum primi eoque minores; haec vero altera

$$(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1 \pmod{m}$$

$\frac{1}{2}\varphi m$ habet radices neque plures (§§. 16. 17. 18.), quia numerorum $\frac{1}{2}\varphi m$ et $\varphi m$ divisor communis maximus est $\frac{1}{2}\varphi m$. Jam vero $x$, ut modo diximus, $\varphi m$ valores involvitin congruos, ergo $x^2$ $\frac{1}{2}\varphi m$ valores incongruos sec. mod.; facile enim perspicitur, quadrata, quorum radices summam $m$ constituunt esse congrua, quadrata autem, quorum radices $\frac{1}{2}\varphi m$ non superant sec. $m$ incongrua esse. Nam quum $m = p^n$ vel $2p^n$, erit $\frac{1}{2}\varphi m = \frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Quodsi esset $\lambda^2 \equiv \mu^2$ ita ut sit quum $\lambda$ tum $\mu \gtrless \frac{1}{2}\varphi m$ haberetur $(\lambda+\mu)(\lambda-\mu) \equiv 0$. Hi autem factores numerum primum $p$ non simul involvunt, quia differentia per $p$ dividi nequit amboque pares sunt quando modulus est $2p^n$, quoniam in hocce casu et $\lambda$ et $\mu$ est numerus impar, nam $(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} - 1$ tanquam per parem $2p^n$ divisibilis ipse erit par adeoque $x$ impar. Ex quo patet aut unum aut alterum factorem per modulum divisibilem esse. Sed hoc fieri nequit quia et $\lambda+\mu$ et $\lambda-\mu$ modulo minor est.

Quum igitur congruentia $(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1 \pmod{m}$ admittat $\frac{1}{2}\varphi m$ neque plures radices, statim perspicitur numerum $a$ congruentiae $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ satisfacientem quadrato alicui sec. $m$ congruum fore.

§. 28. Licet observari quando formae $p^n$, $2p^n$ pro modulis assumantur potestatem $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati aut positive aut negative sumptae congruam fieri. Nam quum $a^{\varphi m} - 1$ ergo $(a^{\frac{1}{2}\varphi m}+1)$ $(a^{\frac{1}{2}\varphi m}-1)$ per $m$ divisibilis sit (§. 9.), aut unum aut alterum factorem per $m$ divisibilem esse oportebit. Nempe ambo factorem $m$ tanquam differentiam 2 constituentes non simul involvunt, quandoque modulus est $2p^n$ ambo erunt pares, ut ex §. praec. patet, quam ob rem erit



Digitized by Google

aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m}+1\equiv 0$ aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m}-1\equiv 0$ i. e. aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv -1$ aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$.

Si igitur (§. 27.)

1) $a$ est residuum quadraticum moduli $p^n$, $2p^n$ semper potestas $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati congrua erit.

2) Si $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati congrua est, semper $a$ erit residuum quadraticum.

3) Quando $a$ est non-residuum, erit $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}\equiv -1$.

4) Quando denique potestas $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}\equiv -1$ semper erit $a$ non-residuum quadraticum.

Aliam hujus propositionis demonstrationem dedit celeberr. Legendre in opere quod inscribitur Essai sur la théorie des nombres, quae tamen eo limitatur casu, in quo modulus est numerus primus.

§. 29. Hoc residuorum vel non-residuorum criterium pedetentim fert ad propositiones, quae sequuntur demonstrandas, quas ad modulos $p^n$, $2p^n$ extendi licebit.

Productum ex duobus residuis erit residuum, ex residuo in non-residuum erit non-residuum, productum vero ex duobus non-residuis revera residuum est quadraticum.

1) Sint $a$, $b$ residua quadratica eritque $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$ ubi $\varphi m=p^{n-1}(p-1)$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$ i. e. $ab$ residuum (ex §. 28. 2).

2) Quando $a$ est residuum, $b$ autem non-residuum, erit $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv -1$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv -1$ i. e. $ab$ non-residuum quadraticum (§. 28. 4).

3) Quando denique ambo $a$, $b$ sunt non-residua erit $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv -1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv -1$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$ i. e. $ab$ residuum (§. 28. 2).

§. 30. Si alii quam qui in forma $p^n$, $2p^n$, 4 continentur moduli assumuntur atque $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati sec. $m$ est congrua, nihilominus $a$ non-residuum esse poterit.

Sit modulus $m=A^\alpha B^\beta C^\gamma\ldots$ atque $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$ (mod. $m$) ita ut sit $\frac{1}{2}\varphi m=\frac{1}{2}A^{\alpha-1}(A-1)\,B^{\beta-1}(B-1)\,C^{\gamma-1}(C-1)\ldots$, quod ita designemus productum $\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma\ldots$ Sit deinde $A$ numerus primus impar. Assumamus $a$ esse non-residuum moduli $A^\alpha$, quod semper exstare manifestum est, quo facto erit $a^{\frac{1}{2}\alpha}\equiv -1$ (mod. $A^\alpha$) (§. 28.) adeoque $a^{\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma\cdots}\equiv +1$ (mod. $A^\alpha$) quia unum certe horum $\beta, \gamma, \ldots$ numerum parem esse oportebit. Tum vero $a$ est non-residuum mod. $A^\alpha$, etiamsi congruentia $a^{\frac{1}{2}\varphi m}\equiv 1$ (m. $m$) locum habeat. Quam ob rem $a$ etiam moduli $A^\alpha B^\beta C^\gamma\ldots$ vel $m$ erit non-residuum; nam si residuum esset, cujusque horum $A^\alpha$, $B^\beta$, $C^\gamma\ldots$ residuum esse oporteret. Et adhuc quidem modulum $2^n$ ($n>2$) excipimus, sed pro hoc etiam propositio demonstratur facilime. Est enim $m=2^n$, $\varphi m=2^{n-1}$, $\frac{1}{2}\varphi m=2^{n-2}$ atque si $a$ designat numerum quemcunque imparem (§. 22.) $a^{2^{n-2}}\equiv 1$ (mod. $2^n$). Patet autem non omnes numeros impares moduli $2^n$ esse residua; nam omnes forma $8k+3$, 5, 7 comprehensi numeri sunt non-residua, quoniam cujusque numeri imparis tanquam formae $4k\pm 1$ quadratum semper formam habet $8k+1$ neque vero $8k+3$, 5, 7.

§. 31. Unitas negative sumpta semper est residuum quadraticum aut non-residuum moduli in aliqua formarum $p^n$, $2p^n$ exhibiti, prouti $p$ est formae $4n+1$ aut formae $4n+3$. Ceterum $-1$ non-residuum est moduli 4.

Nam potestas $(-1)^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati positive aut negative sumptae congrua est, prouti $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ est par aut impar, ergo

Digitized by Google

(§. 28.) $-1$ resp. residuum aut non-residuum. Erit autem $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ par aut impar prout $\frac{1}{2}(p-1)$ par aut impar i. e. prout $p$ formae $4n+1$ aut formae $4n+3$.

Non-residuum denique moduli $A$ est $-1$, quia cujusvis numeri imparis quadratum tanquam formae $8k+1$ secund. mod. 4 unitati positive sumptae fit congruum.

§. 32. Priusquam ad determinandam residuorum vel non-residuorum multitudinem progredimur, nonnulla de radicibus congruentiae secundi gradus $x^2 \equiv 1$ dicenda sunt, quippe quae in sequentibus maximi sit momenti. In universum quidem hoc argumentum in §. 16. jam tractavimus sed ratione modo habita numeri pro modulo assumpti primi; nunc vero de quibuscunque modulis agamus.

§. 33. Congruentia $x^2 \equiv 1$ (mod. $m$) designante $m$ numerum alicujus formarum $p^n$, $2p^n$ vel 4 duas tantummodo radices admittit nempe 1 et $-1$ vel $m-1$.

1) Quando modulus $m$ est numerus primus $p$ differentia $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ per $p$ debet esse divisibilis ergo aut unus factor aut alter (§. 1.), quam ob rem quoniam oportet esse $x$ modulo minorem, ipse $x$ erit aut 1 aut $p-1$.

2) Quando modulus est numeri primi imparis potestas puta $p^n$ etiam tum productum $(x-1)(x+1)$ modulus metietur. Jam vero ambo factores numerum primum $p$ non simul involvunt, quia differentia eorum scilicet 2 per $p$ dividi nequit. Ergo aut $x-1$ aut $x+1$ per $p^n$ debet esse divisibilis vel $x \equiv 1$ aut $\equiv -1$ (m. $p^n$) et quoniam $x$ modulo est minor $x = 1$ aut $x = p^n - 1$.

3) Si modulus est duplum numeri primi potestatis manifesto praeterquam quod ambo factores $x-1$, $x+1$ numerum primum $p$ non simul involvunt, etiam ambo erunt pares, qua re modulus aut unum metietur aut alterum i. e. $x \equiv 1$ aut $\equiv -1$ (m. $2p^n$) ergo $x = 1$ aut $2p^n - 1$.

4) Radices duas modo exstare congruentiae $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) scilicet 1 et 3 demonstratione non egeat.

§. 34. Congruentia $x^2 \equiv 1$ (mod. $2^n$), in qua $n > 2$ semper quattuor neque plures admittet radices nempe 1, $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, $2^n-1$.

Quia $x^2-1$ per mod. $2^n$ debet esse divisibilis, $x$ erit numerus impar, $x+1$ par ita ut poni liceat $x+1 = 2k$, quo facto habetur $(x-1)(x+1) = 4k(k-1)$, $\frac{x^2-1}{2^n} = \frac{k(k-1)}{2^{n-2}}$. Quodsi $k$ est numerus par, $k-1$ impar debet esse $k$ per $2^{n-2}$ divisibilis vel $k$ formae $2^{n-2}\Theta$, $x$ formae $2^{n-1}\Theta - 1$. Si vero $k$ est impar, $k-1$ par, erit $k-1 = 2^{n-2}\Theta'$, $x = 2^{n-1}\Theta' + 1$. In omnibus casibus $x$ est modulo minor, ergo hae quattuor inveniuntur radices $2^{n-1}-1$, $2^n-1$, 1, $2^{n-1}+1$.

§. 35. Restat, ut modulos, qui in aliqua formarum $p^n$, $2p^n$, $2^n$ non sint comprehensi, consideremus. Exhibeatur modulus forma $A^a B^b C^c$ etc. eritque perspicuum, si numerus aliquis sit residuum moduli propositi etiam residuum fore singulorum factorum, qua re ex congruentia

$$x^2 \equiv r \text{ (mod. } A^a B^b C^c \ldots)$$

deducuntur hae

$$m^2 \equiv r \text{ (mod. } A^a), \quad n^2 \equiv r \text{ (mod. } B^b), \quad q^2 \equiv r \text{ (m. } C^c) \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Ponamus

$$t \equiv m \text{ (mod. } A^a\text{)}, \equiv n \text{ (m. } B^b\text{)} \equiv q \text{ (m. } C^c\text{) etc.}$$

eritque

$$t^2 \equiv r \text{ (m. } A^a\text{)} \equiv r \text{ (mod. } B^b\text{)} \equiv r \text{ (m. } C^c\text{) etc.}$$

ergo

$$t^2 \equiv r \text{ (mod. } A^a B^b C^c \ldots\text{).}$$

Notum est, unum solum numerum $t$ infra modulum $A^a B^b C^c \ldots$ exstare, qui congruentiis

$$t \equiv m \text{ (m. } A^a\text{)} \equiv n \text{ (m. } B^b\text{)} \equiv q \text{ (m. } C^c\text{) etc.}$$

simul satisfaciat. Quaestio igitur quot valores admittat $t$ eo reducta est, ut decidatur quot radices habeant singulae congruentiae $m^2 \equiv r$ (m. $A^a$), $n^2 \equiv r$ (m. $B^b$) $q^2 \equiv r$ (mod. $C^c$)... Sint hi valores, quorum multitudo §§. 33. 34. determinatur (si modo $r \equiv 1$) deinceps

$$m, m', m'', \text{ etc.}; n, n', n'' \text{ etc.}; q, q', q'' \text{ etc.} \ldots\ldots$$

manifestoque quoniam combinari oportet hos multitudo ipsius $t$ valorum i. e. radicum congruentiae

$$x^2 \equiv r \text{ (m. } A^a B^b C^c \ldots\text{)}$$

multitudo erit producto aequalis

$$(m + m' + m'' \text{ etc.}) (n + n' + n'' \text{ etc.}) (q + q' + q'' \text{ etc.}) \ldots$$

Ex iis quae adhuc de congruentia $x^2 \equiv 1$ sunt tradita sequitur, radicum multitudinem semper majorem esse quam 2 dummodo ne modulus sit formae $p$, $p^n$, $2p^n$ vel 4.

§. 36. Quod sequentia cum theoremate Wilsoniano ut dicitur arcte cohaerent facillimeque ex propositionibus, quae ad congruentiam $x^2 \equiv 1$ spectant, illius theorematis argumentatio peti poterit, hoc ipsum sed a summo Gauss in Disq. Arithm. hoc modo generalius enunciatum probemus.

Productum ex omnibus numeris, numero quocunque dato $A$ minoribus simulque ad ipsum primis congruum est secundum $A$ unitati vel negative vel positive sumptae. Et quidem negative sumenda est unitas, quando $A$ est formae $p^n$ aut hujusce $2p^n$, designante $p$ numerum primum imparem, insuperque quando $A = 4$; positive autem in omnibus casibus reliquis.

Designentur numeri ad $A$ primi eoque minores ita

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

quo loco statim observandum est, horum multitudinem sive $\mu$ esse parem. Jam dico

primo. Producta alicujus illorum in reliquorum quemque sec. mod. $A$ incongrua esse. Si enim $\varrho_k$, $\varrho_{k'}$, $\varrho_{k''}$ designant tres quoscunque atque esset $\varrho_k \varrho_{k'} \equiv \varrho_k \varrho_{k''}$ (m. $A$) productum $\varrho_k(\varrho_{k'} - \varrho_{k''})$ ipse $A$ metiretur ergo differentiam $\varrho_{k'} - \varrho_{k''}$ (§. 3.). Atqui hoc fieri nequit quoniam $\varrho_{k'} - \varrho_{k''} < A$.

secundo. Producta de quibus agitur sive eorum residua minima ad $A$ erunt prima. Quando enim ex. gr. productum $\varrho_k \varrho_{k'}$ cum $A$ haberet communem factorem primum, hic ipse aut $\varrho_k$ aut $\varrho_{k'}$ metiri deberet, quo facto modulus $A$ cum uno horum $\varrho_k$, $\varrho_{k'}$ factorem communem involveret contra ea, quae supposuimus.

Digitized by Google

tertio. Quodsi numerorum aliquis ad $A$ primorum ex. gr. $\varrho_k$ in reliquos omnes hinc etiam in se ipsum multiplicetur, residua inde genita minima ad $A$ erunt prima quumque eorum multitudo sit $\mu$, plures autem numeri ad $A$ primi infra $A$ non exstent, residua haec numeris

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

ordine neglecto aequivalebunt. Jam vero inter hos reperitur 1, qua re semper unum et quidem modo unum illorum productorum unitati secundum $A$ congruum fore patebit. Numeros, quorum productum sec. mod. aliquem unitati fit congruum, Eulerus socios sibi vocavit. In serie igitur

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

cuique numero in eadem serie socius aliquis respondebit, quo loco subintelligendum erit, numerum horum aliquem etiam sibi ipsi socium esse posse.

quarto. Itaque statim decidendum est, quot numeri seriei exstent propositae sibi ipsis socii. Quando vero modulus est unius formarum $p^n$, $2p^n$ insuperque quando est 4 duo tantummodo numeri infra $A$ reperiuntur, quorum quadrata unitati fiant congrua nempe 1 et $A-1$ (§. 33.). Sint hi $\varrho_1$ et $\varrho_\mu$. Quo facto in serie

$$\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}\ \varrho_{\mu-1}$$

quisque numerus unum a se diversum habebit socium neque plures, quumque multitudo horum sit par, productum vero ex binis terminis unitati congruum manifesto omnium productum et ipsum unitati fit congruum. Atqui $\varrho_1\varrho_\mu = 1 . (A-1) \equiv -1 \pmod{A}$ ergo

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \ldots \varrho_{\mu-2}\varrho_{\mu-1}\varrho_\mu \equiv -1 \pmod{p^n, 2p^n, 4}$$

quinto. Quando denique $A$ est nullius formarum, quas modo diximus, sequitur ex §. 35. quattuor certe numeros exstare infra $A$ (omnino multitudo erit potestas numeri 2 altior quam prima cf. §. 35.) quorum quadrata unitati fiant congrua. Hujusmodi numeris remotis reliquorum productum unitati congruum est. Priorum aliquo designato per $\varrho_\Theta$ erit etiam $A-\varrho_\Theta$ eadem proprietate affectus; nam $A-\varrho_\Theta$ ad $A$ primus est non minus quam $\varrho_\Theta$ atque $(A-\varrho_\Theta)^2 \equiv \varrho_\Theta^2 \pmod{A}$, qua re $(A-\varrho_\Theta)^2$ non minus unitati congruus quam $\varrho_\Theta^2$. Bini igitur numerorum sibi ipsis sociorum productum constituent unitati negative sumptae congruum. Et quoniam dimidia ejusmodi pars numerorum est par, productum numerorum sibi ipsis sociorum unitati congruum est, ergo hocce quidem casu

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \ldots \varrho_{\mu-2}\varrho_{\mu-1}\varrho_\mu \equiv 1 \pmod{A}.$$

Exempl. 1. Sit modulus $18 = 2 . 3^2$ formae $2p^n$. Productum

$$1 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 \equiv -1 \pmod{18}$$

2. Pro modulo $21 = 3 . 7$ productum

$$1 . 2 . 4 . 5 . 8 . 10 . 11 . 13 . 16 . 17 . 19 . 20 \equiv 1 \text{ (m. 21)}$$

Coroll. Si modulus $A$ est numerus primus $p$ omnes numeri inde ab unitate usque ad $p-1$ ad $p$ erunt primi ergo

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

quo modo vulgo enunciatur theorema Wilsonianum.

Digitized by Google

§. 37. **Summa omnium numerorum ad numerum quencunque $A$ primorum eoque non majorum semper per hunc $A$ divisibilis erit.**

Quando numerus quicunque $m < A$ ad $A$ est primus etiam $A - m$ ad $A$ primus erit atque ambo $m$, $A - m$ sunt inter se diversi; nam si esset $n = A - m$ haberetur $A = 2m$, $m = \frac{1}{2}A$, quo facto $\frac{1}{2}A$ ad $A$ non esset primus. Quare binorum summa per $A$ divisibilis est vel potius ipsi $A$ aequalis, ergo summa omnium per $A$ divisibilis erit et quidem tot vicibus continebit $A$ quot unitates habet numerorum ad $A$ primorum dimidia pars. Manifesto argumentatio supponit, duos certe numeros ad $A$ primos exstare, qua re excipiendus est casus, in quo $A = 2$.

§. 38. In sequentibus ea modo consideremus residua quadratica, quae ad modulum sint prima, quo facto solos ad hunc ipsum primos numeros ad quadrata elevari oportebit, ut residua de quibus agitur habeantur. Etiamsi hoc expressis verbis non dicetur, tamen semper erit subintelligendum.

§. 39. **Multitudo residuorum quadraticorum moduli $p^n$, $2p^n$, $A$ sec. hunc incongruorum nec non multitudo non-residuorum aequivalebit multitudinis dimidiae parti ad modulum primorum eoque minorum numerorum.**

1. Quando modulus est numerus primus impar $p$, horum modo quadratorum

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots\ (p-3)^2,\ (p-2)^2,\ (p-1)^2$$

residua minima considerari oportebit. Jam vero quadrata, quorum radices summam $p$ constituunt, erunt congrua, quoniam omnino $m^2 \equiv (p-m)^2$ sec. mod. $p$. At vero omnia haec

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

revera erunt incongrua secundum $p$. Sint duo quaelibet $m^2$, $n^2$. Quodsi haberetur $m^2 \equiv n^2 \pmod{p}$, esset $(m+n)(m-n)$ per $p$ divisibilis ergo aut $m+n$ aut $m-n$ (§. 1.) quod fieri nequit, quoniam et $m+n$ et $m-n < p$. Qua re exstant $\frac{1}{2}(p-1)$ residua manifestoque totidem non-residua.

2. Quando modulus est numeri primi imparis potestas aliqua puta $p^n$. Sint numeri ad $p^n$ primi eoque minores

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots\ \varrho_{\mu-2},\ \varrho_{\mu-1},\ \varrho_\mu$$

ita ut $\varrho_1$ sit minimus $\varrho_\mu$ maximus reliquique vulgari ordine sint positi. Tum vero ita eos ordinari licebit

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots\ p^n-\varrho_3,\ p^n-\varrho_2,\ p^n-\varrho_1.$$

Jam quadrata, quorum radices summam $p^n$ constituunt, sec. $p^n$ erunt congrua, quoniam in universum $m^2 \equiv (p^n-m)^2$ sec. mod. $p^n$. At vero quadrata eorum, qui moduli dimidiam partem non superant, revera erunt incongrua. Sint hujusmodi numeri duo quilibet $a$, $b$. Quodsi esset $a^2 \equiv b^2$, productum $(a+b)(a-b)$ per $p^n$ dividi posset; jam vero ambo factores primum $p$ non involvunt, quia si fieri posset, differentia $2b$ per $p$ divisibilis esset q. e. a. Ergo aut unus factor aut alter per $p^n$ dividi poterit; sed etiam hoc fieri nequit, quod $a+b$, $a-b < p^n$.

3. Pro modulo $2p^n$ multitudinem residuorum quadraticorum esse

Digitized by Google

$\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ simili modo probatur, dummodo ratio habeatur ejus rei, quod ambo $a+b$, $a-b$ sunt pares.

4. Si modulus est 4 duo modo exstant numeri ad 4 primi 1 et 3. 3 vero residuum esse nequit, quia quadratum numeri imparis exhibetur forma $4n+1$ neque vero $4n+3$.

§. 40. Multitudo residuorum quadraticorum moduli $2^n$ $(n>2)$ ad eumque incongruorum est $2^{n-2}$.

Primum dico quadrata

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ \ldots\ (2^{n-2}-1)^2$$

sec. modulum $2^n$ esse incongrua. Nam duo quaelibet sint $a^2$, $b^2$. Quodsi haberetur $a^2 \equiv b^2$, productum $(a+b)(a-b)$ per modulum divisibilis esset. Atqui ambo factores numerum 4 non simul involvunt, quia tum differentia eorum $2b$ per 4 dividi posset, quod fieri nequit, quoniam $b$ impar. Ex quo sequitur $a-b$ per 2, $a+b$ per $2^{n-1}$ divisibilem esse oportere. Sed etiam hoc fieri nequit, quod summa $a+b<2^{n-1}$. Et quum quodque majus quadratum radicem habeat, quae cum alicujus seriei propositae quadrati radice summam $2^{n-1}$ constituit sequitur talia quadrata revera esse congrua. Multitudinem vero horum

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ \ldots\ (2^{n-2}-1)^2$$

esse $2^{n-3}$ facile ex inductione intelligitur.

Exempl. 1. Pro modulo 32 habentur $2^{5-3}=4$ residua scilicet 1 . 9 . 25 . 17.

2. Pro modulo 64 haec octo residua

$$1\ .\ 9\ .\ 25\ .\ 49\ .\ 17\ .\ 57\ .\ 41\ .\ 33.$$

§. 41. Vidimus in §. 15. congruentiam $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ designante $p$ numerum primum imparem admittere tot radices, quot unitates habeat divisor communis maximus numerorum $n$ et $p-1$. Jam quum numeros ad eundem exponentem pertinentes examinaturi simus accuratiusque persequuturi, aliam etiam hujus propositionis demonstrationem tentemus, ex qua multa alia attentione haud indigna sponte manabunt.

1. Quicunque numerus unumquemque aliorum duorum metiens, horum maximum divisorem communem metietur.

Sint numeri dati $a$, $b$ divis. comm. maximus $\delta$ atque $z$ tertius numerus ipsos $a$, $b$ metiens. Ponatur $a=\delta k$, $b=\delta k'$ quo facto $k$ et $k'$ erunt inter se primi. Nam si factorem communem $\Theta$ involverent, poni liceret $a=\delta\Theta\,.\,\lambda$, $b=\delta\Theta\,.\,\lambda'$ essentque $a$, $b$ per $\delta\Theta$ divisibiles q. e. a. quoniam $\delta$ divisor communis maximus est. Porro quod $z$ metitur $a$ et $b$ hos ita exhiberi oportebit $a=z\varphi$, $b=z\varphi'$. Demonstrari autem poterit $\varphi$, $\varphi'$ multipla esse numerorum $k$, $k'$. Nam $\delta k=z\varphi$, $\delta k'=z\varphi'$ ergo $\frac{k}{k'}=\frac{\varphi}{\varphi'}$ vel $k\varphi'=k'\varphi$ atque $k\varphi'$ per $k'$ divisibilis, jam vero $k'$ ad $k$ primus est, qua re $k'$ ipsum $\varphi'$ metiri debet, similiterque $k$ ipsum $\varphi$. Quoniam $\varphi$ est multiplum numeri $k$ oportet esse $\varphi$ formae $km$, ergo $\delta k=zkm$ vel $\delta=zm$, quam ob rem $z$ numerum $\delta$ metitur.

Quando igitur numerus $z$ divisorem communem maximum $\delta$ numerorum $a$, $b$ non metitur hos ipsos $a$, $b$ simul metiri nequit.

2. Sit $\alpha$ radix congruentiae $x^n \equiv 1 \pmod{p}$, ipsum $\alpha$ ad exponentem pertinere oportebit sec. $p$, qui numeros $n$, $p-1$ simul

Digitized by Google

metiatur (§. 9. sqq.), qua re hic exponens numerum $\delta$ metiri debet (1). Quodsi omnes ipsius $\delta$ divisores unitate et $\delta$ non exclusis sunt hi

$$t,\ t',\ t'',\ t''',\ \ldots.$$

omnes congruentiae nostrae radices partim pertinebunt ad exponentem $t$, partim ad $t'$, partim ad $t''$ etc. Ad exp. $t$ autem tot numeri pertinent, quot sint ad $t$ primi eoque non majores (§. 21.) vel $\varphi t$ similiterque de reliquis, ergo multitudo radicum erit

$$\varphi t + \varphi t' + \varphi t'' + \varphi t''' \text{ etc.} \ldots.$$

vel $\delta$ (§. 8).

Haec consideratio rationem suppeditat inveniendi congruentiae alicujus radices; at tota in eo vertitur difficultas ut numerus ad exponentem propositum pertinens reperiatur. Nam omnes numeros ad exponentem aliquem pertinentes facillime inveniri posse, si modo unus exstet, ex praeced. intelligitur.

Exempl. Congruentia $x^6 \equiv 1$ (mod. 19) sex admittet radices, nempe

| | | | |
|---|---|---|---|
| ad exponentem | 1 | pertinet | 1 |
| . . . . | 2 | . . | 18 |
| . . . . | 3 | . . | 7, 11 |
| . . . . | 6 | . . | 8, 12. |

§. 42. Licet observari, si $t$ designat numerum imparem atque numeri ad exponentem $t$ pertinentes sunt $a$, $a'$, $a''$, $a'''$ etc. ad exponentem $2t$ pertinere $p-a$, $p-a'$, $p-a''$, $p-a'''$ etc., quo loco observandum est ad exponentem $2t$ totidem pertinere quot ad $t$. Pertineat enim $a$ ad exponentem $t$ eritque $a^t \equiv 1$ (m. $p$), ergo quoniam $t$ impar $(p-a)^t \equiv (-a)^t \equiv -1$ atque $(p-a)^{2t} \equiv 1$. Quodsi $p-a$ ad inferiorem pertineret exponentem $t'$ ita ut sit $(p-a)^{t'} \equiv 1$ haberetur $(p-a)^{2t-t'} \equiv 1$. Sit primo $t'$ par eritque $(p-a)^{2t-t'} \equiv a^{2t-t'} \equiv 1$. Atqui $a$ pertinet ad exp. $t$, qua re (§. 10.) numerum $t$ ipsum $2t-t'$ ergo $t'$ metiri oporteret. Itaque quoniam $t'$ est par etiam $t'$ per $2t$ divisibilis esset q. e. a. quia $t' < 2t$. Sit secundo $t'$ impar eritque $(p-a)^{2t-t'} \equiv (-a)^{2t-t'} \equiv 1$, ergo $a^{2t-t'} \equiv -1$, $a^{2(2t-t')} \equiv 1$ qua re $t$ num. $2t'$ metiri deberet, ergo $t'$. Erit igitur $t' = \varphi t$ ita ut sit $\varphi$ impar; jam vero $(p-a)^{\varphi t} \equiv -1$, ergo $(p-a)^{\varphi t} = (p-a)^{t} \equiv (-a^t)^{\varphi} \equiv -1$ contra praecedentia.

In exemplo §. 41. ad exponentem 3 pertinent 7, 11 ergo ad exponentem 6 hi $19-7$, $19-11$ vel 12, 8.

Ad exponentem 1 unus modo numerus pertinet nempe 1 quam ob rem ad exponentem 2 pertinebit solus $p-1$.

§. 43. Productum ex omnibus terminis periodi numeri cujusvis secundum modulum $p^n$ vel $2p^n$ vel 4 unitati congruum est positive vel negative sumptae. Et quidem positive sumenda est unitas, quando terminorum multitudo impar, quando vero par negative.

Modulum $p^n$ vel $2p^n$ designemus brevit. gratia per $m$ sitque periodus haec

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^t$$

Productum $P$ potestati $a^{\frac{t(t+1)}{2}}$ aequivalere ex serierum doctrina con-

Digitized by Google

stat. Quando igitur $t$ est numerus impar, erit $\frac{t+1}{2}$ integer et quoniam $a^t \equiv 1$ erit etiam $P = a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Si vero $t$ est par, erit $\frac{1}{2}t$ integer atque $a^t \equiv 1$, $(a^{\frac{t}{2}} + 1)(a^{\frac{t}{2}} - 1) \equiv 0$. Prorsus simili modo uti jam saepius argumentati sumus erit aut $a^{\frac{t}{2}} + 1$ aut $a^{\frac{t}{2}} - 1$ per modulum divisibilis. Atqui $a^{\frac{t}{2}}$ unitati non congrua, quia $a^t$ est infima unitati congrua potestas, qua re $a^{\frac{t}{2}} \equiv -1$ adeoque $P = a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv (-1)^{t+1} \equiv -1$.

Si denique modulus est 4 argumentationis prima pars pro hocce casu valet; quod vero attinet ad secundam erit $(a^{\frac{t}{2}} + 1)(a^{\frac{t}{2}} - 1)$ per 4 divisibilis et quoniam ambo factores numerum 4 non simul involvunt tanquam differentiam 2 constituentes, aut $a^{\frac{t}{2}} \equiv 1$ aut $\equiv -1$ esse oportet. Non autem erit $a^{\frac{t}{2}} \equiv 1$ sec. hypoth., ergo $a^{\frac{t}{2}} \equiv -1$, atque $a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv -1$.

Exempl. Pro modulo 25 periodus numeri 2 est haec

$$2^1 . 2^2 . 2^4 . 2^8 . \ldots . 2^{18} . 2^{19} . 2^{20}.$$

Residua sunt

2 . 4 . 8 . 16 . 7 . 14 . 3 . 6 . 12 . 24 . 23 . 21 . 17 . 9 . 18 . 11 . 22 . 19 . 13 . 1

productumque est $\equiv -1 \pmod{25}$.

§. 44. Quando $a$ est radix primitiva moduli $p^n$ vel $2p^n$, ita ut sit $a^{p^{n-1}(p-1)}$ infima ipsius $a$ potestas unitati congrua, periodus omnes numeros comprehendet ad modulum primos eoque non majores et quoniam in hocce casu $t = p^{n-1}(p-1)$ semper est par, productum numerorum ad aliquem primorum eoque minorum secundum hunc unitati negative sumptae erit congruum. (Cf. §. 36.)

Si $a$ ad exponentem $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ pertinet, erit $a$ residuum quadraticum moduli $p^n$ vel $2p^n$ (§. 28.) nec minus residua erunt $a^2$, $a^3$, $a^4$, .. $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ et quidem omnia his exhibentur residua, quod multitudo eorum $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ (§. 39.). Sequitur hoc

Theorema. Productum residuorum quadraticorum moduli in aliqua formarum $p^n$, $2p^n$ exhibiti congruum est unitati positive vel negative sumptae. Positive autem sumenda est unitas vel negative prouti $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ impar vel par i. e. prouti $p$ est formae $4n+3$ vel formae $4n+1$.

Aliam magisque peculiarem demonstrationem tentabimus in paragrapho quae sequitur.

§. 45. Numeri ad modulum quem in universum per $m$ designemus, primi eoque minores sint

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots m - \Theta_3, m - \Theta_2, m - \Theta_1$$

quorum multitudinem tanquam parem esse $2\mu$ supponemus. Quo facto residua quadratica congrua erunt potestatibus

Digitized by Google

$$\Theta_1^2,\ \Theta_2^2,\ \Theta_3^2,\ \ldots\ \Theta_{\mu-1}^2,\ \Theta_\mu^2.$$

Quodsi

1. $p$ est formae $4n+1$ erit (§. 31.) $-1$ residuum quam ob rem residua etiam ita exhibentur

$$-\Theta_1^2,\ -\Theta_2^2,\ -\Theta_3^2,\ \ldots -\Theta_{\mu-1}^2,\ -\Theta_\mu^2$$

vel ita

$$\Theta_1(m-\Theta_1),\ \Theta_2(m-\Theta_2),\ \ldots\ \Theta_{\mu-1}(m-\Theta_{\mu-1}),\ \Theta_\mu(m-\Theta_\mu).$$

Hinc patet productum numerorum ad $m$ primorum congruum esse producto residuorum ipsius $m$. Jam vero illud productum unitati negative sumptae congruum (§. 36.) ergo theorema probatum est pro modulo, cujus factor $p$ formae $4n+1$.

Si vero $p$ est formae $4n+3$ erit $-1$ non residuum (§. 41.), quam ob rem non-residua sunt his congrua

$$-\Theta_1^2,\ -\Theta_2^2,\ \ldots\ -\Theta_\mu^2$$

vel his

$$\Theta_1(m-\Theta_1),\ \Theta_2(m-\Theta_2)\ \ldots\ \Theta_\mu(m-\Theta_\mu)$$

productumque non-residuorum $a$ congruum erit producto numerorum ad modulum primorum i. e. unitati negative sumptae (§. 36.). Jam vero productum residuorum $P$ in productum non-residuorum $P'$ congruit producto numerorum ad mod. primorum i. e. $PP' \equiv -1$, atqui $P' \equiv -1$, ergo $PP' \equiv -P$, $-P \equiv -1$ vel $P \equiv 1$.

Exempl. 1. Pro modulo 25 habentur residua

$$1\ .\ 4\ .\ 9\ .\ 16\ .\ 11\ .\ 24\ .\ 14\ .\ 6\ .\ 21\ .\ 19$$

quorum productum $\equiv -1$ vel 24.

Ex. 2. Pro modulo 18 sunt residua

$$1\ .\ 7\ .\ 13 \text{ quorum productum} \equiv 1.$$

§. 46. **Productum residuorum quadraticorum moduli $2^n$ ($n > 2$) unitati secundum modulum $2^{n-1}$ congruum est.**

Designemus residua moduli $2^{n-1}$ per

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots\ \varrho_\mu$$

quorum multitudinem esse $2^{n-4}$ patet ex §. 40., quo loco observandum multitudinem esse 1 quando $n = 3$. Quo facto residua moduli $2^n$ congrua erunt his terminis

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots\ \varrho_{\mu-1},\ \varrho_\mu;\ \varrho_\mu,\ \varrho_{\mu-1}\ \ldots\ \varrho_2\ \varrho_1$$

sec. mod. $2^{n-1}$ quoniam multitudo residuorum ipsius $2^n$ est $2^{n-3}$ vel duplum multitudinis residuorum mod. $2^{n-1}$ atque quodcunque ipsius $2^n$ residuum congruum esse debet alicui ipsius $2^{n-1}$ residuo sec. mod. $2^{n-1}$. Quodsi productum residuorum moduli $2^n$ designamus per $P_n$, residuorum hujusce $2^{n-1}$ per $P_{n-1}$ habetur congruentia

$$P_n \equiv P_{n-1}^2 \pmod{2^{n-1}}.$$

Jam theorema verum esse assumamus pro modulo $2^{n-1}$ ita ut sit

$$P_{n-1} \equiv 1 \pmod{2^{n-2}}$$

eritque $P_{n-1}$ formae $1+2^{n-2}\varphi$, $P_{n-1}^2$ formae $1+2^{n-1}\varphi+2^{2(n-2)}\varphi^2$.

Digitized by Google

Quia $n > 2$ est $2(n-2) \gtrless n-1$ adeoque $P_{n-1}^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ ergo ex praeced.

$$P_n \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}.$$

Quando igitur propositio nostra valet pro modulo $2^{n-1}$ etiam pro hocce $2^n$ valebit.

Jam vero valet pro modulo $2^2$, manifesto enim unum modo exstat residuum 1. Hinc ad modulum $2^3$, hinc ad $2^5$, in universum ad $2^n$ ascendi poterit.

Exempl. 1. Residua moduli 32 sunt haec quattuor 1.9.25.17 quorum productum unitati secundum 16 est congruum.

2. Residua moduli 64 haec sunt octo 1.9.25.49.17.57.41.33 quorum productum $\equiv 1$ sec. mod. 32.

§. 47. Residuorum quadraticorum ad modulum quencunque $m$ primorum multitudini aequivalebit numerorum ad modulum primorum divisae per numerum, qui tot unitates habet, quot radices congruentia $x^2 \equiv r \pmod{m}$.

Congruentia haec habeat $\Theta$ radices diversas. Ex quaque harum radicum, quas omnes ad modulum primas esse supposuimus, unum idemque gignitur residuum minimum, quam ob rem disquisitio eo reducta est, ut determinetur quoties $\Theta$ in multitudine numerorum ad $m$ primorum contineatur. Ex quo pedetentim sequitur theorema.

Ceterum observandum est, si modulus factores modo primos impares involvat, residuorum multitudinem esse $\frac{\varphi m}{2^k}$, designante $\varphi m$ multitudinem numerorum ad $m$ primorum et $k$ multitudinem factorum ipsius $m$ primorum.

Ex hoc theoremate facillime deducuntur prop. §§. 39. 40.

Exempl. Congruentia $x^2 \equiv r \pmod{105 = 3.5.7}$ admittit $2^3$ vel 8 radices, deinde $2.4.6 = 48$ ergo multitudo resid. moduli 105 erit $\frac{48}{8} = 6$. Sunt vero haec

$$1.4.16.64.46.79.$$

§. 48. Quivis numerus per numerum primum $p$ non divisibilis, qui ipsius $p$ est residuum vel non-residuum, erit residuum etiam vel non-residuum moduli $p^n$ vel $2p^n$.

Primo perspicuum est quemvis numerum, qui residuum sit vel non-residuum ipsius $p^n$ etiam residuum fore vel non-residuum moduli $p$. Jam vero (§. 39.) multitudo residuorum moduli $p^n$ vel $2p^n$ est $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ quaeriturque, utrum inter hujus residua omnia omnino residua moduli $p$ (etiam sec. $p$ congrua) reperiantur, necne. Secund. $p$ incongrua ipsius $p$ residua exstant $\frac{1}{2}(p-1)$, totidem manifesto inter $p$ et $2p$, totidem inter $2p$ et $3p$ etc. Qua re residua moduli $p$ infra $p^n$ inveniuntur $p^{n-1}.\frac{1}{2}(p-1) = \frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Omnia igitur residua moduli $p$ infra $p^n$ inter residua moduli $p^n$ vel $2p^n$ reperiuntur.

Aliam hujus dissimillimam propositionis argumentationem dedit summus Gauss in Disq. Arithm. pag. 99 sqq.

§. 49. Quando potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda puta $2^n$ pro modulo assumitur, omnes numeri impares formae $8k+1$ erunt residua, reliqui vero non-residua.

Digitized by Google

Multitudo residuorum moduli $2^n$ est $2^{n-3}$ (§. 40.) quaeriturque, num omnes numeri infra $2^n$ formae $8k+1$ inter haec reperiantur. Debet autem $k$ ita determinari ut sit $8k+1<2^n$ vel $k<2^{n-3}-\frac{1}{8}$ adeoque $k$ num. $2^{n-3}-1$ non superet. Si igitur pro $k$ ponuntur valores

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2^{n-3}-1$$

habetur multitudo $2^{n-3}$, ergo omnes numeri formae $8k+1$ qui minores sunt modulo in residuis ipsius $2^n$ reperiuntur. Prop. sec. pars jam in §. 30. breviter perstricta est.

§. 50. Pro modulo aliquo qui forma $p^n$ vel $2p^n$ non continetur residuorum quadraticorum productum non quidem semper unitati congruum est sed tamen numero alicui congruum erit, qui in moduli residuis invenitur.

Redigatur modulus sub formam $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$ designantibus $A$, $B$, $C$, .. numeros primos diversos inter se. Sed unum modo casum brev. gratia consideremus, quo quidem $A$, $B$, $C$.. sunt numeri primi impares; quicunque enim est modulus, disquisitio facillime ex §§. 45. 46. peti poterit.

1. Sint omnes moduli factores primi formae $4n+1$ vel omnes formae $4n+3$. Residua moduli $m$ etiam singularium potestatum $A^\alpha$, $B^\beta$, $C^\gamma$, .. erunt residua. Jam vero residua moduli $A^\alpha$ infra $A^\alpha$ exstant $\frac{1}{2}A^{\alpha-1}(A-1)$, residua moduli $m$ infra $m$

$$\frac{A^{\alpha-1}(A-1)\ B^{\beta-1}(B-1)\ C^{\gamma-1}(C-1)\ldots}{2^k}$$

(§. 47.) designante $k$ multitudinem factorum moduli primorum.

Ex quo sequitur multitudinem residuorum moduli $m$ infra $m$ multiplum esse multitudinis residuorum moduli $A^\alpha$ infra $A^\alpha$, manifesto enim numerus $\frac{B^{\beta-1}(B-1)\ C^{\gamma-1}(C-1)\ \text{etc.}}{2^{k-1}}$ est integer; quoniam quisque horum $B-1$, $C-1$, $D-1$ etc. quorum multitudo $k-1$ est numerus par. Quodsi hunc numerum ita exhibemus

$$\tfrac{1}{2}(B-1)B^{\beta-1}\,.\,\tfrac{1}{2}(C-1)C^{\gamma-1}\,.\,\tfrac{1}{2}(D-1)D^{\delta-1}\ \text{etc.}$$

perspicuum erit quando omnes $B$, $C$, $D$ etc. sint formae $4n+1$ hunc numerum esse parem, imparem vero quando omnes formae $4n+3$. Jam productum residuorum moduli $A^\alpha$ infra $A^\alpha$ est $\equiv\pm 1$ sec. $A^\alpha$ prouti $A$ est formae $4n+3$ vel f. $4n+1$ (§. 45.) adeoque productum residuorum moduli $m$ infra $m$ erit congruum potestati

$$(\pm 1)^{\frac{1}{2}(B-1)B^{\beta-1}\,.\,\frac{1}{2}(C-1)C^{\gamma-1}\ \text{etc.}}$$

ergo semper unitati positive sumptae congruum. Idem valet de reliquis $B^\beta$, $C^\gamma$, $D^\delta$ .., quam ob rem producto mod. $m$ residuorum designante per $P$ habebimus

$$\begin{aligned} P &\equiv 1 \pmod{A^\alpha} \\ &\equiv 1 \pmod{B^\beta} \\ &\equiv 1 \pmod{C^\gamma} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

ergo etiam $P\equiv 1 \pmod{A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots = m}$. Hinc habemus theorema: Si modulus est nullius formarum $p^n$, $2p^n$ atque omnes ejus factores primi sunt impares omnesque formae ejus-

Digitized by Google

dem, semper productum hujus moduli residuorum unitati positive sumptae erit congruum.

2. Si nonnulli factores sunt formae $4n+1$ reliqui vero formae $4n+3$ productum residuorum moduli $m$ unitati congruum est secundum quamque potestatum, quarum radices formae $4n+3$. Sint formae $4n+3$ hi $A, B, C\ldots$ formae autem $4n+1$ hi $H, K, L\ldots$ ita ut sit $m = A^a B^b C^c \ldots H^h K^k L^l$ eritque $P \equiv 1 \pmod{A^a} \equiv 1 \pmod{B^b} \equiv 1 \pmod{C^c}$ ergo etiam $P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots}$. Quodsi unus modo factor $H$ exstat formae $4n+1$ productum $P$ erit congruum (1) potestati $(-1)^{\frac{1}{2}(A-1).A^{a-1}.\frac{1}{2}(B-1)B^{b-1}}$ etc. ergo $\equiv -1$ secund. modulum $H^h$, quam ob rem congruentias resolvi oportebit $P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots}$, $P \equiv -1 \pmod{H^h}$, quo facto $P$ unitati neque positive neque negative sumptae erit congruum sec. mod. $A^a B^b C^c \ldots H^h = m$. Si vero plures factores exstent formae $4n+1$ nempe $H, K, L\ldots$ productum residuorum moduli $m$ est congruum potestati

$$(-1)^{\frac{1}{2}(A-1)A^{a-1}.\frac{1}{2}(B-1)B^{b-1}\ldots\frac{1}{2}(K-1)K^{k-1}.\frac{1}{2}(L-1)L^{l-1}} \text{ etc.}$$

secundum modulum $H^h$ vel congruum unitati positive sumptae, quoniam in hocce casu exponens est par. Idem valet de modulis $K^k$, $L^l$ etc., qua re habetur

$$P \equiv 1 \pmod{H^h} \equiv 1 \pmod{K^k} \equiv 1 \pmod{L^l} \text{ etc.}$$

ergo $P \equiv 1 \pmod{H^h K^k L^l \ldots}$ adeoque

$$P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots H^h K^k L^l \ldots = m}.$$

Ex quo tandem sequitur theorema:

Si in moduli factoribus duo vel plures reperiuntur formae $4n+1$, semper productum residuorum moduli ejusdem quadraticorum unitati positive sumptae secundum hunc erit congruum. In eo casu, quo unus modo factor exstat formae $4n+1$ productum de quo agitur residuo moduli alicui ab 1 et $-1$ vel $m-1$ diverso congruum fit, nempe productum residuorum et ipsum est residuum.

Exempl. 1. Pro modulo $33 = 3 \cdot 11$, cujus factores primi ejusdem sunt formae productum residuorum

$$1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 31$$

unitati congruum est.

2. Pro modulo $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$ residua sunt haec duodecim

$$1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 49 \cdot 64 \cdot 121 \cdot 61 \cdot 94 \cdot 166 \cdot 139 \cdot 181 \cdot 79$$

quorum productum unitati congruum, quoniam duo 13 et 5 formae sunt $4n+1$.

3. Pro modulo $35 = 5 \cdot 7$ qui unum modo factorem involvit formae $4n+1$ productum residuorum

$$1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 29 \cdot 11$$

congruum est 29. Invenitur hoc residuum sequenti modo. Erit

$$P \equiv -1 \text{ (m. 5)} \equiv 1 \text{ (m. 7)}$$

qua re $P$ ita exhiberi licet $P = -1 + 5\Theta$, ergo $5\Theta \equiv 2$ (m. 7) vel $5\Theta - 2$ erit per 7 divisibilis. Atqui $5\Theta - 2 = (7-2)\Theta - 2$,

Digitized by Google

quam ob rem debet esse $2\Theta+2$ vel $\Theta+1$ per 7 divisibilis. Ponamus $\Theta+1=7\Theta'$ eritque

$$P=-1+5(7\Theta'-1)\equiv-6 \text{ (mod. 35) vel } \equiv 29 \text{ (mod. 35).}$$

§. 51. Theorema paragr. 45 manifesto ita etiam poterit enunciari:

Quadratum producti omnium numerorum ad modulum $m=p^n$ vel $2p^n$ primorum ejusque dimidia parte minorum unitati est congruum, quando $p$ est formae $4n+3$.

Maximus ad $m$ primus numerus debet esse $\frac{m-1}{2}$, nam $\frac{m-1}{2}$ ad $m$ certe primus. Si igitur numeros de quibus agitur designamus per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \frac{m-1}{2}$$

ex praec. intelligitur semper esse

$$(\Theta_1\Theta_2\Theta_3\ldots\frac{m-1}{2})^2\equiv 1 \text{ (mod. } m)$$

Hinc sequitur productum

$$(\Theta_1\Theta_2\Theta_3\ldots\frac{m-1}{2}+1)\,(\Theta_1\Theta_2\Theta_3\ldots\frac{m-1}{2}-1)$$

per $m$ divisibile esse. Quoniam autem hi factores tanquam differentiam 2 constituentes factorem primum $p$ non simul involvunt amboque pares sunt, aut unus aut alter per $m$ dividi poterit i. e.

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3\ldots\frac{m-1}{2} \text{ aut} \equiv 1 \text{ aut } \equiv -1.$$

Quando modulus est numerus primus impar habetur

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\frac{p-1}{2}\equiv\pm 1 \text{ (mod. } p)$$

Nunc vero statim dijudicandum est, utrum signo superiore utendum sit an inferiore.

§. 52. Quod $p$ est formae $4n+3$ erit $-\varrho$ vel $m-\varrho$ nonresiduum, si $\varrho$ est residuum (§. 31. 29.). Si igitur pro residuis iis, quae sunt majora moduli dimidia parte ea substituantur negativa, quae illis sunt congrua quorumque valores absolute sumpti erunt minores moduli dimidia parte, manifesto series omnium ipsius $m$ residuorum absolute sumptorum complectetur omnes numeros ad modulum primos ejusque dimidia parte minores. Et quia productum ipsorum residuorum unitati congruum est (§. 45.) habetur hoc theorema:

Productum omnium numerorum ad modulum $p^n$ vel $2p^n$ primorum ejusdemque dimidia parte minorum unitati congruum erit positive aut negative sumptae, prouti multitudo residuorum ipsius $m$, quae sunt moduli dimidia parte majora est numerus par aut impar.

Productum igitur $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\frac{p-1}{2}$ denotante $p$ numerum primum formae $4n+3$ unitati positive aut negative sumptae congruum est prouti multitudo residuorum ipsius $p$, quae sunt majora quam $\frac{1}{2}p$ est par aut impar.

Digitized by Google

Exempl. 1. Pro modulo 19 habentur residua

$$1 . 4 . 9 . 16 . 6 . 17 . 11 . 7 . 5$$

vel $1 . 4 . 9 . -3 . 6 . -2 . -8 . 7 . 5$

ergo productum $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \equiv -1 \pmod{19}$

2. Pro modulo 23 vero haec

$$1 . 4 . 9 . 16 . 2 . 13 . 3 . 18 . 12 . 8 . 6$$

vel $1 . 4 . 9 . -7 . 2 . -10 . 3 . -5 . -11 . 8 . 6$

ergo productum $1 . 2 . 3 \ldots 11 \equiv 1$ (m. 23).

3. Quando modulus est 27 exstant residua haec novem

$$1 . 4 . 16 . 25 . 22 . 10 . 19 . 13 . 7$$

productumque $\equiv 1 \pmod{27}$.

§. 53. Quadratum producti omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante $p$ numerum primum formae $4n+3$ semper unitati congruum est.

Numerorum

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2$$

multitudo erit $\frac{1}{2}(p-1)$; jam vero $p-2 \equiv -2$,

$$p-4 \equiv -4,\ p-6 \equiv -6 \text{ etc. } \frac{p+3}{2} \equiv -\frac{p-3}{2}$$

adeoque

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \frac{p-1}{2}$$

ergo

$$P^2 = (1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} . (1 . 2 . 3 . . \frac{p-1}{2})^2 .$$

Atqui $\frac{p-3}{2}$ est numerus par atque (§. 51.) productum

$$(1 . 2 . 3 \ldots \frac{p-1}{2})^2 \equiv 1 \text{ ergo}$$

$$P^2 = (1 . 3 . 5 . 7 \ldots p-2)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ex hac consideratione manabit etiam haec propositio, quo loco observandum est numerum $\frac{p-3}{4}$ esse parem vel imparem prouti $p$ sit formae $8k+3$ vel formae $8k+7$. Productum omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante $p$ numerum primum formae $4n+3$ producto omnium numerorum inde ab unitate usque ad $\frac{1}{2}(p-1)$ positive aut negative sumpto congruum est, prouti $p$ est formae $8k+3$ vel formae $8k+7$.

Alia hujus theorematis demonstratione propositionem nanciscemur in doctrina numerorum attentione haud indignam.

Productum $1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots p-1$ est $\equiv -1 \pmod{p}$ sec. theorema Wilsonianum ergo

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2 . 1 . 2 . 3 \ldots \frac{p-1}{2} . 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$$



Digitized by Google

atque si ponimus $1 . 2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \lambda$, $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mu$

$$P\lambda\mu \equiv -1 \pmod{p}; \text{ at vero } P \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} . \lambda$$

qua re $P\lambda \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \lambda^2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}}$ adeoque $(-1)^{\frac{p-3}{4}} \mu \equiv -1 \pmod{p}$. Quodsi $p$ est formae $8k+3$ erit $\frac{p-3}{4}$ par, impar vero quando $p$ formae $8k+7$. Hinc erit $\mu \equiv -1$ aut $-\mu \equiv -1$ prouti $p$ forma comprehenditur $8k+3$ aut hacce $8k+7$. Est igitur $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p = 8k+3} \equiv 1 \pmod{p = 8k+7}$ ergo propter §. 28.

Numerus 2 est residuum quadraticum moduli primi formae $8k+7$, non-residuum vero formae $8k+3$.

§. 54. In universum quadratum producti omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante $p$ num. primum quemcunque, unitati positive vel negative sumptae erit congruum, prouti $p$ est formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$.

Residua moduli $p$ exhibentur potestatibus

$$(\tfrac{p-1}{2})^2, (\tfrac{p-3}{2})^2, (\tfrac{p-5}{2})^2, \ldots\ldots$$

omnino ex potestate $(\frac{p-k}{2})^2$ residuum gignitur quadraticum, denotante $k$ numerum imparem, cujus minimus valor 1 cujusque maximus $p-2$.

Ponamus $(\frac{p-k}{2})^2 \equiv r$ eritque $(p-k)^2 \equiv 4r$ vel $k^2 \equiv 4r$, ita ut poni liceat $k^2 = 4r - p$, quo facto habetur $r = \frac{p+k^2}{4}$. Residua igitur erunt haec

$$\frac{p+1}{4}, \frac{p+3^2}{4}, \frac{p+5^2}{4}, \ldots \frac{p+(p-2)^2}{4}$$

Productum horum designetur per $P$ eritque (§. 45.) $P \equiv \pm 1$ prouti $p$ formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$, ergo

$$P . 4^{\frac{p-1}{2}} = P . 2^{p-1} \equiv \pm 2^{p-1} \text{ i. e.}$$

$$(p+1)(p+3^2)(p+5^2)(p+7^2) \ldots p+(p-2)^2 \equiv \pm 2^{p-1}$$

adeoque $\equiv \pm 1$ (§. 9.), qua re etiam

$$(1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2)^2 \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

prouti $p$ est formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$.

§. 55. Propositio in §. 52. enunciata etiam ex sociorum doctrina facillime petitur hoc modo.

In §. 36. demonstratum est cuique numero seriei

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . p-1$$

socium aliquem in eadem serie sed unum modo respondere. Quodsi numeri hujus seriei socii sibi designantur in universum per $\alpha$, $\beta$ ita ut sit $\alpha\beta \equiv 1 \pmod{p}$ habetur $\alpha(p-\beta) \equiv -1$ (m. $p$). Vocari

Digitized by Google

liceat numeros, quorum productum unitati negative sumptae fit congruum, socios oppositos, quo facto in serie

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \frac{p-1}{2}$$

cuivis numero socius respondebit vel socius oppositus in eadem serie et quidem unus modo. Nam cuique horum numerorum in serie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots p-1$ socius respondet ergo in priore aut socius aut socius oppositus. Si vero esset $\alpha\beta' \equiv \alpha\beta''$ ita ut $\alpha$, $\beta'$, $\beta''$ moduli dimidia parte sint minores atque $\alpha\beta' \equiv \alpha\beta'' \equiv -1$ haberetur $\alpha(p-\beta') \equiv \alpha(p-\beta'') \equiv 1$, quo facto quum $p-\beta'$, tum $p-\beta''$ ipsi $\alpha$ socius esset contra §. 36. Etiam nullus horum

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \frac{p-1}{2}$$

quorum multitudo par, sibi ipsi socius esse poterit vel socius oppositus. Nam praeter 1 et $p-1$ nullius quadratum unitati congruum est (§. 36.) atque etiam nullius quadratum unitati negative sumptae erit congruum, quoniam $-1$ est non-residuum formae $4n+3$. (§. 31.). Qua re productum binorum terminorum seriei

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \frac{p-1}{2}$$

unitati aut positive aut negative sumptae erit congruum, quadratumque hujus producti semper unitati congruum. Ergo

$$(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots \frac{p-1}{2})^2 \equiv 1 \pmod{p = 4n+3}$$

Nunc vero aliud criterium sese offert congruentiae

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1.$$

Signo enim superiore vel inferiore utendum erit prouti multitudo numerorum seriei

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots \frac{p-1}{2}$$

quibus socius oppositus aliquis respondet, est par vel impar.

Exempli gr. pro modulo 23 habentur congruentiae

$$2 \cdot 11 \equiv -1,\ 3 \cdot 8 \equiv 1,\ 4 \cdot 6 \equiv 1,\ 5 \cdot 9 \equiv -1,\ 7 \cdot 10 \equiv 1$$

ergo productum

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 11 \equiv 1.$$

Utrum numero alicui respondeat socius an socius oppositus facile ex fractionum continuarum doctrina decidi poterit. Nam si $\alpha$ designat numerum aliquem ex his $2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \frac{p-1}{2}$, evolvatur fractio $\frac{p}{\alpha}$ in fractionem continuam eritque si fractio convergens quae ipsam $\frac{p}{\alpha}$ antecedit designatur per $\frac{g}{h}$, $\alpha g - hp = \pm 1$ vel $\alpha g \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Quodsi $g$ moduli dimidia parte est minor, ipsi $\alpha$ respondebit resp. socius vel socius oppositus. Si vero $g > \frac{1}{2}p$ erit



Digitized by Google

$\alpha(p-g) \equiv \mp 1$ (mod. $p$) atque tum $\alpha$ et $p-g$ sibi erunt socii oppositi vel socii.

§. 56. Summa residuorum quadraticorum moduli alicujus formarum $p^n$, $2p^n$ semper per hunc divisibilis est, excepto casu in quo $p=3$.

Designentur residua per

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu.$$

Jam 4 tanquam quadratum residuum est moduli cujusvis, ergo (§. 29.) etiam his residua erunt congrua

$$4\varrho_1, 4\varrho_2, 4\varrho_3, \ldots 4\varrho_\mu$$

manifestoque omnia sunt incongrua, quoniam si haberetur $4\varrho_k \equiv 4\varrho_\lambda$, esset $4(\varrho_k - \varrho_\lambda)$ per modulum divisibilis, vel productum $4(\varrho_k - \varrho_\lambda)$ divisibile. Quodsi modulus est $p^n$ hoc fieri nequit quia $p^n$ ad 4 primus atque $\varrho_k - \varrho_\lambda < p^n$, si vero modulus est $2p^n$ erit $\frac{4(\varrho_k - \varrho_\lambda)}{2p^n} = \frac{2(\varrho_k - \varrho_\lambda)}{p^n}$ quo facto denuo $p^n$ ad 2 primus est. Summa igitur $S$ residuorum congrua est $4S$ vel $4S \equiv S$, ex quo sequitur $3S \equiv 0$. Atqui quum casum in quo $p=3$ exceperimus, semper modulus ad 3 primus erit, quam ob rem habetur $S \equiv 0$ (m. $p^n$ vel $2p^n$).

Nota. Quando $p$ est formae $4n+1$ theorema facilius etiam probatur hoc modo. Si $r$ est residuum etiam $-r$ erit residuum, qua re in serie

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu$$

bina signi ratione non habita erunt aequalia, ergo summa omnium per modulum divisibilis.

Ex. gr. Pro modulo 25 residua sunt

$$1 \,.\, 4 \,.\, 9 \,.\, 16 \,.\, 11 \,.\, 24 \,.\, 14 \,.\, 6 \,.\, 21 \,.\, 19$$

vel haec

$$1 \,.\, 24, \; 4 \,.\, 21, \; 9 \,.\, 16, \; 11 \,.\, 14, \; 6 \,.\, 19$$

2. Residua moduli 19 sunt

$$1 \,.\, 4 \,.\, 9 \,.\, 16 \,.\, 6 \,.\, 17 \,.\, 11 \,.\, 7 \,.\, 5$$

summaque per 19 divisibilis.

§. 57. Summa omnium terminorum periodi numeri cujusvis $a$ est $\equiv 0$ sec. mod. quencunque, qui ad $a-1$ est numerus primus.

Sit periodus haec

$$a, \; a^2, \; a^3, \; a^4, \ldots a^t$$

eritque summa $s$ ex serierum doctrina $a \,.\, \frac{a^t - 1}{a - 1}$ adeoque $s(a-1) = a(a^t - 1)$. Atqui $a^t \equiv 1$ ergo $s(a-1) \equiv 0$, vel $s \equiv 0$ quoniam modulus ad $a-1$ primus.

§. 58. Theorema. Productum omnium radicum congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. $p$) designante $p$ numerum primum unitati positive aut negative sumptae est congruum prouti divisor communis maximus numerorum $n$ et $p-1$ est impar aut par.

Divisor communis maximus numerorum $n$ et $p-1$ sit $\delta$ habebitque congruentia de qua agitur $\delta$ radices (§. 41.). Quarum quaelibet ad exponentem $\delta$ pertinens sit $w$; talis enim semper exstat. Termini

Digitized by Google

$$w,\ w^2,\ w^3,\ w^4,\ \ldots\ w^\delta$$

periodum constituent omnesque congruentiae propositae satisfacient neque plures radices exstant. Ergo productum radicum erit $\equiv \pm 1$ (§. 43.) prouti $\delta$ est impar vel par.

Congruentia $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (m. $p$) admittit $\frac{p-1}{2}$ radices, quae omnes residua ipsius $p$ sunt quadratica ex quo sequitur theorema §. 44.

§. 59. Summa omnium radicum congruentiae $x^n \equiv 1$ (m. $p$) semper per modulum divisibilis est.

Pertineat $w$ ad exponentem $\delta$ statimque propositio sequitur ex §. 57. quoniam in hocce casu $w-1$ tanquam minor quam $p$ ad $p$ est primus.

§. 60. Summa quadratorum omnium numerorum, qui congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. $p$) satisfaciunt semper per modulum $p$ divisibilis est, dummodo excipietur casus, in quo congruentia duas tantummodo admittit radices.

1. Sit $\delta$ i. e. divisor communis maximus numerorum $n$ et $p-1$ impar. Radices deinde congruentiae nostrae sint $w,\ w',\ w'',\ w'''$ etc. eruntque etiam hae radices $w^2,\ w'^2,\ w''^2,\ w'''^2$, etc. et quidem omnes sunt incongruae. Nam si haberetur $w^2 \equiv w'^2$ esset $(w-w')(w+w')$ ergo $w+w'$ per $p$ divisibilis vel $w \equiv -w'$ (mod. $p$), ita ut etiam $-w'$ esset radix. Jam $n$ erit impar, nam si esset par, quia etiam $p-1$ par numerum $\delta$ tanquam imparem et $\frac{1}{2}n$ et $\frac{1}{2}(p-1)$ metiri oporteret quo facto $2\delta$ numeros $n$ et $p-1$ metiretur contra hyp. quia $\delta$ est maximus ipsorum $n$ et $p-1$ divisor communis. Quia igitur $n$ impar erit $(-w')^n \equiv -w'^n \equiv -1$ neque vero $-w'$ satisfaciet congruentiae nostrae contra praeced. Quadratis igitur $w^2,\ w'^2,\ w''^2,\ w'''^2$, etc. exhibentur omnes radices diversae adeoque

$$w+w'+w''\ \text{etc.} \equiv w^2+w'^2+w''^2+w'''^2\ \text{etc.}$$

Atqui $w+w'+w''$ etc. (§. 59.) per $p$ divisibilis est, ergo etiam $w^2+w'^2+w''^2$ etc.

2. Sint denuo radices congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. $p$) vel quod idem valet hujusce $x^\delta \equiv 1$ (mod. $p$) $w,\ w',\ w'',\ w'''$ etc. atque $\delta$ par. Congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$ satisfaciunt $\frac{1}{2}\delta$ radices incongruae, quarum summa (§. 59.) per modulum erit divisibilis. Hae radices manifesto inter has

$$w^2,\ w'^2,\ w''^2,\ w'''^2,\ \ldots$$

inveniuntur. Quae quum omnia quadrata congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$ satisfaciant, erit perspicuum hanc quadratorum summam congruam esse duplo radicum congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$, quae sec. $p$ sint incongruae. Hoc vero duplum per $p$ divisibilis est, ergo etiam summa quadratorum radicum congruentiae $x^\delta \equiv 1$.

Pro $\frac{1}{2}\delta = 1$ theorema non valere facile perspicietur.

§. 61. Productum ex omnibus numeris ad eundem exponentem $t$ pertinentibus unitati congruum est sec. mod. $p^n$ vel $2p^n$, denotante $p$ numerum primum imparem, excepto casu in quo $t=2$. Tum enim unus modo exstat numerus, ab 1 diversus.

Pertineat $a$ ad exponentem $t$ secund. modulum $p^n$ vel $2p^n$,

Digitized by Google

quem brev. grat. per $m$ designabimus. Tum numeris ad $t$ primis eoque non majoribus designatis per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_\mu$$

omnes ad exponentem $t$ pertinentes numeri exhibentur potestatibus (§. 21.)

$$a^{\Theta_1}, a^{\Theta_2}, a^{\Theta_3}, \ldots a^{\Theta_\mu}$$

quam ob rem productum erit congruum huic potestati

$$a^{\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots+\Theta_\mu}$$

sec. mod. $m$. Jam vero $\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots+\Theta_\mu \equiv 0 \pmod{t}$ (§. 37.) atque $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ ergo etiam $a^{\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots+\Theta_\mu} \equiv 1 \pmod{m}$.

Coroll. Quando $a$ ad exponentem $p^{n-1}(p-1)$ pertinet vel radix est primitiva hoc theorema ita enunciari oportebit:

Productum ex omnibus radicibus primitivis unitati congruum est sec. mod. $p^n$ vel $2p^n$ excepto casu in quo $p=3$.

§. 62. Summa omnium numerorum ad eundem exponentem $t$ pertinentium sec. modulum $p$ designante $p$ numerum primum est $\equiv 0$, quando $t$ per quadratum aliquod divisibilis est, quando vero $t$ per nullum quadratum dividi poterit, summa erit $\equiv \pm 1$ prouti multitudo factorum primorum ipsius $t$ est $\begin{matrix}\text{par}\\ \text{impar}\end{matrix}$.

Demonstratio.

Primus casus. Factore primo aliquo cujus quadratum exponentem $t$ metiatur, per $\alpha$ designato dico si $k$ sit numerus ad $t$ primus etiam $k+\frac{t\varphi}{\alpha}$ ad $t$ primum fore, designante $\varphi$ numerum integrum quemcunque. Nam primum numeri $t$, $k+\frac{t\varphi}{\alpha}$ factorem $\alpha$ non simul involvent, quandoquidem $\frac{t\varphi}{\alpha}$ ex hyp. per $\alpha$ divisibilis est ergo si fieri posset, numeri $t$, $k$ factorem communem $\alpha$ involverent contra ea, quae supposuimus. Quodsi numeri de quibus agitur alium factorem primum communem $\Theta$ haberent, tum esset $k+\frac{t\varphi}{\alpha} \equiv 0 \pmod{\Theta}$ adeoque $\alpha k+t\varphi \equiv 0$, metireturque $\Theta$ productum $\alpha k$ ergo $k$ quia $\Theta$ ab $\alpha$ diversus est. Tum autem denuo $k$ et $t$ non essent primi inter se. Ex quo sequitur omnes hos numeros

$$k,\ k+\frac{t}{\alpha},\ k+\frac{2t}{\alpha},\ k+\frac{3t}{\alpha},\ \ldots\ k+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}$$

ad ipsum $t$ fore primos. Jam sit $a$ numerus ad exponentem $t$ pertinens pertinebuntque (§. 21) omnes hi ad eundem exponentem

$$a^k,\ a^{k+\frac{t}{\alpha}},\ a^{k+\frac{2t}{\alpha}},\ a^{k+\frac{3t}{\alpha}},\ \ldots\ a^{k+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}$$

quorum multitudo est $\alpha$.

Summam horum ita exhiberi licet

$$a^k\left(1+a^{\frac{t}{\alpha}}+a^{\frac{2t}{\alpha}}+a^{\frac{3t}{\alpha}}+\ldots+a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}\right)$$

Digitized by Google

Jam vero omnes hi $a^{\frac{t}{\alpha}}, a^{\frac{2t}{\alpha}}, a^{\frac{3t}{\alpha}}, \ldots a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}$ sec. mod. prop. sunt incongrui; nam si haberetur $a^{\frac{mt}{\alpha}} \equiv a^{\frac{m't}{\alpha}}$ ita ut nullus numerorum $m, m'$ hunc $\alpha - 1$ superaret, esset $a^{\frac{(m-m')t}{\alpha}} \equiv 1$; atqui $m - m' < \alpha$, $(m - m')\frac{t}{\alpha} < t$, quo facto inferior ipsius $\alpha$ potestas quam $t^{ta}$ unitati congrua fieret contra hyp. Termini igitur

$$a^{\frac{t}{\alpha}}, a^{\frac{2t}{\alpha}}, a^{\frac{3t}{\alpha}}, \ldots a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}, 1$$

periodum constituent. Sed numerum $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ipso $p$ minorem accipere oportebit. Si enim $a^{\frac{t}{\alpha}} + mp$ ad exponentem $a$ pertinet etiam $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ad eundem pertinebit, quandoquidem si $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ad $a' < a$ pertineret, manifesto jam potestas $(a^{\frac{t}{\alpha}} + mp)^{a'}$ unitati esset congrua. Erit igitur $a^{\frac{t}{\alpha}} - 1$ ad $p$ primus adeoque (§. 57.) summa terminorum quos modo diximus per $p$ erit divisibilis, ergo etiam

$$a^{k}(1 + a^{\frac{t}{\alpha}} + a^{\frac{2t}{\alpha}} + \ldots + a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}).$$

Quia $\alpha^2$ est divisor exponentis $t$ multitudo numerorum ad $t$ primorum ipsius $\alpha$ erit multiplum; quando autem alius numerus ad $t$ primus ab illorum

$$k,\ k + \frac{t}{\alpha},\ k + \frac{2t}{\alpha}, \ldots k + \frac{(\alpha-1)t}{\alpha}$$

quoque diversus $k'$ assumitur, simili modo productum

$$a^{k'}(1 + a^{\frac{t}{\alpha}} + a^{\frac{2t}{\alpha}} + \ldots + a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}})$$

per $p$ divisibilis erit. Hoc modo progredi licebit, quoad omnes ad $t$ primi sunt exhausti, quo facto omnes habebuntur numeri ad exponentem $t$ pertinentes, quorumque summa per $p$ divisibilis erit.

Secundus casus. Sit $t$ per nullum quadratum divisibilis vel formae $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, denotantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ numeros primos inter se diversos. Sed pro quattuor modo factoribus demonstraturos nos esse theorema observandum est, quandoquidem nihil impediet, quominus argumentatio ad quotcunque extendatur factores. Dico productum

$$(a^{\alpha\beta\gamma} + a^{2\alpha\beta\gamma} + a^{3\alpha\beta\gamma} + \ldots + a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma})$$
$$(a^{\alpha\beta\delta} + a^{2\alpha\beta\delta} + a^{3\alpha\beta\delta} + \ldots + a^{(\gamma'-1)\alpha\beta\delta})$$
$$(a^{\alpha\gamma\delta} + a^{2\alpha\gamma\delta} + a^{3\alpha\gamma\delta} \text{ etc. } + a^{(\beta-1)\alpha\gamma\delta})$$
$$(a^{\beta\gamma\delta} + a^{2\beta\gamma\delta} + a^{3\beta\gamma\delta} \text{ etc. } + a^{(\alpha-1)\beta\gamma\delta})$$

designante $a$ numerum ad exponentem $t$ pertinentem summae omnium numerorum ad exponentem $t$ pertinentium sec. $p$ esse congruum. Quencunque enim hujusce producti terminum exhiberi licet hoc modo

Digitized by Google

$$a^{\psi\alpha\beta\gamma+\psi'\alpha\beta\delta+\psi''\alpha\gamma\delta+\psi'''\beta\gamma\delta}$$

quam formam habere facile perspicietur. Cujus potestatis exponens ad $t = \alpha\beta\gamma\delta$ primus erit, quoniam nullus horum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ metiri eum potest. Omnes igitur producti de quo agitur termini ad exponentem $t$ pertinent (§. 21.) et quidem omnes sunt incongrui. Nam si haberetur

$$a^{\psi\alpha\beta\gamma+\psi'\alpha\beta\delta+\psi''\alpha\gamma\delta+\psi'''\beta\gamma\delta} \equiv a^{\chi\alpha\beta\gamma+\chi'\alpha\beta\delta+\chi''\alpha\gamma\delta+\chi'''\beta\gamma\delta}$$

esset (§. 10.)

$$(\psi-\chi)\alpha\beta\gamma + (\psi'-\chi')\alpha\beta\delta + (\psi''-\chi'')\alpha\gamma\delta + (\psi'''-\chi''')\beta\gamma\delta \equiv 0$$

secundum modulum $t$. Atqui ex. gr. $\psi < \delta$, $\chi < \delta$, $\psi - \chi < \delta$, et $(\psi-\chi)\alpha\beta\gamma$ per $\delta$ non divisibilis neque vero summa de qua agitur, adeoque haec summa etiam per $t$ dividi nequit. Jam vero multitudo illius producti terminorum, ut ex combinationum doctrina patet, erit $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1)$ atque etiam multitudo numerorum ad $t$ primorum est $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1)$, qua re omnes omnino ad exponentem $t$ pertinentes numeri producto exhibentur.

Quia $a$ ad exponentem $t = \alpha\beta\gamma\delta$ pertinet, termini

$$a^{\alpha\beta\gamma}, a^{2\alpha\beta\gamma}, a^{3\alpha\beta\gamma}, \ldots a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma}, 1$$

periodum constituent, et quoniam ut antea $a^{\alpha\beta\gamma}-1$ ad $p$ primum accipi licet, summa horum per $p$ divisibilis erit, adeoque

$$a^{\alpha\beta\gamma} + a^{2\alpha\beta\gamma} + a^{3\alpha\beta\gamma} + \ldots + a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma} \equiv -1 \pmod{p}$$

Ex eadem causa reliquorum factorum quisque unitati negative sumptae est congruus. Quando igitur multitudo factorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$... est par, productum i. e. summa omnium numerorum, qui ad exponentem $t$ pertinent, unitati positive sumptae congruum fit, quando vero impar unitati negative sumptae. In nostro quidem casu unitas positive erit sumenda.

Exempl. Ad exponentem 6 sec. mod. 19 pertinent numeri 8, 12 quorum summa $\equiv 1 \pmod{19}$.

Coroll. Quando $t = p-1$ theorema ita debebit enunciari: Summa omnium radicum primitivarum moduli primi est $\equiv 0$ quando $p-1$ per quadratum aliquod divisibilis est, quando vero per nullum quadratum divisibilis summa erit $\equiv \pm 1$ prout multitudo factorum ipsius $p-1$ primorum est $\begin{matrix}\text{par}\\\text{impar}\end{matrix}$

Exempl. 2 est radix primitiva mod. 19 et 18 per quadratum divisibilis, qua re summa radicum primitivarum

$$2^1 . 2^5 . 2^7 . 2^{11} . 2^{13} . 2^{17}$$

per 19 divisibilis.

§. 63. Hancce opportunitatem praetermittere non debeo, quin theorema demonstrem, quod primo quidem aspectu demonstratu difficillimum videtur. Est vero hoc: — 3 est residuum quadraticum numeri cujusque primi, qui forma continetur $12k+7$ vel $12k+1$, non-residuum vero formarum $12k+5$, $12k+11$. Quo facto sequitur ex §.31., 3 fore residuum numeri primi

Digitized by Google

formae $12k+1$ vel $12k+11$, non-residuum vero harum $12k+5$, $12k+7$.

Primo observamus ad exponentem 3 pertinere duos numeros, quoniam tot sunt ad 3 primi. Debet autem 3 ipsum $p-1$ metiri, designante $p$ modulum primum, qua re $p$ erit formae $3k+1$, quae has involvit $12k+1$, $12k+7$. Numeri ad exponentem 3 pertinentes sec. mod. $p=12k+1$, 7 sint $\alpha$, $\beta$ eritque (§. 62.) $\alpha+\beta\equiv-1$ atque (§. 61.) $\alpha\beta\equiv 1$ sec. $p$. Ex quo sequitur $\beta^2+\beta\equiv-1$, $4\beta^2+4\beta\equiv-4$, $4\beta^2+4\beta+1\equiv-3$ i. e. $(2\beta+1)^2\equiv-3$. Quando igitur 3 ipsum $p-1$ metiatur i. e. quando $p$ est unius formarum $12k+1$, $12k+7$ semper $-3$ erit residuum quadraticum hujusce numeri primi.

Ceterum observari licet, semper numeros ad exponentem 3 pertinentes inveniri posse. Repertis enim residuis mod. $p$ quadraticis, intelligetur, quod quadratum residuo $-3$ vel $p-3$ respondeat; hujus radix sit $w$ eritque $2\beta+1\equiv\pm w$ (mod. $p$), quae congruentia primi gradus facillime poterit resolvi.

Exempli gr. Ut numeri ad exp. 3 sec. 31 determinentur pertinentes residua inveniri quadratica mod. 31 oportebit. Sunt haec $1.4.9.16.25.5.18.2.19.7.28.20.14.10.8$. Residuo 28 respondebit quadratum $11^2$ ergo congruentia resolvenda

$$2\beta+1\equiv\pm 11 \text{ (mod. 31)}.$$

$$\text{Est vero } 2\beta\equiv\left.\begin{matrix}10\\-12\end{matrix}\right\},\ \beta\equiv\left.\begin{matrix}5\\-6\end{matrix}\right\} \text{ vel } \left.\begin{matrix}5\\25\end{matrix}\right\}$$

ita ut 5 et 25 ad exponentem 3 sec. mod. 21 pertineant.

---

# II.

## Ueber Cauchy's Interpolationsmethode.

Von

dem Herausgeber.

---

### §. 1.

Interpolationen sind für die Physik und Astronomie, überhaupt für alle Naturwissenschaften, welche die Anwendung der Mathematik gestatten, von so grosser Wichtigkeit, dass jeder Versuch, die bei denselben vorkommenden Rechnungen zu erleichtern und überhaupt die Methode im Allgemeinen zu vervollkommnen, willkommen sein muss. Cauchy's von Herrn Moigno in seinen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'a-

Digitized by Google

près les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L. Cauchy. Tome I. Paris. 1840. p. 513 mitgetheilte Interpolationsmethode scheint uns in den vorher angedeuteten Beziehungen so Vieles zu leisten, überhaupt in jeder Rücksicht so vortrefflich, in Deutschland aber noch so wenig bekannt zu sein, dass wir es für unsere Pflicht halten, durch eine ausführliche und deutliche Darstellung derselben, die wir in diesem Aufsatze zu geben versuchen werden, zu ihrer möglichst allgemeinen Verbreitung nach Kräften beizutragen, wobei wir zugleich auch vorläufig bemerken, dass wir bald in einem andern Aufsatze eine von uns versuchte Anwendung dieser schönen Methode auf einen physikalischen Gegenstand mittheilen zu können hoffen.

## §. 2.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, dass die von der veränderlichen Grösse $x$ abhängende Function $y$ sich, indem

$$u,\ v,\ w,\ z,\ \ldots.$$

gewisse ihrer Form nach gegebene Functionen von $x$, und

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots.$$

gewisse constante, ihren Werthen nach aber unbekannte Coefficienten bezeichnen, in die convergirende Reihe

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

entwickeln lasse, und stellen uns, wenn eine hinreichende Anzahl aus Versuchen oder Beobachtungen abgeleiteter Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots.\ y_n$$

der Function $y$ gegeben ist, welche den ebenfalls gegebenen Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots.\ x_n$$

der veränderlichen Grösse $x$ entsprechen, die Aufgabe:

1) zu ermitteln, wie viele Glieder der Reihe

$$au,\ bv,\ cw,\ dz,\ \ldots.$$

vom Anfange an man beibehalten muss, um durch deren Summirung einen hinreichend genäherten Werth der Function $y$ zu erhalten, dessen Abweichung von dem wahren Werthe dieser Function als unmerklich betrachtet werden kann, d. h. sich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler hält;

2) die Werthe der constanten Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots.$$

der beibehaltenen Glieder der obigen Reihe zu bestimmen.

## §. 3.

Zuvörderst wollen wir die Bedeutung einer Bezeichnung erklären, von welcher wir im Folgenden der Kürze wegen häufig Gebrauch machen werden.

Digitized by Google

Wenn nämlich

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

und

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_n$$

überhaupt gewisse gegebene Grössen, in beiden Reihen in gleicher Anzahl, bezeichnen; so soll den Symbolen $Su_n$ und $\Sigma v_n$ immer die folgende Bedeutung beigelegt werden. Das Symbol $Su_n$ bezeichnet jederzeit die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n,$$

wobei man sich jedoch diese Summe immer auf solche Weise gebildet zu denken hat, dass man die Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n,$$

jenachdem sie positiv oder negativ sind, mit $+1$ oder mit $-1$ multiplicirt und alle auf diese Art erhaltenen Producte zu einander addirt. Wenn man nun aber ferner ganz mit denselben Factoren, mit denen man vorher die Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

multiplicirt hat, dann auch respective die Grössen

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_n$$

multiplicirt, und alle auf diese Art sich ergebenden Producte zu einander addirt; so soll die Summe, welche man dadurch erhält, im Folgenden immer durch $\Sigma v_n$ bezeichnet werden, wobei man also wohl fest zu halten hat, dass $\Sigma v_n$ keinesweges die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_n$$

bezeichnet. In einem ähnlichen Verhältnisse wie die durch $Su_n$ und $\Sigma v_n$ bezeichneten Grössen, sollen im Folgenden auch die durch $S_1u_n$ und $\Sigma_1v_n$, $S_2u_n$ und $\Sigma_2v_n$, $S_3u_n$ und $\Sigma_3v_n$, u. s. w. oder ähnliche Symbole bezeichneten Grössen zu einander stehen.

## §. 4.

Indem wir nun der Auflösung unserer Aufgabe näher treten, bemerken wir zuvörderst sogleich, dass die Bedingungen derselben wegen der vorausgesetzten Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots,$$

wenn wir die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

der veränderlichen Grösse $x$ entsprechenden Werthe der Functionen

$$u,\ v,\ w,\ z,\ \ldots$$

durch

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n;$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_n;$$

Digitized by Google

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ \ldots\ w_n;$$

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ \ldots\ z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen, zwischen den constanten Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$

unmittelbar die folgenden $n$ Gleichungen:

$$y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + dz_1 + \ldots,$$
$$y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + dz_2 + \ldots,$$
$$y_3 = au_3 + bv_3 + cw_3 + dz_3 + \ldots.$$

u. s. w.

$$y_n = au_n + bv_n + cw_n + dz_n + \ldots$$

liefern, welche in Bezug auf $a$, $b$, $c$, $d$, .... als Gleichungen des ersten Grades oder sogenannte lineare Gleichungen zu betrachten sind.

Vernachlässigen wir nun als eine erste Annäherung vorläufig die sämmtlichen Coefficienten $b$, $c$, $d$, ...., oder reduciren wir, was dasselbe ist, die Reihe, durch welche $y$ ausgedrückt wird, auf ihr erstes Glied; so ist

$$y = au$$

der allgemeine genäherte Werth von $y$, und wir haben daher jetzt das folgende System von Gleichungen:

$$y_1 = au_1,\ y_2 = au_2,\ y_3 = au_3,\ \ldots\ y_n = au_n.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen auf beiden Seiten mit gewissen willkührlichen Coefficienten, nämlich respective mit den Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_n;$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$ak_1u_1 = k_1y_1,$$
$$ak_2u_2 = k_2y_2,$$
$$ak_3u_3 = k_3y_3,$$

u. s. w.

$$ak_nu_n = k_ny_n;$$

durch deren Addition sich ferner die Gleichung

$$a(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n)$$
$$= k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n,$$

also

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

ergiebt. Bezeichnen wir nun die in den durch Versuche oder Beobachtungen gefundenen Werthen

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_n$$

Digitized by Google

von $y$ steckenden Fehler respective durch

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \ldots\ \varepsilon_n,$$

so dass also die wahren entsprechenden Werthe von $y$

$$y_1+\varepsilon_1,\ y_2+\varepsilon_2,\ y_3+\varepsilon_3,\ \ldots\ y_n+\varepsilon_n$$

sind: so ist nach dem Vorhergehenden der wahre Werth von $a$ offenbar eigentlich

$$\frac{k_1(y_1+\varepsilon_1)+k_2(y_2+\varepsilon_2)+k_3(y_3+\varepsilon_3)+\ldots+k_n(y_n+\varepsilon_n)}{k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n},$$

und der in der Bestimmung

$$a=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3+\ldots+k_ny_n}{k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n}$$

von $a$ steckende Fehler ist daher augenscheinlich

$$\frac{k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3+\ldots+k_n\varepsilon_n}{k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n}.$$

Die Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_n$$

sind allerdings ganz willkührlich; jedoch hat man des Folgenden wegen zu beachten, dass man den absoluten Werth keines derselben grösser als die Einheit anzunehmen braucht, weil es, um dies in allen Fällen zu bewirken, bloss nöthig ist, dass man alle Coefficienten durch den absoluten Werth desjenigen unter ihnen, welcher den grössten absoluten Werth hat, dividirt, wodurch der Werth von $a$ und des in demselben steckenden Fehlers offenbar gar keine Aenderung erleidet.

Bei der absoluten Unkenntniss, in welcher man sich rücksichtlich der Fehler

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \ldots\ \varepsilon_n$$

befindet, kann man nun, um die willkührlichen Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_n$$

auf die vortheilhafteste Weise zu bestimmen, offenbar nichts weiter thun, als dass man dieselben so zu bestimmen sucht, dass der absolute Werth des Nenners des Bruchs

$$\frac{k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3+\ldots+k_n\varepsilon_n}{k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n},$$

durch welchen der in der Bestimmung

$$a=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3+\ldots+k_ny_n}{k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n}$$

von $a$ steckende Fehler im Allgemeinen ausgedrückt wird, seinen grössten Werth erhält. Dies erreicht man aber dadurch, dass man die in Rede stehenden Coefficienten so bestimmt, dass der Nenner

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+\ldots+k_nu_n$$

in die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

Digitized by Google

übergeht, d. h. man muss für

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_n$$

die Grösse $+1$ oder $-1$ setzen, jenachdem die Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

positiv oder negativ sind, wobei zugleich erhellet, dass wenn man dies thut, auch der absolute Werth des Zählers

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + \ldots + k_n\varepsilon_n$$

nie die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \ldots\ \varepsilon_n,$$

d. h. das Maximum, welches dieser absolute Werth überhaupt erreichen kann *), übersteigt. Wendet man also jetzt die Bezeichnung, deren Bedeutung im vorigen Paragraphen ausführlich erklärt worden ist, an; so liefert wegen der oben bewiesenen Gleichung

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

offenbar die Formel

$$a = \frac{\Sigma y_n}{\Sigma u_n}$$

die vortheilhafteste Bestimmung von $a$, so weit sich wenigstens bei der völligen Unkenntniss, in welcher man sich rücksichtlich der Werthe der Fehler

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \ldots\ \varepsilon_n$$

befindet, hierüber urtheilen lässt, und für $y$ erhält man nun den genäherten Ausdruck

$$y = \frac{\Sigma y_n}{\Sigma u_n}\, u,$$

oder, wenn

$$u' = \frac{u}{\Sigma u_n}$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$y = u'\Sigma y_n.$$

Wäre überhaupt $u = 1$, also $y = a$, d. h. $y$ eine constante Grösse, wenigstens näherungsweise, so wäre offenbar

$$\Sigma u_n = n,$$

und folglich $u' = \frac{1}{n}$, also

$$y = \frac{1}{n}\,\Sigma y_n,$$

d. i., weil in diesem Falle offenbar

*) Wo man fest zu halten hat, dass nach dem Obigen in allen Fällen der absolute Werth keines der Coefficienten $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots k_n$ grösser als die Einheit angenommen zu werden braucht.

Digitized by Google

$$\Sigma y_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n$$

ist,

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n}{n},$$

wodurch wir also in dem vorliegenden Falle unmittelbar auf das bekannte Princip des arithmetischen Mittels, dessen man sich in den Naturwissenschaften so häufig bedient, geführt werden.

Wir wollen jetzt in völliger Genauigkeit

$$y = u' \Sigma y_n + \Delta y,$$

also

$$\Delta y = y - u' \Sigma y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta y$, die sich, weil man die den in Rede stehenden Werthen von $x$ entsprechenden Werthe von $y$ und $u$ kennt, mittelst des obigen Ausdrucks von $\Delta y$ jederzeit berechnen lassen, respective durch

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \Delta y_4, \ldots \Delta y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, ...., nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$y = u' \Sigma y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man weiter das folgende Verfahren einschlagen.

Weil

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma y_n = a \Sigma u_n + b \Sigma v_n + c \Sigma w_n + d \Sigma z_n + \ldots.,$$

und folglich, wenn man

$$v = u' \Sigma v_n + \Delta v,$$
$$w = u' \Sigma w_n + \Delta w,$$
$$z = u' \Sigma z_n + \Delta z,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar jederzeit

$$\Sigma u_n = S u_n,$$

also nach dem Obigen

$$u' \Sigma u_n = u' S u_n = u$$

ist,

$$\Delta y = b \Delta v + c \Delta w + d \Delta z + \ldots.$$

Digitized by Google

Die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta v$, $\Delta w$, $\Delta z$, ...., welche wir respective durch

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \Delta v_3,\ \Delta v_4,\ \ldots\ \Delta v_n;$$
$$\Delta w_1,\ \Delta w_2,\ \Delta w_3,\ \Delta w_4,\ \ldots\ \Delta w_n;$$
$$\Delta z_1,\ \Delta z_2,\ \Delta z_3,\ \Delta z_4,\ \ldots\ \Delta z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,$$
$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,$$
$$\Delta z = z - u'\Sigma z_n,$$

u. s. w.

jederzeit berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta y = b\Delta v + c\Delta w + d\Delta z + \ldots.$$

jetzt offenbar wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir vorher auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$b = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n}$$

und

$$\Delta y = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n}\,\Delta v,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1 \Delta v_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta y = v'\Sigma_1 \Delta y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta y = v'\Sigma_1 \Delta y_n + \Delta^2 y,$$

also

$$\Delta^2 y = \Delta y - v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta^2 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

Digitized by Google

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4, \ldots \Delta^2 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, .... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta y = v' \Sigma_1 \Delta y_n,$$

also

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man ferner das folgende Verfahren einschlagen.

Weil

$$\Delta y = b \Delta v + c \Delta w + d \Delta z + \ldots.$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma_1 \Delta y_n = b \Sigma_1 \Delta v_n + c \Sigma_1 \Delta w_n + d \Sigma_1 \Delta z_n + \ldots.,$$

und folglich, wenn man

$$\Delta w = v' \Sigma_1 \Delta w_n + \Delta^2 w,$$
$$\Delta z = v' \Sigma_1 \Delta z_n + \Delta^2 z,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar

$$\Sigma_1 \Delta v_n = S_1 \Delta v_n,$$

also nach dem Obigen

$$v' \Sigma_1 \Delta v_n = v' S_1 \Delta v_n = \Delta v$$

ist,

$$\Delta^2 y = c \Delta^2 w + d \Delta^2 z + \ldots.$$

Die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots . x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta^2 w$, $\Delta^2 z$, ...., welche wir respective durch

$$\Delta^2 w_1,\ \Delta^2 w_2,\ \Delta^2 w_3,\ \Delta^2 w_4, \ldots \Delta^2 w_n;$$
$$\Delta^2 z_1,\ \Delta^2 z_2,\ \Delta^2 z_3,\ \Delta^2 z_4, \ldots \Delta^2 z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta^2 w = \Delta w - v' \Sigma_1 \Delta w_n,$$
$$\Delta^2 z = \Delta z - v' \Sigma_1 \Delta z_n,$$

u. s. w.

jederzeit berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta^2 y = c \Delta^2 w + d \Delta^2 z + \ldots.$$



Digitized by Google

jetzt wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir oben auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$c = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n}$$

und

$$\Delta^2 y = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n} \Delta^2 w,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2 \Delta^2 w_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + \Delta^2 y,$$

also

$$\Delta^2 y = \Delta^2 y - w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta^2 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4, \ldots \Delta^2 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, .... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

also

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man weiter auf folgende Art verfahren.

Weil

$$\Delta^2 y = c \Delta^2 w + d \Delta^2 z + \ldots.$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma_2 \Delta^2 y_n = c \Sigma_2 \Delta^2 w_n + d \Sigma_2 \Delta^2 z_n + \ldots.,$$

Digitized by Google

und folglich, wenn man

$$\Delta^2 z = w' \Sigma_2 \Delta^2 z_n + \Delta^2 z,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar

$$\Sigma_2 \Delta^2 w_n = S_2 \Delta^2 w_n,$$

also nach dem Obigen

$$w' \Sigma_2 \Delta^2 w_n = w' S_2 \Delta^2 w_n = \Delta^2 w$$

ist.

$$\Delta^2 y = d \Delta^2 z + \ldots\ldots$$

Die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta^2 z, \ldots$, welche wir respective durch

$$\Delta^2 z_1,\ \Delta^2 z_2,\ \Delta^2 z_3,\ \Delta^2 z_4,\ \ldots\ \Delta^2 z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta^2 z = \Delta^2 z - w' \Sigma_2 \Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

jederzeit berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta^2 y = d \Delta^2 z + \ldots\ldots$$

jetzt wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir oben auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$d = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 z_n}$$

und

$$\Delta^2 y = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 z_n} \Delta^2 z,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$z' = \frac{\Delta^2 z}{S_2 \Delta^2 z_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta^2 y = z' \Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta^3 y = z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n + \Delta^4 y,$$

also



Digitized by Google

$$\Delta^4 y = \Delta^2 y - z' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

von $x$ entsprechenden Werthe von $\Delta^4 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

$$\Delta^4 y_1,\ \Delta^4 y_2,\ \Delta^4 y_3,\ \Delta^4 y_4,\ \ldots\ \Delta^4 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, .... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta^3 y = z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n,$$

also

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man wieder ein ganz ähnliches Verfahren wie oben anwenden, und auf diese Art überhaupt immer weiter gehen, bis man auf eine Reihe von Grössen von der Form

$$\Delta^m y_1,\ \Delta^m y_2,\ \Delta^m y_3,\ \Delta^m y_4,\ \ldots\ \Delta^m y_n$$

kommt, die sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten.

## §. 5.

Wir wollen nun die Hauptmomente der vorhergehenden Interpolationsmethode hier nochmals in der Kürze übersichtlich zusammenfassen, ohne die Erklärung der Bedeutung der gebrauchten Symbole zu wiederholen.

1. Angenommen wird, dass die Function $y$ sich in eine convergirende Reihe von der Form

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

entwickeln lässt, und dass die den $n$ gegebenen Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

der veränderlichen Grösse $x$, von welcher die Function $y$ und die Functionen $u$, $v$, $w$, $z$, ..., abhängen, entsprechenden Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_n$$

der Function $y$ gegeben sind.

2. Dies vorausgesetzt, bestimme man zuerst die Grösse $u'$ mittelst der Formel

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

und die Grössen

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3,\ \Delta y_4,\ \ldots\ \Delta y_n$$

mittelst der Formel

Digitized by Google

$$\Delta y = y - u'\Sigma y_n,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n$$

setzen.

3. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta v$ und $v'$ mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,\ v' = \frac{\Delta v}{S_1 \Delta v_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4,\ \ldots\ \Delta^2 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^2 y = \Delta y - v'\Sigma_1 \Delta y_n,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen.

4. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta w$, $\Delta^2 w$ und $w'$ mittelst der Formeln

$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,\ \Delta^2 w = \Delta w - v'\Sigma_1 \Delta w_n,\ w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2 \Delta^2 w_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4,\ \ldots\ \Delta^2 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^2 y = \Delta^2 y - w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n + w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen.

Digitized by Google

5. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta z$, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$ und $z'$ mittelst der Formeln

$$\Delta z = z - w'\Sigma z_n, \quad \Delta^2 z = \Delta z - v'\Sigma_1 \Delta z_n, \quad \Delta^3 z = \Delta^2 z - w'\Sigma_2 \Delta^2 z_n,$$

$$z' = \frac{\Delta^3 z}{S_3 \Delta^3 z_n}$$

und die Grössen

$$\Delta^4 y_1, \ \Delta^4 y_2, \ \Delta^4 y_3, \ \Delta^4 y_4, \ \ldots \ \Delta^4 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ \ldots \ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass sich diese Grössen sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = w'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n + w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n + z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen.

6. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar.

## §. 6.

Auf die vorhergehende Weise lehrt Herr Moigno a. a. O. nach Cauchy die Anordnung der Rechnung. Man könnte aber, wie es uns scheint, auch auf folgende Art verfahren, wobei wir bemerken, dass nach dem Obigen, wie leicht erhellet,

$$w' = \frac{a}{\Sigma y_n} u,$$

$$v' = \frac{b}{\Sigma_1 \Delta y_n} \Delta v,$$

$$w' = \frac{c}{\Sigma_2 \Delta^2 y_n} \Delta^2 w,$$

$$z' = \frac{d}{\Sigma_3 \Delta^3 y_n} \Delta^3 z,$$

u. s. w.

ist.

1. Angenommen wird wieder, dass die Function $y$ sich in eine convergirende Reihe von der Form

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

entwickeln lässt, und dass die den $n$ gegebenen Werthen

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ \ldots \ x_n$$

der veränderlichen Grösse $x$, von welcher die Function $y$ und die Functionen $u$, $v$, $w$, $z$, .... abhängen, entsprechenden Werthe

$$y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4, \ \ldots \ y_n$$

der Function $y$ gegeben sind.

Digitized by Google

2. Dies vorausgesetzt, bestimme man zuerst die Grösse $a$ mittelst der Formel

$$a = \frac{\Sigma y_n}{S u_n},$$

und die Grössen

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3,\ \Delta y_4, \ldots \Delta y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta y = y - au,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unveränderlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au$$

setzen.

3. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta v$ und $b$ mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - \frac{\Sigma v_n}{S u_n} u,\ b = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4, \ldots \Delta^2 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^2 y = \Delta y - b \Delta v,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$y = au + b \Delta v$$

setzen.

4. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta w$, $\Delta^2 w$ und $c$ mittelst der Formeln

$$\Delta w = w - \frac{\Sigma w_n}{S u_n} u,\ \Delta^2 w = \Delta w - \frac{\Sigma_1 \Delta w_n}{S_1 \Delta v_n} \Delta v,\ c = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^3 y_1,\ \Delta^3 y_2,\ \Delta^3 y_3,\ \Delta^3 y_4, \ldots \Delta^3 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - c \Delta^2 w,$$

Digitized by Google

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au + b\Delta v + c\Delta^2 w$$

setzen.

5. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man $\Delta z$, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$ und $d$ mittelst der Formeln

$$\Delta z = z - \frac{\Sigma z_n}{S u_n} u,\ \Delta^2 z = \Delta z - \frac{\Sigma_1 \Delta z_n}{S_1 \Delta v_n} \Delta v,\ \Delta^3 z = \Delta^2 z - \frac{\Sigma_2 \Delta^2 z_n}{S_2 \Delta^2 w_n} \Delta^2 w,$$

$$d = \frac{\Sigma_3 \Delta^3 y_n}{S_3 \Delta^3 z_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^4 y_1,\ \Delta^4 y_2,\ \Delta^4 y_3,\ \Delta^4 y_4,\ \ldots\ \Delta^4 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - d\Delta^3 z,$$

indem man in derselben für $x$ nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au + b\Delta v + c\Delta^2 w + d\Delta^3 z$$

setzen.

6. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen.

Die beste Art der Ausführung der nöthigen Rechnungen und manche Abkürzungen bei denselben werden sich einem Jeden leicht von selbst darbieten, weshalb wir hier darüber der Kürze wegen nichts weiter sagen. Häufig wird man insbesondere schon vorher berechnete Grössen bei den folgenden Rechnungen wieder in Anwendung bringen können.

## §. 7.

Bei weitläufigen Rechnungen ist es immer nöthig, wenigstens im höchsten Grade vortheilhaft, im Besitze von Bedingungsgleichungen zu sein, mit deren Hülfe man die Richtigkeit der geführten Rechnung prüfen kann. Solche Bedingungsgleichungen lassen sich aber aus dem Vorhergehenden eine grössere Anzahl ohne Schwierigkeit herleiten, wobei man nur immer die den gebrauchten Symbolen beigelegte Bedeutung wohl vor Augen zu behalten hat.

Weil nach dem Obigen bekanntlich zuvörderst

$$u' = \frac{u}{S u_n}$$

Digitized by Google

ist, so ist offenbar

$$Su'_n = \frac{Su_n}{Su_n},$$

und folglich

$$Su'_n = 1.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,$$
$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,$$
$$\Delta z = z - u'\Sigma z_n,$$

u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta v_n = \Sigma v_n - \Sigma u'_n \Sigma v_n,$$
$$\Sigma\Delta w_n = \Sigma w_n - \Sigma u'_n \Sigma w_n,$$
$$\Sigma\Delta z_n = \Sigma z_n - \Sigma u'_n \Sigma z_n,$$

u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma u'_n = \frac{\Sigma u_n}{Su_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma u_n = Su_n$ ist,

$$\Sigma u'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta v_n = 0,\ \Sigma\Delta w_n = 0,\ \Sigma\Delta z_n = 0, \ldots.$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1 \Delta v_n},$$

also offenbar

$$\Sigma v'_n = \frac{\Sigma\Delta v_n}{S_1\Delta v_n},\ S_1 v'_n = \frac{S_1\Delta v_n}{S_1\Delta v_n};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma v'_n = 0,\ S_1 v'_n = 1.$$

Weil nun

$$\Delta^2 w = \Delta w - v'\Sigma_1\Delta w_n,$$
$$\Delta^2 z = \Delta z - v'\Sigma_1\Delta z_n,$$

u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta^2 w_n = \Sigma\Delta w_n - \Sigma v'_n \Sigma_1 \Delta w_n,$$
$$\Sigma\Delta^2 z_n = \Sigma\Delta z_n - \Sigma v'_n \Sigma_1 \Delta z_n,$$

u. s. w.

Digitized by Google

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\Sigma\Delta^2 w_n = 0,\ \Sigma\Delta^2 z_n = 0, \ldots.$$

Ferner ergiebt sich aus den obigen Gleichungen

$$\Sigma_1\Delta^2 w_n = \Sigma_1\Delta w_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1\Delta w_n,$$
$$\Sigma_1\Delta^2 z_n = \Sigma_1\Delta z_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1\Delta z_n,$$

u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1\Delta v_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma_1 v'_n = \frac{\Sigma_1\Delta v_n}{S_1\Delta v_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma_1\Delta v_n = S_1\Delta v_n$ ist,

$$\Sigma_1 v'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_1\Delta^2 w_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^2 z_n = 0, \ldots.$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2\Delta^2 w_n},$$

also offenbar

$$\Sigma w'_n = \frac{\Sigma\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},\ \Sigma_1 w'_n = \frac{\Sigma_1\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},\ S_2 w'_n = \frac{S_2\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma w'_n = 0,\ \Sigma_1 w'_n = 0,\ S_2 w'_n = 1.$$

Weil nun

$$\Delta^2 z = \Delta^2 z - w'\Sigma_2\Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta^2 z_n = \Sigma\Delta^2 z_n - \Sigma w'_n \Sigma_2\Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta^2 z_n = 0, \ldots.$$

Ferner ergiebt sich aus den obigen Gleichungen

$$\Sigma_1\Delta^2 z_n = \Sigma_1\Delta^2 z_n - \Sigma_1 w'_n \Sigma_2\Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_1\Delta^2 z_n = 0, \ldots.$$

Endlich erhält man auch

Digitized by Google

$$\Sigma_2\Delta^2 z_n = \Sigma_2\Delta^2 z_n - \Sigma_2 w'_n \Sigma_2\Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2\Delta^2 w_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma_2 w'_n = \frac{\Sigma_2\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma_2\Delta^2 w_n = S_2\Delta^2 w_n$ ist,

$$\Sigma_2 w'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_2\Delta^2 z_n = 0, \ldots\ldots$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$z' = \frac{\Delta^2 z}{S_2\Delta^2 z_n},$$

also offenbar

$$\Sigma z'_n = \frac{\Sigma\Delta^2 z_n}{S_1\Delta^2 z_n},\ \Sigma_1 z'_n = \frac{\Sigma_1\Delta^2 z_n}{S_1\Delta^2 z_n},\ \Sigma_2 z'_n = \frac{\Sigma_2\Delta^2 z_n}{S_2\Delta^2 z_n},$$

$$S_2 z'_n = \frac{S_2\Delta^2 z_n}{S_2\Delta^2 z_n},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma z'_n = 0,\ \Sigma_1 z'_n = 0,\ \Sigma_2 z'_n = 0,\ S_2 z'_n = 1.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Man kann aber auch noch andere Bedingsgleichungen finden. Weil nämlich nach dem Obigen bekanntlich

$$\Delta y = y - u'\Sigma y_n$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta y_n = \Sigma y_n - \Sigma u'_n \Sigma y_n,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma u'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta y_n = 0.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\Delta^2 y = \Delta y - v'\Sigma_1\Delta y_n$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta^2 y_n = \Sigma\Delta y_n - \Sigma v'_n \Sigma_1\Delta y_n,$$

$$\Sigma_1\Delta^2 y_n = \Sigma_1\Delta y_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1\Delta y_n;$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta y_n = 0,\ \Sigma v'_n = 0,\ \Sigma_1 v'_n = 1$$

ist,

Digitized by Google

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Obigen

$$\Delta^3 y = \Delta^3 y - w'\Sigma_2\Delta^3 y_n,$$

und folglich

$$\Sigma\Delta^3 y_n = \Sigma\Delta^3 y_n - \Sigma w'_n\Sigma_2\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_1\Delta^3 y_n = \Sigma_1\Delta^3 y_n - \Sigma_1 w'_n\Sigma_2\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_2\Delta^3 y_n = \Sigma_2\Delta^3 y_n - \Sigma_2 w'_n\Sigma_2\Delta^3 y_n;$$

also ist, weil nach dem Obigen

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma w'_n = 0,\ \Sigma_1 w'_n = 0,\ \Sigma_2 w'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_2\Delta^3 y_n = 0.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - x'\Sigma_1\Delta^3 y_n,$$

folglich

$$\Sigma\Delta^4 y_n = \Sigma\Delta^3 y_n - \Sigma x'_n\Sigma_1\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_1\Delta^4 y_n = \Sigma_1\Delta^3 y_n - \Sigma_1 x'_n\Sigma_1\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_2\Delta^4 y_n = \Sigma_2\Delta^3 y_n - \Sigma_2 x'_n\Sigma_1\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_3\Delta^4 y_n = \Sigma_3\Delta^3 y_n - \Sigma_3 x'_n\Sigma_1\Delta^3 y_n;$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0,\ \Sigma_2\Delta^3 y_n = 0;$$
$$\Sigma x'_n = 0,\ \Sigma_1 x'_n = 0,\ \Sigma_2 x'_n = 0,\ \Sigma_3 x'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta^4 y_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^4 y_n = 0,\ \Sigma_2\Delta^4 y_n = 0,\ \Sigma_3\Delta^4 y_n = 0.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Die Vortheile, welche die in diesem Aufsatze entwickelte Interpolationsmethode gewährt, hier noch besonders aus einander zu setzen, halten wir für völlig überflüssig, da dieselben zu sehr ganz von selbst in die Augen springen. Jedenfalls bilden aber die vorher bewiesenen Bedingungsgleichungen ein nicht zu übersehendes Hauptmoment bei dieser schönen Methode, die wir den Physikern zu recht häufiger und fleissiger Anwendung empfehlen möchten. Auch hoffen wir, wie schon im Eingange erwähnt worden ist, bald selbst eine Anwendung derselben auf einen wichtigen physikalischen Gegenstand im Archive mittheilen zu können.

Digitized by Google

# III.

## Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ auf einfache Weise entwickelt aus der Grundeigenschaft $v+v'=2a$.

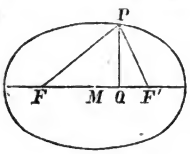
Von

Herrn Dr. Fr. Heinen,

Director der Realschule zu Düsseldorf.

---

Es seien in unten stehender Figur $M$ der Mittelpunkt einer




Ellipse; $F$, $F'$ ihre Brennpunkte, $FP=v$, $F'P=v'$ die nach einem Punkte $P$ derselben gezogenen Leitstrahlen, das von $P$ auf die grosse Axe $=2a$ gefällte Perpendikel $PQ=y$, das Stück $MQ$ der grossen Axe $=x$, und $MF=MF'=\sqrt{a^2-b^2}=e$. Alsdann ist

$$PF^2-FQ^2=PF'^2-F'Q^2,$$

oder $$PF^2-PF'^2=FQ^2-F'Q^2,$$

oder $$v^2-v'^2=(e+x)^2-(e-x)^2,$$

oder $$(v+v')\,(v-v')=4e\,.\,x;$$

also, weil $v+v'=2a$ ist, (1)

$$v-v'=\frac{2ex}{a}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $v=a+\frac{ex}{a}$. (3)

Es ist aber auch $FP=\sqrt{FQ^2+QP^2}$

oder $$v=\sqrt{(e+x)^2+y^2} \quad (4)$$

mithin wegen (3) und (4)

Digitized by Google

$$a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} = e^2 + x^2 + y^2$$

oder, wenn man $a^2 - b^2$ statt $e^2$ setzt und reduzirt

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

# IV.

## Trigonometrische Auflösung der in Bd. I. Heft 2. S. 219 behandelten Aufgabe; und über eine Beziehung, welche zwischen vier Punkten, die in einer Ebene liegen, Statt findet.

Von

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

Oberlehrer am Gymnasium zu Königsberg in der Neumark.

### I.

### Trigonometrische Auflösung der in Bd. I. Heft 2. S. 219 behandelten Aufgabe.

Es seien $A$ und $D$ die beiden der Lage nach bekannten Punkte, und die beiden andern $B$ und $C$ aus den beobachteten Winkeln $ABD = \beta$, $ABC = \alpha$, $BCD = \gamma$ und $ACD = \delta$ ihrer Lage nach zu bestimmen.

Denken wir uns die Seiten des Dreiecks $ABD$ nach beiden Seiten hin verlängert, so wird die Ebene des Dreiecks in 7 getrennte Räume zerlegt. Da nun im Allgemeinen der Punkt $C$— abgesehen davon, dass er auf einer Seite des Dreiecks $ADB$, oder deren Verlängerung gelegen ist — in jedem dieser Räume sich befinden kann, so wären 7 verschiedene Fälle im Einzelnen zu betrachten. Dazu kommt noch, dass der Punkt $B$ auf der einen oder der andern Seite der Linie $AD$ liegen kann. Um nun zu einer, von der speciellen Lage der Punkte $B$ und $C$ unabhängigen, allgemein trigonometrischen Lösung der vorliegenden Aufgabe zu gelangen, ist es nothwendig, über die Richtung, nach welcher hin man die beobachteten Winkel positiv rechnet, eine einfache, unzweideutige Bestimmung zu machen. Zu dem Zwecke nehmen wir für jeden dieser Winkel einen Schenkel als den ersten an und denken uns den Beobachter in die Spitze desselben, mit dem Gesichte nach

Digitized by Google

der Oeffnung gestellt; liegt alsdann der andere Schenkel zur linken Hand, so soll der Winkel positiv, gegentheils negativ genommen werden. Es seien nun für die Winkel

$$ABC = \alpha,\ ABD = \beta,\ BCD = \gamma,\ ACD = \delta$$

beziehlich $AB$, $AB$, $BC$ und $AC$ die ersten Schenkel.

Man sieht sogleich, dass Alles darauf hinausläuft, eins der Dreiecke $ABD$ oder $ACD$ zu bestimmen; wir wählen das erstere, nennen $\varphi$ den Winkel $ADB$ und bemerken, dass derselbe mit $\beta$ stets gleiches Zeichen hat.

Aus der Betrachtung der Dreiecke erhält man alsdann in völliger Allgemeinheit

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\beta)},\quad \frac{BC}{AB} = \frac{\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)},\quad \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma-\beta)};$$

hieraus

$$\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\gamma\,\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\,\sin(\alpha+\gamma-\beta)},$$

und weiter

$$\operatorname{Cotg}\varphi = \frac{\sin\gamma\,\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin\beta\,\sin(\gamma-\delta)\,\sin(\alpha+\gamma-\beta)} - \operatorname{Cotg}\beta.$$

Bestimmt man noch den Hülfswinkel $\xi$ aus der Gleichung

$$\operatorname{Cotg}\xi = \frac{\sin\gamma\,\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\,\sin(\alpha+\gamma-\delta)\,\sin\beta}, \quad \ldots\ldots (A)$$

so wird

$$\operatorname{Cotg}\varphi = \frac{\sin(\beta-\xi)}{\sin\beta\,\sin\xi} \quad \ldots\ldots (B)$$

und aus $(A)$ und $(B)$ lässt sich nun $\varphi$ ohne alle Zweideutigkeit finden. Die übrigen Stücke der Figur ergeben sich dann ohne Schwierigkeit.

## II.

### Ueber eine Beziehung, welche zwischen 4 Punkten, die in einer Ebene liegen, statt findet.

Sucht man die Bedingungsgleichung dafür, dass vier Punkte, deren Coordinaten $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$; $x_4, y_4, z_4$ sind, in einer Ebene liegen, so gelangt man bekanntlich zu derselben, wenn man in die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

für die Coordinaten $x, y, z$ nach einander die Coordinaten der 4 Punkte setzt, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0,\\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0,\\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0,\\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D &= 0 \end{aligned}$$

bildet und aus denselben die Grössen $A$, $B$, $C$, $D$ eliminirt.

Digitized by Google

Führt man dies aus, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen den Coordinaten der gegebenen 4 Punkte, die wir zu unserem Zwecke unter die Form

$$\begin{aligned} & x_1\{(y_4z_3 - y_3z_4) + (y_2z_4 - y_4z_2) + (y_3z_2 - y_2z_3)\} \\ + & x_2\{(y_3z_4 - y_4z_3) + (y_4z_1 - y_1z_4) + (y_1z_3 - y_3z_1)\} \\ + & x_3\{(y_2z_1 - y_1z_2) + (y_1z_4 - y_4z_1) + (y_4z_2 - y_2z_4)\} \\ = & x_4\{(y_2z_1 - y_1z_2) + (y_1z_3 - y_3z_1) + (y_3z_2 - y_2z_3)\} \end{aligned}$$

bringen. Nehmen wir nun an, dass das zum Grunde liegende Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist und betrachten die Projectionen der 4 Punkte auf die $yz$ Ebene, bezeichnen dieselben mit (1), (2), (3), (4) und setzen voraus, dass (4) derjenige Punkt sei, welcher innerhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks $\Delta(1\,2\,3)$ liegt, so kann man nach bekannten Sätzen die obige Gleichung auch so ausdrücken:

$$x_1\,\Delta(2\,3\,4) + x_2\,\Delta(1\,3\,4) + x_3\,\Delta(1\,2\,4) = x_4\,\Delta(1\,2\,3) \ldots (1)$$

oder wenn man bedenkt, dass

$$\Delta(2\,3\,4) + \Delta(1\,3\,4) + \Delta(1\,2\,4) = \Delta(1\,2\,3)$$

ist, auch folgendermassen:

$$(x_1 - x_4)\Delta(2\,3\,4) + (x_2 - x_4)\Delta(1\,3\,4) + (x_3 - x_4)\Delta(1\,2\,4) = 0 \ldots (2)$$

Nennen wir nun den Punkt, welcher innerhalb des von den drei anderen Punkten gebildeten Dreiecks liegt, den inneren Punkt, so können wir den in der Gleichung (1) in analytischem Gewande ausgedrückten Satz also aussprechen:

**Wenn man drei Punkte und einen innern derselben auf eine beliebige Ebene projicirt, und sich die Pyramiden gebildet denkt, welche einen der gegebenen Punkte und die Projectionen der drei anderen zu Eckpunkten haben, so ist diejenige Pyramide, welche den inneren Punkt zu einem Eckpunkte hat, gleich der Summe der drei anderen Pyramiden.**

Digitized by Google

# V.

## Ueber einen Lehrsatz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

Oberlehrer am Gymnasium zu Königsberg in der Neumark.

Poisson giebt in seinem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 31 nach der Uebersetzung von Schnuse, für die Wahrscheinlichkeit *II*, aus einer Urne, in der ursprünglich $a$ weisse und $b$ schwarze Kugeln enthalten sind, in $\mu$ Ziehungen $m$ weisse und $n$ schwarze Kugeln in einer beliebigen Ordnung zu ziehen, wenn die jedes Mal gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird, den Ausdruck:

$$II = \frac{1.2.3.....\mu . 1.2.3.....a . 1.2.3....b . 1.2.3.....(c-\mu)}{1.2.3.....m . 1.2.3.....n . 1.2.3.....c . 1.2.3.....(a-m)\ 1.2.3....(b-n)}$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)\ (\mu-2).....(m+1)}{1.2.3.....n}$$

$$\times \frac{a(a-1)\ (a-2).....(a-m+1)\, b(b-1)\ (b-2).....(b-n+1)}{c(c-1)\ (c-2).....(c-\mu+1)},$$

worin $c = a + b$ gesetzt ist.

Es heisst dann ebendaselbst in der Note: „Nach $\mu$ Ziehungen von $m$ weissen und $n$ schwarzen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem neuen Versuche eine weisse Kugel zu ziehen, von den Zahlen $m$ und $n$ abhängig und $= \frac{a'}{c'}$, wo $a' = a - m$ und $c' = c - (m + n)$. Aber für eine Person, welche bloss wüsste, dass aus der Urne $\mu$ Kugeln gezogen sind, aber nicht, wie viele weisse und wie viele schwarze, wäre die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weissen Kugel bei einem neuen Versuche von der Wahrscheinlichkeit $\frac{a'}{c'}$ sehr verschieden, und nach einer uns eben von F. Mondesir, ehemaligem Schüler der Ecole Polytechnique, mitgetheilten Bemerkung ist die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit von den Zahlen $m$ und $n$ unabhängig und wie vor den Ziehungen $= \frac{a}{c}$." Poisson bemerkt dann ferner, dass Mondesir in dem Journal der Mathematik von Liouville den allgemeinen Beweis für diese Behauptung bekannt machen werde.



Digitized by Google

Da nun gewiss vielen Lesern des Archivs, gleich mir, das Journal von Liouville nicht zu Gebote steht, so halte ich es nicht für unangemessen, hier einen Beweis für die Richtigkeit der obigen Behauptung mitzutheilen.

Jemand, der überhaupt nur weiss, dass aus einer Urne mit $a$ weissen und $b$ schwarzen Kugeln $\mu$ Ziehungen stattgefunden haben, und dass keine der gezogenen Kugeln in die Urne zurückgelegt wurde, kann offenbar nur folgende $\mu+1$ Voraussetzungen über das Herausgekommensein von weissen und schwarzen Kugeln machen. Es sind nämlich entweder $\mu$ weisse und keine schwarze, oder $\mu-1$ weisse und 1 schwarze oder $\mu-2$ weisse und 2 schwarze ..... oder endlich keine weisse und $\mu$ schwarze Kugeln gezogen worden. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Fälle stattgefunden habe, bestimmt sich nach der obigen Formel, wenn man darin für $m$ und $n$ die entsprechenden Werthe setzt. So giebt dieselbe für die Wahrscheinlichkeit, dass in $\mu=m+n$ Ziehungen $\delta$ weisse, und folglich $\mu-\delta$ schwarze Kugeln gezogen worden sind, wenn man $m=\delta$ und $n=\mu-\delta$ setzt, den Ausdruck:

$$\Pi(\delta)=\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\ldots(\delta+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(\mu-\delta)}$$

$$\times\,\frac{a(a-1)\,(a-2)\,\ldots\,(a-\delta+1)\,b(b-1)\,(b-2)\,\ldots\ldots(b-\mu+\delta+1)}{c(c-1)\,(c-2)\,\ldots\ldots(c-\mu+1)}.$$

Wenn das Ereigniss, dem diese Wahrscheinlichkeit entspricht, eingetroffen wäre, so blieben in der Urne überhaupt $\mu-c$ Kugeln, und darunter $a-\delta$ weisse, und es wird folglich die Wahrscheinlichkeit, bei einem neuen Zuge eine weisse Kugel zu erhalten, durch den Quotienten

$$\frac{a-\delta}{c-\mu}$$

ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit $\Pi'(\delta)$, dass diese beiden Ereignisse zugleich eintreffen, bestimmt sich bekanntlich durch das Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, und ist demnach

$$\Pi'(\delta)=\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\delta+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(\mu-\delta)}$$

$$\times\,\frac{a(a-1)\,(a-2)\,\ldots\,(a-\delta)\,b(b-1)\,\ldots\ldots(b-\mu+\delta+1)}{c(c-1)\,(c-2)\,\ldots\ldots(c-\mu)}\quad\ldots\ldots\,(A)$$

Setzt man nun hierin nach einander $\delta=\mu,\ \mu-1,\ \mu-2\,\ldots\,2,\,1,\,0$ und nimmt die Summe dieser Ausdrücke, so ergiebt sich offenbar der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, die wir mit $W$ bezeichnen wollen, und es ist also:

$$W=\Pi'(\mu)+\Pi'(\mu-1)+\Pi'(\mu-2)+\ldots\ldots\ldots+\Pi'(1)+\Pi'(0).$$

Bevor wir nun die Werthe der $\Pi'$ einsetzen, wollen wir noch bemerken, dass die Formel $(A)$ für $\delta=\mu$ nicht unmittelbar anwendbar ist, und dass man in diesem Falle für die beiden darin vorkommenden Ausdrücke

$$\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\delta+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(\mu-\delta)}\quad\text{und}\quad b(b-1)\,(b-2)\,\ldots\,(b-\mu+\delta+1)$$

Digitized by Google

die Einheit nehmen muss. Mit Rücksicht hierauf erhält man nun, unter Absonderung des gemeinschaftlichen Factors

$$M = \frac{a}{c(c-1)\,(c-2)\ldots(c-\mu)},$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $W$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} W = M\{&(a-1)\,(a-2)\ldots(a-\mu)+\mu(a-1)\,(a-2)\ldots(a-\mu+1)b \\ &+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,(a-1)\,(a-2)\ldots\ldots(a-\mu+2)\,b(b-1) \\ &+\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)}{1.2.3}\,(a-1)\,(a-2)\ldots(a-\mu+3)\,b(b-1)\,(b-2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\mu(a-1)\,b(b-1)\ldots\ldots(b-\mu+2) \\ &+b(b-1)\,(b-2)\ldots\ldots(b-\mu+1)\}. \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass für $\alpha+\beta=\gamma$ die bekannte, auch von Poisson a. a. O. erwähnte Relation

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-\mu+1) = &\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha-\mu+1) \\ &+\mu\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots(\alpha-\mu+2)\beta \\ &+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\mu+3)\,\beta(\beta-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\mu\alpha\beta(\beta-1)\,(\beta-2)\ldots\ldots(\beta-\mu+2) \\ &+\beta(\beta-1)\ldots\ldots\ldots(\beta-\mu+1) \end{aligned}$$

statt findet, und dass, wenn man darin $\alpha=a-1$, $\beta=b$, also $\gamma=c-1$ setzt, die rechte Seite gleich der Grösse ist, womit in unserem Ausdrucke für $W$ die Grösse $M$ zu multipliciren ist, so ergiebt sich

$$W = M(c-1)\,(c-2)\ldots\ldots(c-\mu),$$

und wenn man für $M$ seinen Werth einsetzt,

$$W = \frac{a}{c},$$

was bewiesen werden sollte.



Digitized by Google

# VI.

## Vom Kapitalisiren der Zinsen im Laufe des Jahres.

Von

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

---

Ist $p$ der jährliche Zins eines Thalers, so nennt man $r=1+p$ den Zinsfuss, und ein Kapital $K$ geht am Ende des Jahres durch das Hinzutreten der Zinsen in $Kr$ über, so dass man den Zinsfuss als denjenigen Faktor betrachten kann, mit welchem man ein Kapital $K$ zu multipliciren hat, um den durch das Hinzutreten der Zinsen hervorgegangenen Werth desselben am Ende eines Jahres zu erhalten. Nach demselben Zinsfusse geht das Kapital $K$ in $m$ Jahren in

$$(1) \quad K_m = Kr^m$$

über. Diese Formel gilt zwar zunächst nur für den Fall, wo die Zinsen am Ende eines jeden Jahres zum Kapitale geschlagen und für die fernere Dauer des Geschäfts verzinst werden; kann aber auch auf die Kapitalisirung der Zinsen jedes beliebigen andern Zeitintervalls angewandt werden, wenn man unter $m$ die Anzahl dieser Intervalle und unter $r$ den einem solchen Intervalle zukommenden Vermehrungsfaktor versteht.

Nimmt man demzufolge an, dass $s'$ der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor ist, und dass das Kapitalisiren der Zinsen von $\frac{1}{m}$ zu $\frac{1}{m}$ Jahre geschieht, so ist der entsprechende jährliche Vermehrungsfaktor

$$(2) \quad r_1 = s'^m.$$

Will man diesen mit dem Zinsfusse $r$ dergestalt vergleichen, dass die zu Grunde liegenden Zinsen beider der Zeit nach proportional werden, so hat man $s' = 1 + \frac{r-1}{m}$ zu setzen, wodurch sich

$$(3) \quad r' = \left(1 + \frac{r-1}{m}\right)^m$$

ergiebt.

Digitized by Google

Dieser Ausdruck wird, seiner Bedeutung nach, offenbar mit $m$ wachsen, weil alsdann um so öfter Zins von Zins genommen wird; um solches aber aus der Formel selbst deutlicher hervortreten zu lassen, als es unter ihrer gegenwärtigen Gestalt geschieht, und zugleich die Grenze des Wachsthums zu finden, entwickele man den Ausdruck rechts nach dem binomischen Lehrsatze. Hierdurch ergiebt sich

$$r' = 1 + (r-1) + (1-\frac{1}{m})\frac{(r-1)^2}{1.2} + (1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\frac{(r-1)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo offenbar die Subtrahenden $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$ u. s. w. um so kleiner werden, je grösser $m$ wird, woraus hervorgeht, dass jedes einzelne Glied der Reihe und demnach auch $r'$ mit $m$ zugleich zunimmt.

Setzt man voraus, dass die Zinsen von Augenblick zu Augenblick fällig und zum Kapitale geschlagen werden, so erhält man offenbar den möglich grössten Werth, den der jährliche Vermehrungsfaktor zu erreichen im Stande ist. In diesem Falle wird man aber das Jahr in unendlich viele Intervalle zerlegt denken müssen und $m = \infty$ zu setzen, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$ u. s. w. also als Null anzusehen haben, so dass sich

$$(4)\quad \lim\ r' = 1 + (r-1) + \frac{(r-1)^2}{1.2} + \frac{(r-1)^3}{1.2.3} + \frac{(r-1)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

ergiebt. Obgleich man aus der Analysis weiss, dass für die Reihe rechts die Potenz $e^{r-1}$, wo $e = 2,7182818\ldots$, gesetzt werden kann, so mag die Entwickelung dafür, da sie sich leicht aus dem vorhergehenden ergiebt, hier nachfolgen.

Kehrt man nämlich zur Gleichung (3) zurück und bringt dieselbe unter die Form

$$\sqrt[r-1]{r'} = (1 + \frac{r-1}{m})^{\frac{m}{r-1}} = (1 + \frac{1}{m:(r-1)})^{\frac{m}{r-1}},$$

so sieht man, dass die Potenz rechts mit der in (3) übereinstimmt, wenn man hierin $r-1 = 1$ und $m = \frac{m}{r-1}$ setzt. Da nun $\frac{m}{r-1}$ mit $m$ zugleich unendlich wird, so ergiebt sich nach (4)

$$\lim.\ \sqrt[r-1]{r'} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = e,$$

also wie vorher,

$$(5)\quad \lim.\ r' = e^{r-1}.$$

Ist jetzt der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor $s''$, setzt man bei demselben aber voraus, dass zwar auch die Zinsen alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig werden, dass dieselben jedoch bis zu Ende des Jahres nur in einfacher Verzinsung genutzt werden können, so erhält man den jährlichen Vermehrungsfaktor auf nachstehendem Wege:

Am Ende des ersten Termins erhält man von jedem Thaler die Zinsen $s'' - 1$; diese giebt, nach der Voraussetzung der einfachen Verzinsung bis zu Ende des Jahres, für die noch übrigen

Digitized by Google

$m-1$ Termine $(m-1)\,(s''-1)^2$ Zinsen, so dass also die Zinsen eines Thalers mit ihren Zinseszinsen

für den 1ten Termin . . . $s''-1+(m-1)\,(s''-1)^2$, ebenso
- - 2ten - . . . $s''-1+(m-2)\,(s''-1)^2$,
- - 3ten - . . . $s''-1+(m-3)\,(s''-1)^2$,
- - 4ten - . . . $s''-1+(m-4)\,(s''-1)^2$,

u. s. w.

betragen. Also belaufen sich am Ende des Jahres sämmtliche Zinsen und Zwischenzinsen eines Thalers unter der gemachten Voraussetzung auf

$$m(s''-1)+\{(m-1)+(m-2)+(m-3)+\ldots+1\}\,(s''-1)^2,$$

d. h. auf

$$m(s''-1)\,\{1+\frac{(m-1)\,(s''-1)}{2}\}.$$

Fügt man daher zu diesen Zinsen noch 1 hinzu, so ergiebt sich für den jährlichen Vermehrungsfaktor $r_2$ die Gleichung

$$(6)\quad r_2=1+m(s''-1)\,\{1+\frac{(m-1)\,(s''-1)}{2}\}.$$

Nimmt man $s''=1+\frac{r-1}{m}$, d. h. werden wiederum die $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen den dem Zinsfusse $r$ entsprechenden jährlichen Zinsen der Zeit nach proportional gesetzt, so erhält man statt der letzten Gleichung die Formel

$$(7)\quad r''=r+\tfrac{1}{2}(1-\frac{1}{m})\,(r-1)^2,$$

welcher Ausdruck mit $m$ zugleich wächst, und für $m=\infty$

$$(8)\quad \lim r''=\tfrac{1}{2}(r^2+1)$$

giebt.

Vergleicht man den Werth von $r''$ mit der oben für $r'$ gefundenen Reihe, so sieht man, dass jener Werth die beiden ersten Glieder dieser Reihe bildet, und also beide Vermehrungsfaktoren nur wenig von einander abweichen werden, und zwar um so weniger, je kleiner der zu Grunde gelegte Zinsfuss $r$ angenommen wird. — Für jeden beliebigen Zinsfuss $r$ werden aber beide Vermehrungsfaktoren $r'$ und $r''$ einander gleich, wenn man $m=2$ setzt, weil alsdann $r''=r+\frac{1}{4}(r-1)^2=(\frac{r+1}{2})^2=(1+\frac{r-1}{2})^2$ wird. Diese Gleichheit hat darin ihren Grund, dass sich für diesen Fall $r'$ und $r''$ ihrer Bedeutung nach gar nicht von einander unterscheiden, indem beide daraus hervorgehen, dass die Zinsen eines Thalers vom ersten halben Jahre während der zweiten Hälfte des Jahres noch einfache Zinsen tragen.

Soll umgekehrt der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor gefunden werden, wenn der jährliche gegeben ist, und die Zinsen von Termin zu Termin kapitalisirt werden sollen, so ist die Gleichung (2) nach $s'$ aufzulösen, wodurch man

Digitized by Google

$$(9)\quad s' = \sqrt[m]{r}$$

erhält, wenn man $r$ statt $r_1$ setzt. Hieraus folgt aber

$$s' - 1 = \sqrt[m]{1+(r-1)} - 1$$

$$= \frac{r-1}{m} - \frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{m}\right)(r-1)^2 + \frac{1}{6m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)(r-1)^3 - \ldots$$

also, bei der Kleinheit von $r-1$, $s'-1 < \frac{r-1}{m}$, d. h. die $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen sind in diesem Falle kleiner als die dem Zinsfusse $r$ zugehörigen Zinsen für dieselbe Zeit.

Will man statt der Formel (9) einen hinlänglich genauen Näherungswerth ohne Wurzelzeichen setzen, so nehme man

$$\sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{1+ax}{1+bx},$$

wo $x$ eine sehr kleine Quantität bezeichnet, $a$ und $b$ aber dergestalt bestimmt werden sollen, dass der angenommenen Gleichung so viel als möglich Genüge geleistet werden, und das Zeichen $\equiv$ andeuten soll, dass nur von einer Annäherung die Rede ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$1+x \equiv \left(\frac{1+ax}{1+bx}\right)^m = (1+ax)^m\ (1+bx)^{-m}$$

$$\equiv \left(1+max+\frac{m^2-m}{2}a^2x^2+\ldots\right)\left(1-mbx+\frac{m^2+m}{2}b^2x^2+\ldots\right)$$

$$\equiv 1+m(a-b)x+\left(\frac{m^2-m}{2}a^2-m^2ab+\frac{m^2+m}{2}b^2\right)x^2+\ldots.$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von $x$ wird man also der Wahrheit am nächsten kommen, wenn

$$m(a-b)=1 \text{ und } \frac{m^2-m}{2}a^2 - m^2ab + \frac{m^2+m}{2}b^2 = 0$$

gesetzt wird, weil dabei nur die dritte und die höheren Potenzen von $x$ unberücksichtigt bleiben. Statt der zweiten Gleichung kann man aber schreiben $\frac{m^2}{2}(a-b)^2 - \frac{m}{2}(a^2-b^2)=0$, d. h. mit Berücksichtigung der ersten Gleichung $a^2-b^2=\frac{1}{m}$ oder wenn man durch $a-b=\frac{1}{m}$ dividirt, $a+b=1$, so dass also $a=\frac{m+1}{2m}$ und $b=\frac{m-1}{2m}$, folglich

$$\sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x}$$

folgt.

Von der angenäherten Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch a posteriori überzeugen, wenn man beide Seiten derselben nach Potenzen von $x$ entwickelt, wodurch man

Digitized by Google

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + (\frac{x}{m}) - \frac{m-1}{2}(\frac{x}{m})^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{6}(\frac{x}{m})^3$$
$$- \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24}(\frac{x}{m})^4 + \ldots.$$

$$\frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x} = 1 + (\frac{x}{m}) - \frac{m-1}{2}(\frac{x}{m})^2 + \frac{(m-1)(m-1)}{4}(\frac{x}{m})^3$$
$$- \frac{(m-1)(m-1)(m-1)}{8}(\frac{x}{m})^4 + \ldots.,$$

also durch Subtraktion

$$\sqrt[m]{1+x} - \frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x} = \frac{m^2-1}{12}(\frac{x}{m})^3 - \frac{(m^2-1)(3m-2)}{24}(\frac{x}{m})^4 + \ldots.$$

erhält, woraus

$$(10)\quad \sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x},\ \text{Diff.} < \frac{m^2-1}{12}(\frac{x}{m})^3$$

folgt.

Will man diese Formel auf die Gleichung (9) anwenden, so hat man $x = r - 1$ zu setzen, und erhält

$$(11)\quad s' \equiv \frac{2m+(m+1)(r-1)}{2m+(m-1)(r-1)},\ \text{Diff.} < \frac{m^2-1}{2}(\frac{r-1}{m})^2$$

oder

$$s' - 1 \equiv \frac{r-1}{m + \frac{m-1}{2}(r-1)}$$

Ist der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor aus dem gegebenen jährlichen für den Fall zu finden, dass die Zinsen eines jeden Termins bis zum Schlusse des Jahres nur einfache Zinsen tragen, so hat man die Gleichung (6) nach $s''$ aufzulösen. Setzt man der Gleichförmigkeit wegen wiederum $r$ statt $r_2$, so führt die ebengenannte Gleichung vermittelst einer einfachen Reduktion auf

$$(s''-1)^2 + \frac{2}{m-1}(s''-1) = \frac{2(r-1)}{m(m-1)}$$

und giebt also

$$s'' - 1 = -\frac{1}{m-1} \pm \sqrt{\frac{2(r-1)}{m(m-1)} + \frac{1}{(m-1)^2}},$$

wo aber in unserm Falle, wo $s'' > 1$, nur das positive Zeichen genommen werden darf. Demzufolge erhält man

$$(12)\quad s'' - 1 = \frac{1}{m-1}\{-1 + \sqrt{1 + 2(1-\frac{1}{m})(r-1)}\}$$

oder mit Anwendung von (10), wenn $m = 2$ und $x = 2(1-\frac{1}{m})(r-1)$ gesetzt und reducirt wird,

Digitized by Google

(13) $s''-1 \equiv \frac{r-1}{m+\frac{m-1}{2}(r-1)}$, Diff. $< (\frac{m-1}{2})^3 \ (\frac{r-1}{m})^2$,

wo $s''-1 < \frac{r-1}{m}$ und die Diff. deshalb mit $\frac{1}{m-1}$ multiplicirt ist, weil $s''-1$ diesen Faktor hat, so dass $s' \equiv s''$ ist.

Man kann diese Formel auf folgendem kürzern Wege finden, wenn man die Inkonsequenz zulassen will, für einen und denselben Zeitraum zwei, wiewohl nur sehr wenig verschiedene Vermehrungsfaktoren anzuwenden:

Ist $s''$ der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor und $r$ der entsprechende Zinsfuss, so wird $\frac{r-1}{m}$ wenig verschieden sein von $s''-1$, jedenfalls als ein Näherungswerth des letztern angesehen werden können. Wird daher die obige quadratische Gleichung auf die Form

$$s''-1 = \frac{r-1}{m+\frac{m(m-1)}{2}(s''-1)}$$

gebracht, so kann man rechts $\frac{r-1}{m}$ statt $s''-1$ setzen, und erhält dann für $s''$ den unter (13) stehenden Ausdruck.

Will man aus dem gegebenen jährlichen Vermehrungsfaktor den entsprechenden, d. h. denjenigen Zinsfuss finden, dessen Zinsen den Zinsen des gegebenen Vermehrungsfaktors der Zeit nach proportional sind, so hat man für den Fall, dass der Vermehrungsfaktor von Termin zu Termin nach Zins und Zinseszinsen genommen werden soll, die Gleichung (3) und für den Fall, dass beim gegebenen Vermehrungsfaktor die Zinsen eines jeden Termins bis zum Ende des Jahres nur einfache Zinsen tragen, die Gleichung (7) nach $r$ aufzulösen.

Aus der erstern der beiden genannten Gleichungen findet man aber

$$(14) \quad r = 1 + m(\sqrt[m]{r'} - 1)$$

oder mit Anwendung von (10) nach einigen leichten Reduktionen

$$(15) \quad r \equiv \frac{2+(3-\frac{1}{m})(r'-1)}{2+(1-\frac{1}{m})(r'-1)}, \text{ Diff.} < \frac{1}{12}(1-\frac{1}{m^2})(r'-1)^2,$$

wo für die Differenz eine ähnliche Erinnerung gilt wie bei (13).

Aus beiden Ausdrücken sieht man, dass $r$ abnimmt, wenn $m$ wächst. Um die Grenze dieser Abnahme zu finden, setze man $\sqrt[m]{r'} = \{1+(r'-1)\}^{\frac{1}{m}}$ und entwickele diese Potenz nach dem binomischen Satze. Hierdurch findet man

$$r = 1+(r'-1)-(1-\frac{1}{m})\frac{(r'-1)^2}{1.2}+(1-\frac{1}{m})(2-\frac{1}{m})\frac{(r'-1)^3}{1.2.3}-\ldots.$$

also für $m = \infty$

Digitized by Google

(16) $\lim. r = 1 + (r'-1) - \frac{1}{2}(r'-1)^2 + \frac{1}{3}(r'-1)^3 - \frac{1}{4}(r'-1)^4 + \ldots$.

wofür man bekanntlich

$$\lim. r = 1 + ln \,.\, r'$$

setzen kann. Dieser Werth für lim. $r$ hätte sich auch unmittelbar ergeben, wenn man die hierhergehörende Gleichung (5) nach $r$ aufgelöst hätte. Will man in der Praxis den natürlichen Logarithmus mit dem gewöhnlichen vertauschen, so hat man

$$ln \,.\, r' = \frac{\log r'}{\log e} = \frac{\log r'}{\lg 2.7182818} = \frac{\log r'}{0.4342945} = 2.3025851 \times \log r'$$

zu setzen und erhält also

$$(17) \quad \lim. r = 1 + 2.3025851 \times \log r'.$$

Verlangt man statt dieses Ausdrucks einen bequemeren, so hat man in (15) $\frac{1}{m} = 0$ zu setzen, und findet dann folgenden hinreichend genauen Näherungswerth

$$(18) \quad \lim. r = \frac{3r'-1}{r'+1}, \text{ Diff.} < \frac{1}{12}(r'-1)^3,$$

für welche Formel sich der Zusammenhang mit (16) sogleich ergiebt, wenn man $\frac{3r'-1}{r'+1} = \frac{2+3(r'-1)}{2+(r'-1)}$ schreibt, und den letztern Quotienten durch gewöhnliche Division in eine unendliche Reihe verwandelt.

Zur Auflösung der Gleichung (7) gebe man ihr vorher die Form

$$(r-1)^2 + \frac{2m}{m-1}(r-1) = \frac{2m(r''-1)}{m-1},$$

woraus

$$r - 1 = -\frac{m}{m-1} + \sqrt{\frac{2m(r''-1)}{m-1} + \left(\frac{m}{m-1}\right)^2}$$

folgt, indem wiederum wegen $r > 1$ nur das positive Wurzelzeichen genommen werden darf. Statt des eben gefundenen Werths kann man auch setzen:

$$(19) \quad r - 1 = \frac{m}{m-1}\left\{-1 + \sqrt{1 + 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)(r''-1)}\right\}$$

oder mit Hinzuziehung von (10), wenn man hier $m = 2$ und $x = 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)(r''-1)$ setzt und reducirt,

$$(20) \quad r \equiv \frac{2 + \left(3 - \frac{1}{m}\right)(r''-1)}{2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)(r''-1)}, \text{ Diff.} < \frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 (r''-1)^2.$$

Setzt man $\frac{1}{m} = 0$, so erhält man aus (19)

$$(21) \quad \lim. r = \sqrt{2r'' - 1}$$

Digitized by Google

und näherungsweise

$$(22)\quad \lim.\ r \equiv \frac{3r''-1}{r''+1},\ \text{Diff.} < \frac{1}{4}\,(r''-1)^3,$$

wie es der Formel (8) gemäss ist.

Endlich sieht man aus den Formeln (15) und (20), dass die beiden Näherungswerthe von $r$, respective in $r'$ und $r''$ ausgedrückt, miteinander übereinstimmen, so dass also in allen den Fällen, wo jene Näherungswerthe für hinreichend erachtet werden, beide Vermehrungsfactoren nicht von einander verschieden sind.

Aus diesen Untersuchungen geht hervor:

1) Dass dem Zinsfusse $r$ zwei zusammengesetzte jährliche Vermehrungsfactoren $r'$ und $r''$ entsprechen, bei welchen beiden vorausgesetzt wird, dass die Zinsen schon im Laufe des Jahres in gleichen Zwischenräumen zum Kapitale geschlagen werden und Zinsen tragen; dass die Zinsen eines jeden Termins der Zeit nach proportional den zum Zinsfusse $r$ gehörigen Zinsen sind; dass aber bei dem Vermehrungsfaktor $r'$ von Termin zu Termin nach Zinseszinsen gerechnet wird, während bei dem zweiten Vermehrungsfaktor $r''$ die Zinsen eines jeden Termins während der übrigen Dauer des Jahres nur noch einfache Zinsen tragen.

2) Dass der Zinsfuss $r$ drei terminliche Vermehrungsfaktoren $s = 1 + \frac{r-1}{m}$, $s'$ und $s''$ unter sich hat, bei welchem die zugehörigen terminlichen Zinsen, der Zeit nach proportional den dem Zinsfusse $r$ zugehörigen Zinsen sind, welche aber alle drei den jährlichen Zinsfuss $r$ hervorbringen, und zwar der erste $s$ dadurch, dass man während der ganzen Dauer des Jahres nur nach einfachen Zinsen rechnet; der zweite $s'$ dadurch, dass man von Termin zu Termin nach Zinseszinsen rechnet, und endlich der dritte $s''$ dadurch, dass man zwar für die Zinsen eines jeden Termins wiederum Zinsen, aber für jede Rate während des noch folgenden Theils des Jahres nur einfache Zinsen rechnet.

Endlich ist ersichtlich, dass für die im Laufe eines Jahres fällig werdenden Zinsen, noch viele andere Arten der Benutzung angenommen, namentlich für die Zinseszinsen ein anderer Zinsfuss als für die Zinsen des Kapitals zu Grunde gelegt, und danach die entsprechenden Vermehrungsfaktoren berechnet werden können. Diese Rechnungen werden sich aber ihrem Gange nach nicht wesentlich von den vorhergehenden unterscheiden und sollen daher für jetzt unerörtert gelassen werden.

Digitized by Google

# VII.

## Ueber die Theorie der Elimination.

Von

dem Herausgeber.

---

### Erste Abhandlung.

### §. 1.

Die in neuester Zeit von einigen ausgezeichneten Mathematikern, insbesondare von Cauchy, Sylvester, Richelot, Sarrus, veröffentlichten Untersuchungen über die Theorie der Elimination mit möglichster Deutlichkeit und Vollständigkeit darzustellen, ist der Zweck einiger Abhandlungen über diesen wichtigen Gegenstand, welche von jetzt an in dem Archive nach und nach erscheinen werden, und von denen die erste hier vorliegt. Diese Untersuchungen betreffen zwar sämmtlich nur die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade; die Deutlichkeit und der Zusammenhang scheinen uns aber zu fordern, dass wir unsere Darstellung mit einer ältern Untersuchung Cauchy's über die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades oder sogenannten linearen Gleichungen, die nicht so bekannt geworden und so viel Beachtung gefunden zu haben scheint, wie sie verdient, beginnen, und wir wollen daher jetzt sogleich zu diesem Gegenstande übergehen.

### §. 2.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, dass zwischen den $n$ unbekannten Grössen

$$x,\ y,\ z,\ \ldots\ u,\ v$$

die folgenden $n$ Gleichungen des ersten Grades:

$$a_0x+b_0y+c_0z+\ldots+g_0u+h_0v=k_0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+g_1u+h_1v=k_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+g_2u+h_2v=k_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+g_3u+h_3v=k_3,$$

u. s. w.

$$a_{n-1}x+b_{n-1}y+c_{n-1}z+\ldots+g_{n-1}u+h_{n-1}v=k_{n-1};$$

wo

Digitized by Google

$$a_0,\ b_0,\ c_0,\ \ldots\ g_0,\ h_0,\ k_0;$$
$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots\ g_1,\ h_1,\ k_1;$$
$$a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots\ g_2,\ h_2,\ k_2;$$
$$a_3,\ b_3,\ c_3,\ \ldots\ g_3,\ h_3,\ k_3;$$

u. s. w.

$$a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1},\ \ldots\ g_{n-1},\ h_{n-1},\ k_{n-1}$$

sämmtlich bekannte Grössen bezeichnen, gegeben seien, und dass aus diesen Gleichungen die in Rede stehenden $n$ unbekannten Grössen bestimmt werden sollen, wobei es zuerst vorzüglich auf den Beweis des folgenden Lehrsatzes ankommt.

## §. 3.

*Lehrsatz.* Wenn $a, b, c, d, \ldots g, h$ beliebige ungleiche Grössen, deren Anzahl $n$ sein mag, bezeichnen, und

$$\begin{aligned} P_n = {} & (b-a) \\ & \times(c-a)\ (c-b) \\ & \times(d-a)\ (d-b)\ (d-c) \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \times(h-a)\ (h-b)\ (h-c)\ (h-d) \ldots (h-g) \end{aligned}$$

gesetzt wird; so ändert das Product $P_n$ jederzeit sein Vorzeichen ohne seinen absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gegen einander vertauscht.

Beweis. Dass dieser Satz für $n=2$ gilt, erhellet auf der Stelle aus einer blossen Ansicht der Gleichung

$$P_2 = b-a.$$

Eben so leicht erhellet, dass derselbe für $n=3$ gilt, wenn man mit dem Producte

$$P_3 = (b-a)\ (c-a)\ (c-b)$$

die Producte

$$(a-b)\ (c-b)\ (c-a),$$
$$(b-c)\ (a-c)\ (a-b),$$
$$(c-a)\ (b-a)\ (b-c),$$

welche aus jenem durch Vertauschung von $a$ und $b$, $a$ und $c$, $b$ und $c$ gegen einander hervorgehen, vergleicht. Kann man nun beweisen, dass der Satz für

$$\begin{aligned} P_{n+1} = {} & (b-a) \\ & \times(c-a)\ (c-b) \\ & \times(d-a)\ (d-b)\ (d-c) \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \times(h-a)\ (h-b)\ (h-c)\ (h-d) \ldots (h-g) \\ & \times(i-a)\ (i-b)\ (i-c)\ (i-d) \ldots (i-g)\ (i-h) \end{aligned}$$

Digitized by Google

gilt, wenn er für

$$P_n = (b-a)$$
$$\times(c-a)\,(c-b)$$
$$\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g)$$

gilt, so wird seine allgemeine Gültigkeit ausser Zweifel gesetzt sein. Dies kann aber auf folgende Art bewiesen werden.

Vertauscht man in $P_{n+1}$ zwei Elemente gegen einander, so können dies zuerst zwei in der Reihe

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots g,\ h$$

vorkommende Elemente sein. Weil

$$P_{n+1} = P_n(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\ldots(i-g)\,(i-h)$$

ist, $P_n$ nach der Voraussetzung in diesem Falle sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern, und das Product

$$(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\ldots(i-g)\,(i-h)$$

in diesem Falle offenbar völlig ungeändert bleibt, so ändert $P_{n+1}$ sein Zeichen ohne seinen Werth zu ändern. Die vertauschten Elemente können aber auch irgend eins der Elemente

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots g,\ h$$

und das Element $i$ sein. Nehmen wir nun z. B. an, dass man die Elemente $d$ und $i$ gegen einander vertauscht habe, wobei der Allgemeinheit des Beweises durchaus kein Eintrag geschieht, da man sogleich übersehen wird, dass sich derselbe in jedem andern Falle eben so führen lässt; so wird aus $P_{n+1}$ das Product

$$Q = (b-a)$$
$$\times(c-a)\,(c-b)$$
$$\times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)$$
$$\times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(e-i)$$
$$\times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(f-i)\,(f-e)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-i)\,(h-e)\ldots(h-g)$$
$$\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(d-i)\,(d-e)\ldots(d-g)\,(d-h)$$

erhalten. Da die Anzahl der Factoren des Products

$$(e-i)\,(f-i)\ldots(h-i)$$
$$\times(d-i)\,(d-e)\,(d-f)\ldots(d-h)$$

offenbar ungerade, und folglich

$$(e-i)\,(f-i)\ldots(h-i)$$
$$\times(d-i)\,(d-e)\,(d-f)\ldots(d-h)$$
$$= -(i-e)\,(i-f)\ldots(i-h)$$
$$\times(i-d)\,(e-d)\,(f-d)\ldots(h-d)$$

Digitized by Google

ist; so ist nach dem Obigen

$$
\begin{aligned}
Q = &-(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\\
&\times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(i-e)\\
&\times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(i-f)\,(f-e)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(i-h)\,(h-e)\ldots(h-g)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(i-d)\,(e-d)\ldots(g-d)\,(h-d)\\
= &-(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\\
&\times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(e-d)\\
&\times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(f-d)\,(f-e)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\,(h-e)\ldots(h-g)\\
&\times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\,(i-e)\ldots(i-g)\,(i-h),
\end{aligned}
$$

d. i. $Q = -P_{n+1}$, woraus sich ergiebt, dass auch in diesem Falle $P_{n+1}$ sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern.

Hierdurch ist nun vollständig bewiesen, dass der Satz für $P_{n+1}$ gilt, wenn er für $P_n$ gilt, und daher jetzt seine allgemeine Gültigkeit dargethan.

Anmerkung. Wenn unter den Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gleiche vorkommen, verschwindet das Product $P_n$, und verschwindet auch jederzeit dann noch, wenn man zwei beliebige der in Rede stehenden Grössen gegen einander vertauscht. Man kann daher auch in dem Falle, wenn unter den Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gleiche vorkommen, den vorigen Satz als gültig betrachten, weil $0 = -0$ ist.

## §. 4.

Der Kürze wegen wollen wir von jetzt an bloss

$$
\begin{aligned}
P = &(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g)
\end{aligned}
$$

setzen. Die Glieder, aus denen dies Product besteht, wenn man es vollständig entwickelt, haben sämmtlich die Form

$$M a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots g^{\lambda} h^{\mu},$$

wo $M$ eine gewisse constante, d. h. von $a, b, c, \ldots g, h$ ganz unabhängige Grösse bezeichnet, und offenbar

Digitized by Google

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu=1+2+3+\ldots+(n-1),$$

d. i.

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu=\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

ist, zugleich aber auch bemerkt werden muss, dass keiner der Exponenten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\ldots\lambda$, $\mu$ grösser als $n-1$ ist, weil in dem Producte $P$ jede der Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, $\ldots g$, $h$ offenbar nur $(n-1)$ mal vorkommt. Da das Product $P$ nach §. 3. sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, $\ldots g$, $h$, z. B. $a$ und $b$, gegen einander vertauscht; so muss dem Gliede

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\lambda}h^{\mu}$$

in der Entwickelung von $P$ nothwendig ein anderes Glied von der Form

$$-Ma^{\beta}b^{\alpha}c^{\gamma}\ldots g^{\lambda}h^{\mu}$$

entsprechen, und $P$ wird sich also als ein aus lauter Gliedern von der Form

$$M(a^{\alpha}b^{\beta}-a^{\beta}b^{\alpha})c^{\gamma}d^{\delta}\ldots g^{\lambda}h^{\mu}$$

bestehendes Polynom darstellen lassen.

Bezeichnet nun $\Pi$ die Function, welche aus $P$ hervorgeht, wenn man in jedem Gliede von $P$ die Potenzexponenten in blosse unten auf der rechten Seite der Elemente denselben beigeschriebene Indices verwandelt, wodurch das Glied

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\lambda}h^{\mu}$$

in

$$Ma_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}\ldots g_{\lambda}h_{\mu}$$

übergeht, so wird die Function $\Pi$ aus lauter Gliedern von der Form

$$M(a_{\alpha}b_{\beta}-a_{\beta}b_{\alpha})c_{\gamma}d_{\delta}\ldots g_{\lambda}h_{\mu}$$

bestehen, und daher ebenfalls ihr Zeichen ändern ohne ihren absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Elemente $a$, $b$, $c$, $d$, $\ldots g$, $h$ gegen einander vertauscht. Setzt man aber in dem vorstehenden Gliede von $\Pi$, ohne $a$ und $b$ gegen einander zu vertauschen, bloss $b$ für $a$, so wird dasselbe

$$M(b_{\alpha}b_{\beta}-b_{\alpha}b_{\beta})c_{\gamma}d_{\delta}\ldots g_{\lambda}h_{\mu},$$

und verschwindet also, woraus sich ergiebt, dass die Function $\Pi$ jederzeit verschwindet, wenn man für ein beliebiges Element irgend ein anderes Element setzt, ohne diese beiden Elemente gegen einander zu vertauschen.

Da nach dem Obigen keiner der Indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\ldots\lambda$, $\mu$ grösser als $n-1$ ist, so kann man, indem

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots A_{n-1}$$

gewisse von $a$ ganz unabhängige Grössen bezeichnen, die Function $\Pi$ offenbar jederzeit auf die Form

$$\Pi=A_0a_0+A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3+\ldots+A_{n-1}a_{n-1}$$

Digitized by Google

bringen, und nach dem Vorhergehenden hat man nun die folgenden Gleichungen:

$$0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1},$$
$$0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1},$$
$$0 = A_0 d_0 + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3 + \ldots + A_{n-1} d_{n-1},$$

u. s. w.

$$0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1}.$$

Multiplicirt man jetzt die gegebenen Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + g_0 u + h_0 v = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 u + h_1 v = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 u + h_2 v = k_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + g_3 u + h_3 v = k_3,$$

u. s. w.

$$a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + g_{n-1} u + h_{n-1} v = k_{n-1}$$

nach der Reihe mit $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... $A_{n-1}$ und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach dem Obigen die Gleichung

$$(A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}) x$$
$$= A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1},$$

aus der sich

$$x = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}}$$

oder

$$x = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{\Pi}$$

ergiebt, wodurch also $x$ gefunden ist. Bei der wirklichen Entwickelung des $x$ hat man sich, wie hieraus hervorgeht, auf folgende Art zu verhalten:

Man entwickele das Product

$$P = (b-a)$$
$$\times (c-a)\ (c-b)$$
$$\times (d-a)\ (d-b)\ (d-c)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\times (h-a)\ (h-b)\ (h-c)\ (h-d) \ldots (h-g)$$

und verwandle in allen Gliedern, welche jedoch durch Einführung des Exponenten Null jederzeit sämmtlich so dargestellt werden müssen, dass jede der Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, ... $g$, $h$ in ihnen als Factor vorkommt, die Exponenten in blosse unten zur Rechten der entsprechenden Grössen stehende Indices; so ist der Ausdruck, welchen man auf diese Weise erhält, der Nenner des Bruchs, durch welchen die unbekannte Grösse $x$ dargestellt wird, aus dem man dann ferner den entsprechenden Zähler erhält, wenn man für $a$ überall das Symbol $k$ setzt.



Digitized by Google

Uebrigens kann man, wie sich aus dem Obigen unmittelbar ergiebt, auch

$$x=\frac{(b-k)\times(c-k)\ (c-b)\times\ldots\times(h-k)\ (h-b)\ (h-c)\ldots(h-g)}{(b-a)\times(c-a)\ (c-b)\times\ldots\times(h-a)\ (h-b)\ (h-c)\ldots(h-g)}$$

setzen, wenn man sich nur erinnert, dass sowohl im Nenner, als auch im Zähler dieses Bruchs alle Potenzexponenten wie oben in blosse Indices verwandelt werden müssen, wobei man aber auch nicht unbeachtet lassen darf, dass man, bevor diese Verwandlung der Potenzexponenten in Indices wirklich vorgenommen wird, alle Glieder des Nenners und des Zählers so darstellen muss, dass in denselben respective die sämmtlichen Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ und $k, b, c, d, \ldots g, h$ als Factoren vorkommen, wozu man durch Einführung des Exponenten Null leicht gelangt.

Leicht erhellet nun aber auch, dass man die Werthe der sämmtlichen unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ nach der folgenden ganz allgemeinen Regel finden kann:

Man entwickele das Product

$$\begin{aligned} P=&(b-a)\\ &\times(c-a)\ (c-b)\\ &\times(d-a)\ (d-b)\ (d-c)\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\\ &\times(h-a)\ (h-b)\ (h-c)\ (h-d)\ldots(h-g), \end{aligned}$$

stelle mittelst Einführung des Exponenten Null die Glieder dieses Products so dar, dass ein jedes Glied die sämmtlichen Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ als Factoren enthält, und verwandle in jedem Gliede alle Potenzexponenten in Indices auf die oben näher angegebene Weise; so ist der Ausdruck, welchen man erhält, der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $x, y, z, \ldots u, v$, aus dem man dann ferner die entsprechenden Zähler erhält, wenn man das Symbol $k$ respective für die Symbole $a, b, c, d, \ldots g, h$ setzt.

Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich ohne Schwierigkeit auf folgende Art überzeugen. Setzen wir

$$x=\frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$

wo nämlich

$$\Pi=\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)$$

gesetzt worden ist, so ist offenbar

$$y=\frac{\varphi(k, a, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(b, a, c, d, \ldots g, h)},$$

$$z=\frac{\varphi(k, b, a, d, \ldots g, h)}{\varphi(c, b, a, d, \ldots g, h)},$$

u. s. w.

$$v=\frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, a)}{\varphi(h, b, c, d, \ldots g, a)}.$$

Digitized by Google

Nach der aus dem Obigen bekannten Grundeigenschaft der Function

$$\Pi = \varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)$$

oder vielmehr der Function $P$ ist aber

$$\varphi(b, a, c, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(c, b, a, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$

u. s. w.

$$\varphi(h, b, c, d, \ldots g, a) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$

und natürlich ebenso

$$\varphi(k, a, c, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(k, b, a, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h),$$

u. s. w.

$$\varphi(k, b, c, d, \ldots g, a) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k);$$

also

$$x = \frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$
$$y = \frac{\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$
$$z = \frac{\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$

u. s. w.

$$v = \frac{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$

woraus die Richtigkeit der obigen Regel unmittelbar erhellet.

Um diese Regel durch ein Paar Beispiele zu erläutern, habe man zuerst die zwei Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y = k_1$$

mit den zwei unbekannten Grössen $x$, $y$. In diesem Falle ist

$$P = b - a$$

oder vielmehr

$$P = a^0 b^1 - a^1 b^0.$$

Also ist der gemeinschaftliche Nenner von $x$ und $y$

$$a_0 b_1 - a_1 b_0,$$

und die entsprechenden Zähler sind

$$k_0 b_1 - k_1 b_0 \text{ und } a_0 k_1 - a_1 k_0.$$

Also ist

$$x = \frac{k_0 b_1 - k_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad y = \frac{k_1 a_0 - k_0 a_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}.$$

Auch kann man



Digitized by Google

$$x=\frac{b-k}{b-a},\ y=\frac{k-a}{b-a}$$

setzen, wenn man nur auf gewöhnliche Weise alle Potenzexponenten in Indices verwandelt. Man muss nämlich die beiden vorhergehenden Gleichungen zuerst auf folgende Art schreiben:

$$x=\frac{k^0b^1-k^1b^0}{a^0b^1-a^1b^0},\ y=\frac{k^1a^0-k^0a^1}{a^0b^1-a^1b^0},$$

und erhält dann durch Verwandlung der Potenzexponenten in Indices auf der Stelle

$$x=\frac{k_0b_1-k_1b_0}{a_0b_1-a_1b_0},\ y=\frac{k_1a_0-k_0a_1}{a_0b_1-a_1b_0},$$

ganz wie vorher.

Es seien ferner die drei Gleichungen

$$a_0x+b_0y+c_0z=k_0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z=k_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=k_2$$

mit den drei unbekannten Grössen $x$, $y$, $z$ gegeben. In diesem Falle ist

$$P=(b-a)\ (c-a)\ (c-b),$$

und folglich, wenn man dieses Product entwickelt,

$$P=bc^2-b^2c+ab^2-ac^2+a^2c-a^2b$$

oder

$$P=a^0b^1c^2-a^0b^2c^1+a^1b^2c^0-a^1b^0c^2+a^2b^0c^1-a^2b^1c^0.$$

Also ist der gemeinschaftliche Nenner von $x$, $y$, $z$

$$a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_1b_2c_0-a_1b_0c_2+a_2b_0c_1-a_2b_1c_0.$$

Die Zähler von $x$, $y$, $z$ sind aber respective:

$$k_0b_1c_2-k_0b_2c_1+k_1b_2c_0-k_1b_0c_2+k_2b_0c_1-k_2b_1c_0,$$
$$a_0k_1c_2-a_0k_2c_1+a_1k_2c_0-a_1k_0c_2+a_2k_0c_1-a_2k_1c_0,$$
$$a_0b_1k_2-a_0b_2k_1+a_1b_2k_0-a_1b_0k_2+a_2b_0k_1-a_2b_1k_0;$$

und es ist folglich

$$x=\frac{k_0b_1c_2-k_0b_2c_1+k_1b_2c_0-k_1b_0c_2+k_2b_0c_1-k_2b_1c_0}{a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_1b_2c_0-a_1b_0c_2+a_2b_0c_1-a_2b_1c_0},$$
$$y=\frac{k_0a_2c_1-k_0a_1c_2+k_1a_0c_2-k_1a_2c_0+k_2a_1c_0-k_2a_0c_1}{a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_1b_2c_0-a_1b_0c_2+a_2b_0c_1-a_2b_1c_0},$$
$$z=\frac{k_0a_1b_2-k_0a_2b_1+k_1a_2b_0-k_1a_0b_2+k_2a_0b_1-k_2a_1b_0}{a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_1b_2c_0-a_1b_0c_2+a_2b_0c_1-a_2b_1c_0}.$$

Uebrigens kann man die Grössen $x$, $y$, $z$ auch unter der Form

$$x=\frac{(b-k)\ (c-k)\ (c-b)}{(b-a)\ (c-a)\ (c-b)},$$

Digitized by Google

$$y=\frac{(k-a)\,(c-a)\,(c-k)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)},$$
$$z=\frac{(b-a)\,(k-a)\,(k-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

darstellen, wenn man nur nach der Entwickelung der Zähler und des gemeinschaftlichen Nenners alle Potenzexponenten auf bekannte Weise in Indices verwandelt.

Sind die vier Gleichungen

$$a_0x+b_0y+c_0z+d_0u=k_0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=k_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=k_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=k_3$$

zwischen den vier unbekannten Grössen $x$, $y$, $z$, $u$ gegeben, so ist auf ganz ähnliche Art

$$x=\frac{(b-k)\,(c-k)\,(c-b)\,(d-k)\,(d-b)\,(d-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$y=\frac{(k-a)\,(c-a)\,(c-k)\,(d-a)\,(d-k)\,(d-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$z=\frac{(b-a)\,(k-a)\,(k-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-k)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$u=\frac{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(k-a)\,(k-b)\,(k-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)};$$

wenn man nur auch jetzt wieder alle Zähler und den gemeinschaftlichen Nenner gehörig entwickelt, und in den einzelnen Gliedern alle Potenzexponenten auf gewöhnliche Weise in Indices verwandelt.

Wie man sich in andern Fällen zu verhalten hat und die Werthe der unbekannten Grössen immer leicht nach der obigen Regel *) finden kann, erhellet hieraus deutlich genug.

## §. 5.

Bevor wir nun ferner zur Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade selbst übergehen, wollen wir zuvörderst den folgenden für die ganze Theorie der Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade höchst wichtigen Lehrsatz beweisen.

*Lehrsatz.* **Wenn zwischen zwei unbekannten Grössen zwei Gleichungen des $m$ten und $n$ten Grades gegeben sind: so kann die Gleichung, welche durch Elimination der einen der beiden unbekannten Grössen aus den beiden gegebenen Gleichungen erhalten wird, den Grad $mn$ niemals übersteigen.**

Beweis. Zwischen den beiden unbekannten Grössen $x$ und $y$ seien die beiden nach $x$ geordneten Gleichungen

*) Dass Bezout und Cramer zwei andere bemerkenswerthe Regeln zur Bestimmung der Unbekannten aus Gleichungen des ersten Grades gegeben haben, setzen wir hier als bekannt voraus.

Digitized by Google

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$
$$A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + \ldots + K'x + L' = 0,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von $x$ sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen von $y$ sind, gegeben. Weil diese beiden Gleichungen nach der Voraussetzung vom $m$ten und $n$ten Grade sind, und folglich die unbekannten Grössen in keiner die $m$te und $n$te übersteigenden Dimension enthalten können, so sind die Functionen

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots M,\ N$$

von keinem höhern Grade als vom

0ten, 1sten, 2ten, 3ten, ... $(m-1)$sten, $m$ten;

die Functionen

$$A',\ B',\ C',\ D', \ldots K',\ L'$$

von keinem höhern Grade als vom

0ten, 1sten, 2ten, 3ten, ... $(n-1)$sten, $n$ten.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun zu beweisen versuchen, dass der Grad der Gleichung, welche man durch Elimination von $x$ aus den beiden obigen Gleichungen erhält, das Product $mn$ nicht übersteigen kann. Weil $A$ und $A'$ Functionen des 0ten Grades von $y$, und folglich constante Grössen sind; so kann man die beiden obigen Gleichungen auch unter der Form

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = 0,$$

wo $P,\ Q, \ldots S,\ T$ und $P',\ Q', \ldots V',\ W'$ lauter ganze rationale algebraische Functionen von $y$ sind, darstellen. Man denke sich nun beide Gleichungen nach $x$ aufgelöst, und bezeichne die Wurzeln der ersten, welche sämmtlich Functionen von $y$ und an der Zahl $m$ sind, durch $p,\ q, \ldots r,\ s,\ t$, die Wurzeln der zweiten, welche ebenfalls sämmtlich Functionen von $y$ und an der Zahl $n$ sind, durch $p', q', \ldots u', v', w'$. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} U = {} & (p-p')\,(p-q')\ldots(p-u')\,(p-v')\,(p-w') \\ & \times (q-p')\,(q-q')\ldots(q-u')\,(q-v')\,(q-w') \\ & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (r-p')\,(r-q')\ldots(r-u')\,(r-v')\,(r-w') \\ & \times (s-p')\,(s-q')\ldots(s-u')\,(s-v')\,(s-w') \\ & \times (t-p')\,(t-q')\ldots(t-u')\,(t-v')\,(t-w'); \end{aligned}$$

so ist klar, dass, wenn die beiden gegebenen Gleichungen, wie erfordert wird, sollen zusammen existiren können, $U=0$ sein muss, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, keine der Wurzeln $p,\ q, \ldots r,\ s,\ t$ einer der Wurzeln $p', q', \ldots u', v', w'$ gleich sein könnte, welches doch nothwendig erfordert wird, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zugleich Statt finden sollen. Die Gleichung $U=0$ ist also die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zusammen existiren sollen, d. h. eben die Gleichung, welche durch die Elimination von $x$ aus

Digitized by Google

den beiden gegebenen Gleichungen entspringt, und es kommt nun lediglich darauf an, den Grad zu bestimmen, bis zu welchem diese Gleichung höchstens steigen kann.

Vor allen Dingen müssen wir zeigen, dass die Function $U$ jederzeit eine ganze rationale algebraische Function von $y$ ist. Weil nach der Voraussetzung $p', q', \ldots u', v', w'$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

sind, so ist nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen für jedes $x$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = (x-p')\,(x-q')\ldots(x-u')\,(x-v')\,(x-w'),$$

und folglich

$$p^n + P'p^{n-1} + Q'p^{n-2} + \ldots + V'p + W' = (p-p')\,(p-q')\ldots(p-u')\,(p-v')\,(p-w'),$$

$$q^n + P'q^{n-1} + Q'q^{n-2} + \ldots + V'q + W' = (q-p')\,(q-q')\ldots(q-u')\,(q-v')\,(q-w'),$$

u. s. w.

$$r^n + P'r^{n-1} + Q'r^{n-2} + \ldots + V'r + W' = (r-p')\,(r-q')\ldots(r-u')\,(r-v')\,(r-w'),$$

$$s^n + P's^{n-1} + Q's^{n-2} + \ldots + V's + W' = (s-p')\,(s-q')\ldots(s-u')\,(s-v')\,(s-w'),$$

$$t^n + P't^{n-1} + Q't^{n-2} + \ldots + V't + W' = (t-p')\,(t-q')\ldots(t-u')\,(t-v')\,(t-w').$$

Also ist

$$\begin{aligned} U = {} & (p^n + P'p^{n-1} + Q'p^{n-2} + \ldots + V'p + W') \\ & \times (q^n + P'q^{n-1} + Q'q^{n-2} + \ldots + V'q + W') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times (r^n + P'r^{n-1} + Q'r^{n-2} + \ldots + V'r + W') \\ & \times (s^n + P's^{n-1} + Q's^{n-2} + \ldots + V's + W') \\ & \times (t^n + P't^{n-1} + Q't^{n-2} + \ldots + V't + W'). \end{aligned}$$

Da $U$ seinen Werth nicht ändert, wenn man zwei beliebige der Grössen $p, q, \ldots r, s, t$ gegen einander vertauscht, und offenbar eine ganze rationale Function dieser Grössen ist, so ist $U$ eine ganze rationale symmetrische Function von $p, q, \ldots r, s, t$. Aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen kann aber hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden, dass sich jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung als eine ganze rationale Function der Coefficienten dieser Gleichung darstellen lässt. Weil nun $p, q, \ldots r, s, t$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0$$

sind, so ist $U$ eine ganze rationale Function von $P, Q, \ldots S, T$.

Digitized by Google

Alle diese Grössen sind aber, so wie auch die Grössen $P'$, $Q'$, ... $V'$, $W'$, nach der Voraussetzung ganze rationale algebraische Functionen von $y$. Also ist nach dem Obigen offenbar auch $U$ eine ganze rationale algebraische Function von $y$, wie behauptet wurde. Der Grad, bis zu welchem diese Function höchstens steigen kann, lässt sich nun aber auf folgende Art bestimmen.

Nach dem Obigen sind die von der Grösse $y$ abhängenden ganzen rationalen algebraischen Functionen $P$, $Q$, ... $S$, $T$ und $P'$, $Q'$, ... $V'$, $W'$ von keinem höhern als vom 1sten, 2ten, ... $(m-1)$sten, $m$ten und 1sten, 2ten, ... $(n-1)$sten, $n$ten Grade. Daher bleiben die Grössen

$$\frac{P}{y},\ \frac{Q}{y^2},\ \cdots\ \frac{S}{y^{m-1}},\ \frac{T}{y^m};$$
$$\frac{P'}{y},\ \frac{Q'}{y^2},\ \cdots\ \frac{V'}{y^{n-1}},\ \frac{W'}{y^n}$$

endlich für unendlich grosse Werthe von $y$, welches also offenbar auch von den Werthen von $z$ gilt, die den Gleichungen

$$z^m + \frac{P}{y}z^{m-1} + \frac{Q}{y^2}z^{m-2} + \ldots + \frac{S}{y^{m-1}}z + \frac{T}{y^m} = 0,$$
$$z^n + \frac{P'}{y}z^{n-1} + \frac{Q'}{y^2}z^{n-2} + \ldots + \frac{V'}{y^{n-1}}z + \frac{W'}{y^n} = 0$$

genügen. Da sich aber diese Gleichungen auf die Form

$$(zy)^m + P(zy)^{m-1} + Q(zy)^{m-2} + \ldots + S(zy) + T = 0,$$
$$(zy)^n + P'(zy)^{n-1} + Q'(zy)^{n-2} + \ldots + V'(zy) + W' = 0$$

bringen lassen; so erhellet, wenn man diese Gleichungen mit den Gleichungen

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

vergleicht, auf der Stelle, dass die Werthe von $z$, welche den beiden obigen Gleichungen genügen,

$$\frac{p}{y},\ \frac{q}{y},\ \ldots\ \frac{r}{y},\ \frac{s}{y},\ \frac{t}{y}$$

und

$$\frac{p'}{y},\ \frac{q'}{y},\ \ldots\ \frac{u'}{y},\ \frac{v'}{y},\ \frac{w'}{y}$$

sind, woraus sich ergiebt, dass auch diese Brüche für unendlich grosse $y$ nicht unendlich werden.

Daher wird auch das Product

$$\left(\frac{p}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{p}{y} - \frac{u'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{w'}{y}\right)$$
$$\times\left(\frac{q}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{q}{y} - \frac{u'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{w'}{y}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times\left(\frac{r}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{r}{y} - \frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{r}{y} - \frac{u'}{y}\right)\left(\frac{r}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{r}{y} - \frac{w'}{y}\right)$$

Digitized by Google

$$\times\left(\frac{s}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{s}{y}-\frac{u'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{w'}{y}\right)$$
$$\times\left(\frac{t}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{t}{y}-\frac{u'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{w'}{y}\right),$$

welches offenbar $=\frac{U}{y^{mn}}$ ist, für unendlich grosse $y$ nicht unendlich, woraus man nun auf der Stelle schliesst, dass der Grad von $U$ oder der Gleichung, welche man erhält, wenn man die Grösse $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen eliminirt, das Product $mn$ nicht übersteigen kann, wie bewiesen werden sollte *).

## §. 6.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die beiden Gleichungen

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$
$$B_0x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_{n-1}x+B_n=0,$$

welche in Bezug auf die unbekannte Grösse $x$ beide vom $n$ten Grade, und deren Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots A_{n-1},\ A_n;$$
$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ldots B_{n-1},\ B_n$$

constante Grössen oder beliebige ganze rationale algebraische Functionen anderer unbekannter Grössen, nur nicht von $x$, sind, gegeben seien, und wollen zeigen, wie sich aus denselben die unbekannte Grösse $x$ jederzeit durch ein auf sehr einfachen Principien beruhendes Verfahren eliminiren lässt.

Multiplicirt man nämlich die erste der beiden gegebenen Gleichungen mit $-B_0$, die zweite mit $A_0$, und addirt die Gleichungen dann zu einander; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_0B_1-A_1B_0=C_0,$$
$$A_0B_2-A_2B_0=C_1,$$
$$A_0B_3-A_3B_0=C_2,$$

u. s. w.

$$A_0B_{n-1}-A_{n-1}B_0=C_{n-2},$$
$$A_0B_n-A_nB_0=C_{n-1}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$C_0x^{n-1}+C_1x^{n-2}+C_2x^{n-3}+\ldots+C_{n-2}x+C_{n-1}=0.$$

Multiplicirt man ferner die erste der beiden gegebenen Gleichungen mit $B_n$, die zweite mit $-A_n$, und addirt die Gleichungen dann wieder zu einander; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_0B_n-A_nB_0=D_0,$$
$$A_1B_n-A_nB_1=D_1,$$

*) Diesen Beweis des obigen wichtigen Satzes findet man dem Wesentlichen nach in den Exercices de Mathématiques par Cauchy. T. IV. p. 124. Andere Beweise desselben, namentlich der von Poisson, sind allgemein genug bekannt.

Digitized by Google

$$A_1B_n - A_n\,B_1 = D_1,$$

u. s. w.

$$A_{n-2}B_n - A_n\,B_{n-2} = D_{n-2},$$
$$A_{n-1}B_n - A_n\,B_{n-1} = D_{n-1},$$

wobei man bemerken kann, dass $D_0 = C_{n-1}$ ist, gesetzt wird, die Gleichung

$$D_0x^n + D_1x^{n-1} + D_2x^{n-2} + \ldots + D_{n-2}x^2 + D_{n-1}x = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch $x$ dividirt, die Gleichung

$$D_0x^{n-1} + D_1x^{n-2} + D_2x^{n-3} + \ldots + D_{n-2}x + D_{n-1} = 0,$$

und hat also jetzt die beiden folgenden Gleichungen des $(n-1)$sten Grades:

$$C_0x^{n-1} + C_1x^{n-2} + C_2x^{n-3} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1} = 0,$$
$$D_0x^{n-1} + D_1x^{n-2} + D_2x^{n-3} + \ldots + D_{n-2}x + D_{n-1} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet man auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn der Kürze wegen

$$C_0D_1 - C_1D_0 = E_0,$$
$$C_0D_2 - C_2D_0 = E_1,$$
$$C_0D_3 - C_3D_0 = E_2,$$

u. s. w.

$$C_0D_{n-2} - C_{n-2}D_0 = E_{n-3},$$
$$C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0 = E_{n-2}$$

und

$$C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0 = F_0,$$
$$C_1D_{n-1} - C_{n-1}D_1 = F_1,$$
$$C_2D_{n-1} - C_{n-1}D_2 = F_2,$$

u. s. w.

$$C_{n-3}D_{n-1} - C_{n-1}D_{n-3} = F_{n-3},$$
$$C_{n-2}D_{n-1} - C_{n-1}D_{n-2} = F_{n-2}$$

gesetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen des $(n-2)$ten Grades ab:

$$E_0x^{n-2} + E_1x^{n-3} + E_2x^{n-4} + \ldots + E_{n-3}x + E_{n-2} = 0,$$
$$F_0x^{n-2} + F_1x^{n-3} + F_2x^{n-4} + \ldots + F_{n-3}x + F_{n-2} = 0;$$

und wird, wenn man dieses Verfahren immer weiter fortsetzt, jederzeit endlich einmal auf zwei Gleichungen des ersten Grades von der Form

$$M_0x + M_1 = 0,$$
$$N_0x + N_1 = 0$$

kommen, aus denen man dann sogleich durch Elimination von $x$ die diese unbekannte Grösse gar nicht mehr enthaltende Gleichung

$$M_0N_1 - M_1N_0 = 0$$

Digitized by Google

erhält, und also jetzt an dem Ziele, welches man zu erreichen beabsichtigte, angelangt ist.

Dieses Verfahren, obgleich an sich sehr einfach und überdies völlig allgemein, hat den sehr bedeutenden Fehler, dass es die Endgleichung, als Folge der Einführung fremdartiger Factoren, häufig von einem zu hohen Grade liefert. Um uns hiervon zu überzeugen, wollen wir jetzt einmal annehmen, dass die Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots A_n;$$
$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots B_n$$

der beiden gegebenen Gleichungen, die in Bezug auf $x$ vom $n$ten Grade sind, in Bezug auf die in ihnen enthaltene unbekannte Grösse $y$ respective vom

$$0\text{ten},\ 1\text{sten},\ 2\text{ten},\ \ldots\ n\text{ten};$$
$$0\text{ten},\ 1\text{sten},\ 2\text{ten},\ \ldots\ n\text{ten}$$

Grade seien; so sind die Coefficienten

$$C_0 = A_0B_1 - A_1B_0,\ D_0 = A_0B_n - A_nB_0;$$
$$C_1 = A_0B_2 - A_2B_0,\ D_1 = A_1B_n - A_nB_1;$$
$$C_2 = A_0B_3 - A_3B_0,\ D_2 = A_2B_n - A_nB_2;$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$C_{n-1} = A_0B_n - A_nB_0,\ D_{n-1} = A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1}$$

der beiden aus den vorigen Gleichungen abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf $x$ vom $(n-1)$sten Grade sind, offenbar in Bezug auf $y$ respective vom

$$1\text{sten},\ 2\text{ten},\ 3\text{ten},\ \ldots\ n\text{ten};$$
$$n\text{ten},\ (n+1)\text{sten},\ (n+2)\text{ten},\ \ldots\ (2n-1)\text{sten}$$

Grade. Ferner sind die Coefficienten

$$E_0 = C_0D_1 - C_1D_0,\ F_0 = C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0;$$
$$E_1 = C_0D_2 - C_2D_0,\ F_1 = C_1D_{n-1} - C_{n-1}D_1;$$
$$E_2 = C_0D_3 - C_3D_0,\ F_2 = C_2D_{n-1} - C_{n-1}D_2;$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$E_{n-2} = C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0,\ F_{n-2} = C_{n-2}D_{n-1} - C_{n-1}D_{n-2}$$

der beiden aus den vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen, die in Bezug auf $x$ vom $(n-2)$ten Grade sind, in Bezug auf $y$ offenbar respective vom

$$(n+2)\text{ten},\ (n+3)\text{ten},\ (n+4)\text{ten},\ \ldots\ 2n\text{ten};$$
$$2n\text{ten},\ (2n+1)\text{sten},\ (2n+2)\text{ten},\ \ldots\ (3n-2)\text{ten}$$

Grade. Auf ähnliche Art sind die Coefficienten

$$G_0 = E_0F_1 - E_1F_0,\ H_0 = E_0F_{n-2} - E_{n-2}F_0;$$
$$G_1 = E_0F_2 - E_2F_0,\ H_1 = E_1F_{n-2} - E_{n-2}F_1;$$
$$G_2 = E_0F_3 - E_3F_0,\ H_2 = E_2F_{n-2} - E_{n-2}F_2;$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$G_{n-3} = E_0F_{n-2} - E_{n-2}F_0,\ H_{n-3} = E_{n-3}F_{n-2} - E_{n-2}F_{n-3}$$

Digitized by Google

der beiden aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf $x$ vom $(n-3)$ten Grade sind, in Bezug auf $y$ offenbar respective vom

$(3n+3)$ten, $(3n+4)$ten, $(3n+5)$ten, ... $4n$ten;

$4n$ten, $(4n+1)$sten, $(4n+2)$ten, ... $(5n-3)$ten

Grade. Die Coefficienten

$$J_0 = G_0H_1 - G_1H_0,\ K_0 = G_0H_{n-3} - G_{n-3}H_0;$$
$$J_1 = G_0H_2 - G_2H_0,\ K_1 = G_1H_{n-3} - G_{n-3}H_1;$$
$$J_2 = G_0H_3 - G_3H_0,\ K_2 = G_2H_{n-3} - G_{n-3}H_2;$$

u. s. w. u. s. w.

$$J_{n-4} = G_0H_{n-3} - G_{n-3}H_0,\ K_{n-4} = G_{n-4}H_{n-3} - G_{n-3}H_{n-4}$$

der beiden aus den vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf $x$ vom $(n-4)$ten Grade sind, sind offenbar in Bezug auf $y$ jederzeit respective vom

$(7n+4)$ten, $(7n+5)$ten, $(7n+6)$ten, ... $8n$ten;

$8n$ten, $(8n+1)$sten, $(8n+2)$ten, ... $(9n-4)$ten

Grade. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, erhellet hieraus schon mit hinreichender Deutlichkeit, und überzeugen wird man sich nun auch sehr leicht, dass die Coefficienten

$$M_0,\ M_1 \text{ und } N_0,\ N_1$$

der beiden Gleichungen

$$M_0x + M_1 = 0,$$
$$N_0x + N_1 = 0$$

des ersten oder $\{n-(n-1)\}$ten Grades, zu denen man durch fortgesetzte Anwendung des obigen Verfahrens immer endlich gelangt, in Bezug auf $y$ jederzeit respective vom

$(2^{n-2}.n-1)$ten, $(2^{n-2}.n)$ten und $(2^{n-2}.n)$ten, $(2^{n-2}.n+1)$ten

Grade sind, woraus sich dann ferner unmittelbar ergiebt, dass die $x$ gar nicht mehr enthaltende Endgleichung

$$M_0N_1 - M_1N_0 = 0$$

in Bezug auf $y$ jederzeit vom $(2^{n-1}.n)$ten Grade ist. Nach dem in §. 5. bewiesenen Satze kann aber unter den gemachten Voraussetzungen die Endgleichung in Bezug auf $y$ den Grad $nn = n^2$ niemals übersteigen, und wenn man also untersuchen will, ob die obige Eliminationsmethode die Endgleichung von einem zu hohen Grade liefert, so kommt es darauf an, die Fälle zu ermitteln, in denen

$$2^{n-1}.n - n^2 > 0$$

oder

$$2^{n-1} - n > 0 \text{ oder } 2^{n-1} > n$$

ist. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist, wie man leicht findet, $2^{n-1} = n$. Für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ ist dagegen, wie man ebenfalls leicht findet, immer $2^{n-1} > n$, woraus man schliesst, dass für $n > 2$

Digitized by Google

jederzeit $2^{n-1} > n$ ist. Um die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes zu beweisen, wollen wir annehmen, dass derselbe für $n > 2$ gilt, so dass $2^{n-1} > n$ ist, und wollen daraus abzuleiten suchen, dass er dann jederzeit auch für $n+1$ gelten muss, wodurch seine allgemeine Richtigkeit bewiesen sein wird. Weil nun aber nach der Voraussetzung $2^{n-1} > n$ ist, so ist, wenn man auf beiden Seiten mit 2 multiplicirt, auch $2^n > 2n$ oder $2^n > n+n$, und folglich, weil $n > 2$ ist, offenbar $2^n > n+1$ oder $2^{(n+1)-1} > n+1$, so dass also der Satz in der That auch für $n+1$ gilt, und daher allgemein ist. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die obige Eliminationsmethode die Endgleichung, wenn $n > 2$ ist, immer von einem zu hohen Grade liefert, und der Grad des eingeführten fremdartigen Factors ist im Allgemeinen

$$2^{n-1} \cdot n - n^2 = n(2^{n-1} - n).$$

Für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ ist also dieser fremdartige Factor respective vom 3ten, 16ten, 55sten, 156sten, 399sten, 960sten, 2223sten, 5020sten Grade, und steigt demnach sehr bald zu einem sehr hohen Grade, woraus die Unzweckmässigkeit der obigen Eliminationsmethode deutlich genug erhellen wird *).

Im Vorhergehenden ist angenommen worden, dass die beiden gegebenen Gleichungen in Bezug auf $x$ von demselben Grade sind. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man immer die beiden Gleichungen leicht auf denselben Grad bringen, wenn man der Gleichung von dem niedrigern Grade am Anfange so viele Glieder mit dem Coefficienten Null beifügt, als erforderlich sind, um diese Gleichung auf denselben Grad wie die höhere Gleichung zu bringen. Hiernach kann man dann auf die beiden Gleichungen die obige Eliminationsmethode offenbar wieder ganz auf dieselbe Weise, wie im Vorhergehenden gelehrt worden ist, anwenden.

Sehr leicht kann nun aber auch gezeigt werden, dass durch die im Vorhergehenden behandelte Aufgabe das Eliminationsproblem für Gleichungen höherer Grade überhaupt im Allgemeinen gelöst ist. Hat man nämlich $m$ Gleichungen mit den $m$ unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots u, v$; so ordne man diese sämmtlich nach der einen dieser unbekannten Grössen, etwa nach der Grösse $x$, und eliminire dann nach der im Obigen gelehrten Methode $x$ aus der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 4ten, u. s. w. $(m-1)$sten und $m$ten Gleichung, so erhält man $m-1$ offenbar die Grösse $x$ gar nicht mehr enthaltende Gleichungen, welche man nun sämmtlich nach $y$ ordnet, und dann ganz auf dieselbe Weise wie vorher $y$ eliminirt, wodurch man $m-2$ die Grössen $x$, $y$ gar nicht mehr

*) Will man sich noch deutlicher überzeugen, dass bei der Anwendung der obigen Eliminationsmethode fremdartige Factoren eingeführt werden, so s. m. Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen von M. Hirsch. Erster Theil. Berlin 1809. S. 109 ff., wo die vier ersten Grade besonders betrachtet sind. Auch kann man den Artikel Elimination in dem zweiten Theile meiner Supplemente zum Klügel'schen Wörterbuche und eine Abhandlung von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XXI. p. 41., wo auch zugleich Mittel angegeben sind, durch die man sich von den fremdartigen Factoren möglichst frei halten kann.

Digitized by Google

enthaltende Gleichungen bekommt, auf die man nun wieder ein ganz ähnliches Verfahren anwenden kann. Endlich wird man auf diese Weise zu $m-(m-1)$ die $m-1$ unbekannten Grössen $x$, $y$, $z$, ... $u$ gar nicht mehr, d. h. zu einer bloss noch die eine unbekannte Grösse $v$ enthaltenden Gleichung gelangen, und also den Zweck des Verfahrens, welches man im Allgemeinen mit dem Namen der Elimination der unbekannten Grössen zu belegen pflegt, vollständig erreicht haben.

Die im Obigen entwickelte Eliminationsmethode ist von Euler in dem zweiten Theile der Introductio in Analysin Infinitorum. Cap. XIX. p. 255 gegeben worden. In den Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. 1764 scheint aber Euler selbst die erste Erfindung dieser Methode Newton beizulegen. In ihren Principien im höchsten Grade einfach, führt dieselbe jedoch, wie oben ausführlich aus einander gesetzt worden ist, häufig zu Gleichungen sehr hoher Grade, die von denen in ihnen enthaltenen fremdartigen Factoren gewöhnlich nur mit nicht leicht zu überwindenden Schwierigkeiten befreit werden können.

## §. 7.

Eine zweite merkwürdige Eliminationsmethode wollen wir jetzt, um nicht zu weitläufig zu werden, zwar nur an einem besondern Falle, aber doch so erläutern, dass die allgemeine Gültigkeit der Regeln, welche wir aus unserer Entwickelung ableiten werden, auf der Stelle und ganz von selbst in die Augen fallen wird.

Wir wollen nämlich annehmen, dass aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

und

$$F(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

welche in Bezug auf $x$ respective vom fünften und vom dritten Grade sind, die Grösse $x$ eliminirt werden soll. Zu dem Ende sei $w$ ein diesen beiden Gleichungen genügender Werth von $x$, so ist nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen für jedes $x$

$$f(x) = (x-w)f_1(x),\ F(x) = (x-w)F_1(x),$$

wo $f_1(x)$ und $F_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen des vierten und zweiten Grades von $x$ bezeichnen. Also ist für jedes $x$

$$f(x)\ F_1(x) = (x-w)f_1(x)F_1(x),$$
$$F(x)\ f_1(x) = (x-w)f_1(x)F_1(x);$$

und folglich für jedes $x$

$$f(x)F_1(x) = F(x)f_1(x)$$

oder

$$f(x)F_1(x) - F(x)f_1(x) = 0.$$

Setzen wir also

$$f_1(x) = -px^4 - qx^3 - rx^2 - sx - t,$$
$$F_1(x) = Px^2 + Qx + R;$$

so ist für jedes $x$

Digitized by Google

$$0 = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)(Px^2 + Qx + R) + (Ax^2 + Bx + C)(px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t),$$

also nach gehöriger Entwickelung für jedes $x$

$$\begin{array}{llllllll}
0 = aPx^6 & +aQx^5 & +aRx^4 & & & & & \\
 & +bP & +bQ & +bRx^4 & & & & \\
 & & +cP & +cQ & +cRx^3 & & & \\
 & & & +dP & +dQ & +dRx^2 & & \\
 & & & & +eP & +eQ & +eRx & \\
 & & & & & +fP & +fQ & +fR \\
+Ap & +Aq & +Ar & +As & +At & & & \\
 & +Bp & +Bq & +Br & +Bs & +Bt & & \\
 & & +Cp & +Cq & +Cr & +Cs & +Ct & \\
 & & & +Dp & +Dq & +Dr & +Ds & +Dt
\end{array}$$

und folglich

$$\begin{array}{llllllll}
aP & & +Ap & & & & & = 0, \\
bP & +aQ & +Bp & +Aq & & & & = 0, \\
cP & +bQ & +aR & +Cp & +Bq & +Ar & & = 0, \\
dP & +cQ & +bR & +Dp & +Cq & +Br & +As & = 0, \\
eP & +dQ & +cR & & +Dq & +Cr & +Bs & +At = 0, \\
fP & +eQ & +dR & & & +Dr & +Cs & +Bt = 0, \\
 & +fQ & +eR & & & & +Ds & +Ct = 0, \\
 & & +fR & & & & & +Dt = 0.
\end{array}$$

Dies sind acht Gleichungen zwischen den acht Grössen $P$, $Q$, $R$; $p$, $q$, $r$, $s$, $t$. Hat man nun aber zwischen den $n$ Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ überhaupt $n$ Gleichungen des ersten Grades oder $n$ sogenannte lineare Gleichungen von der Form

$$\begin{array}{l}
a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + g_0u + h_0v = 0, \\
a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + g_1u + h_1v = 0, \\
a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + g_2u + h_2v = 0, \\
a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + g_3u + h_3v = 0, \\
\qquad \text{u. s. w.} \\
a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + g_{n-1}u + h_{n-1}v = 0;
\end{array}$$

so folgt aus denselben, wie aus §. 4. erhellet, wenn man die dort gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehält, da die in dem in Rede stehenden Paragraphen durch

$$\begin{array}{l}
\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h), \\
\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h), \\
\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h), \\
\qquad \text{u. s. w.} \\
\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k)
\end{array}$$

Digitized by Google

bezeichneten Functionen jetzt offenbar sämmtlich verschwinden, jederzeit

$$x\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0,$$
$$y\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0,$$
$$z\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0,$$

u. s. w.

$$u\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0,$$
$$v\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0.$$

Weiss man also aus andern Gründen, dass die Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ nicht sämmtlich verschwinden, dass folglich wenigstens eine derselben nicht verschwindet, so ist man immer berechtigt zu schliessen, dass

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h) = 0$$

ist. Kehren wir jetzt wieder zu unsern obigen acht Gleichungen zwischen den acht Grössen $P, Q, R, p, q, r, s, t$ zurück, so ist man offenbar immer zu der Annahme berechtigt, dass diese acht Grössen nicht sämmtlich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$f(x) = (x - w)f_1(x),\ F(x) = (x - w)F_1(x),$$

d. i.

$$f(x) = -(x - w)\ (px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t),$$
$$F(x) = (x - w)\ (Px^2 + Qx + R),$$

für jedes $x$

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0,$$

d. i. für jedes $x$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

und folglich

$$a = b = c = d = e = f = 0,$$
$$A = B = C = D = 0$$

sein würde, welches offenbar ungereimt ist. Da also die Grössen $P, Q, R, p, q, r, s, t$ nicht sämmtlich verschwinden, so ist man das vorher überhaupt von $n$ linearen Gleichungen zwischen den $n$ Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ bewiesene Verfahren auf unsere obigen acht Gleichungen des ersten Grades zwischen den acht Grössen $P, Q, R, p, q, r, s, t$ anzuwenden berechtigt, und zwar auf folgende Art.

Die in Rede stehenden acht Gleichungen können auf folgende Art geschrieben werden:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&aP+0Q+0R+Ap+0q+0r+0s+0t=0,\\
&bP+aQ+0R+Bp+Aq+0r+0s+0t=0,\\
&cP+bQ+aR+Cp+Bq+Ar+0s+0t=0,\\
&dP+cQ+bR+Dp+Cq+Br+As+0t=0,\\
&eP+dQ+cR+0p+Dq+Cr+Bs+At=0,\\
&fP+eQ+dR+0p+0q+Dr+Cs+Bt=0,\\
&0P+fQ+eR+0p+0q+0r+Ds+Ct=0,\\
&0P+0Q+fR+0p+0q+0r+0s+Dt=0;
\end{aligned}
$$

und die Coefficienten dieser acht Gleichungen sind also

$$
\begin{array}{c}
a,\ 0,\ 0,\ A,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\\
b,\ a,\ 0,\ B,\ A,\ 0,\ 0,\ 0\\
c,\ b,\ a,\ C,\ B,\ A,\ 0,\ 0\\
d,\ c,\ b,\ D,\ C,\ B,\ A,\ 0\\
e,\ d,\ c,\ 0,\ D,\ C,\ B,\ A\\
f,\ e,\ d,\ 0,\ 0,\ D,\ C,\ B\\
0,\ f,\ e,\ 0,\ 0,\ 0,\ D,\ C\\
0,\ 0,\ f,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ D
\end{array}
$$

Bildet man nun aus diesen Coefficienten die in §. 4. durch $\varphi$ bezeichnete Function ganz auf die dort gelehrte Weise, und setzt dieselbe, wie dies nach dem Vorhergehenden verstattet ist, der Null gleich, so erhält man eine die Grösse $x$ gar nicht mehr enthaltende Gleichung, welche also das gesuchte Resultat der Elimination dieser Grössen aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+ex+f=0,$$

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

ist, und die Elimination lässt sich daher nach dieser Methode immer ohne grosse Schwierigkeit und ohne weitläufige Rechnungen ausführen. Nöthig ist nur noch, dass wir zeigen, wie das obige Schema der Coefficienten immer leicht entworfen werden kann. Die einfachste Art scheint uns folgende zu sein. Man bilde zuerst aus den Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

und

$$A,\ B,\ C,\ D$$

der beiden gegebenen Gleichungen nach einer sich leicht von selbst ergebenden höchst einfachen Regel das folgende Schema:



Digitized by Google

$$
\begin{array}{cccccccc}
a, & & A, & & & & & \\
b, & a, & B, & A, & & & & \\
c, & b, & a, & C, & B, & A, & & \\
d, & c, & b, & D, & C, & B, & A, & \\
e, & d, & c, & & D, & C, & B, & A \\
f, & e, & d, & & & D, & C, & B \\
 & f, & e, & & & & D, & C \\
 & & f, & & & & & D
\end{array}
$$

und fülle hierauf alle fehlenden Stellen durch Nullen aus, so erhält man unmittelbar das gesuchte Schema

$$
\begin{array}{cccccccc}
a, & 0, & 0, & A, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
b, & a, & 0, & B, & A, & 0, & 0, & 0 \\
c, & b, & a, & C, & B, & A, & 0, & 0 \\
d, & c, & b, & D, & C, & B, & A, & 0 \\
e, & d, & c, & 0, & D, & C, & B, & A \\
f, & e, & d, & 0, & 0, & D, & C, & B \\
0, & f, & e, & 0, & 0, & 0, & D, & C \\
0, & 0, & f, & 0, & 0, & 0, & 0, & D
\end{array}
$$

der Coefficienten, aus denen die der Null gleich zu setzende Function $\varphi$ nach den in §. 4. gegebenen Regeln gebildet werden muss.

Man kann noch auf eine andere sehr einfache Weise zu der durch Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

und

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

entspringenden Gleichung gelangen. Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich nämlich unmittelbar die acht folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + 0x^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + 0x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex^1 + fx^0 = 0,\\
&Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + 0x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + 0x^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx^1 + 0x^0 = 0,\\
&0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx^1 + Dx^0 = 0;
\end{aligned}
$$

deren Coefficienten

Digitized by Google

$$
\begin{array}{cccccccc}
a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0, & 0 \\
0, & a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0 \\
0, & 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f \\
A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D
\end{array}
$$

sind, aus denen man nach den in §. 4. gegebenen Regeln die Function $\varphi$ bilden, dieselbe der Null gleich setzen, und dadurch eine die Grösse $x$ gar nicht mehr enthaltende Gleichung, d. h. das gesuchte Resultat der Elimination der Grösse $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen erhalten kann. Das obige Schema der Coefficienten bildet man am leichtesten auf folgende Art. Man schreibt zuerst

$$
\begin{array}{cccccc}
a, & b, & c, & d, & e, & f \\
 & a, & b, & c, & d, & e, & f \\
 & & a, & b, & c, & d, & e, & f \\
A, & B, & C, & D & & & & \\
 & A, & B, & C, & D & & & \\
 & & A, & B, & C, & D & & \\
 & & & A, & B, & C, & D & \\
 & & & & A, & B, & C, & D
\end{array}
$$

und füllt hierauf alle fehlende Stellen durch Nullen aus, wodurch sich ergiebt

$$
\begin{array}{cccccccc}
a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0, & 0 \\
0, & a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0 \\
0, & 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f \\
A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D
\end{array}
$$

ganz wie oben.

Um nur ein ganz einfaches Beispiel zu den beiden vorhergehenden Regeln zu geben, so habe man die beiden Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad Ax + B = 0.$$

Bei der Anwendung der ersten Regel bildet man das Schema

$$
\begin{array}{ccc}
a, & A, & 0 \\
b, & B, & A \\
c, & 0, & B
\end{array}
$$



Digitized by Google

Bei der Anwendung der zweiten Regel muss man das Schema

$$a,\ b,\ c$$
$$A,\ B,\ 0$$
$$0,\ A,\ B$$

bilden. Betrachtet man nun überhaupt die drei Gleichungen

$$a_0x + b_0y + c_0z = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0;$$

so ist nach §. 4.

$$P = (b - a)\ (c - a)\ (c - b),$$

und folglich, wenn man dieses Product gehörig entwickelt,

$$P = bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b$$

oder vielmehr

$$P = a^0b^1c^2 - a^0b^2c^1 + a^1b^2c^0 - a^1b^0c^2 + a^2b^0c^1 - a^2b^1c^0,$$

und folglich durch Verwandlung der Potenzexponenten in Indices die Function $\varphi$ in diesem Falle

$$a_0b_1c_2 - a_0b_2c_1 + a_1b_2c_0 - a_1b_0c_2 + a_2b_0c_1 - a_2b_1c_0.$$

Wendet man nun die erste der beiden obigen Regeln an, so muss man

$$a_0 = a,\ b_0 = A,\ c_0 = 0$$
$$a_1 = b,\ b_1 = B,\ c_1 = A$$
$$a_2 = c,\ b_2 = 0,\ c_2 = B$$

setzen, und erhält hierdurch die gesuchte, $x$ nicht mehr enthaltende Gleichung

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0.$$

Wendet man die zweite der beiden obigen Regeln an, so muss man

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = c$$
$$a_1 = A,\ b_1 = B,\ c_1 = 0$$
$$a_2 = 0,\ b_2 = A,\ c_2 = B$$

setzen, und erhält hierdurch wieder die gesuchte, $x$ nicht mehr enthaltende Gleichung

$$aB^2 + cA^2 - bAB = 0$$

oder

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0,$$

ganz übereinstimmend mit dem vorher gefundenen Resultate.

Dieselbe Gleichung erhält man auch durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren in einem solchen Falle wie der vorliegende auf folgende Art. Bestimmt man $x$ aus der zweiten der beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man

Digitized by Google

$$x = -\frac{B}{A},$$

und dieser Werth von $x$, in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$a\frac{B^2}{A^2} - b\frac{B}{A} + c = 0$$

oder

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0,$$

ganz wie vorher.

Zur Berechnung weitläufigerer Beispiele fehlt hier der Raum; das vorhergehende wird aber auch zur Erläuterung der Anwendung der beiden im Obigen entwickelten Regeln schon hinreichend sein.

Um uns einigermassen ein Urtheil über die Anwendbarkeit der vorhergehenden Methode bei der wirklichen Ausführung von Eliminationen zu bilden, wollen wir in der Kürze untersuchen, wie gross im Allgemeinen die Anzahl der Glieder ist, aus denen die $x$ nicht mehr enthaltende Gleichung besteht, zu welcher die obige Methode führt. Wenn zwischen $n$ unbekannten Grössen $n$ lineare Gleichungen gegeben sind, so ist im Allgemeinen die Anzahl der Glieder der Zähler und Nenner der Werthe der unbekannten Grössen die Permutationszahl für $n$ verschiedene Elemente, nämlich $1.2.3...n$, welches ganz unmittelbar und von selbst aus Bezout's und Cramer's Regeln für die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades, die wir hier, wie schon oben erinnert worden ist, als bekannt voraussetzen, erhellet. Sind nun die beiden gegebenen Gleichungen, aus denen $x$ eliminirt werden soll, in Bezug auf diese Grösse überhaupt vom $m$ten und vom $n$ten Grade, so hat man bei der Anwendung der obigen Eliminationsmethode, wie sogleich in die Augen fallen wird, eigentlich $m+n$ Gleichungen des ersten Grades zwischen eben so vielen unbekannten Grössen aufzulösen, und der gemeinschaftliche Nenner der Werthe dieser unbekannten Grössen ist die Function der $x$ nicht mehr enthaltenden Gleichung, zu welcher die obige Eliminationsmethode führt, so dass also die Anzahl der Glieder dieser Gleichung nach dem Vorhergehenden im Allgemeinen $1.2.3...(m+n)$ ist, wenn auch allerdings wegen der vorkommenden verschwindenden Coefficienten mehrere dieser Glieder wegfallen, und die Anzahl der Glieder im Ganzen sich daher etwas verringert. Weil aber z. B. für $m+n=10$ schon $1.2.3...(m+n)=3628800$ ist, so sieht man, dass die Anzahl der Glieder der $x$ nicht mehr enthaltenden Gleichung doch sehr bald ungeheuer gross werden, und die Elimination von $x$ nach der obigen Methode in der Praxis dann so gut wie unausführbar sein wird.

Auch diese zweite Eliminationsmethode lehrt dem Wesentlichen nach Euler in der Introductio in Analysin Infinitorum. Cap. XIX. p. 265. In neuester Zeit ist dieselbe von Sylvester in dem Philosophical Magazine. February. 1840 und von Richelot in Crelle's Journal mit mehreren guten, in das Obige dem Wesentlichen nach mit aufgenommenen Bemerkungen bereichert worden.

Digitized by Google

## §. 8.

In den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris. 1764 hat Bezout eine Eliminationsmethode angegeben, die im Allgemeinen auf Folgendes hinaus kommt. Die beiden gegebenen Gleichungen seien jetzt

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0,$$

wobei wir bemerken, dass in den Fällen, wo die beiden Gleichungen nicht von demselben Grade sind, die Coefficienten einiger Anfangsglieder in der einen dieser beiden Gleichungen als verschwindend zu betrachten sind. Diese beiden Gleichungen wollen wir auf die Form

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_lx^{n-l}$$
$$= -(a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n),$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_lx^{n-l}$$
$$= -(b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$

bringen, wo $l$ jede der positiven ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots n-1$$

sein kann. Aus den beiden auf diese Weise dargestellten Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{a_0x^l + a_1x^{l-1} + a_2x^{l-2} + \ldots + a_{l-1}x + a_l}{b_0x^l + b_1x^{l-1} + b_2x^{l-2} + \ldots + b_{l-1}x + b_l}$$
$$= \frac{a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit dem Producte der beiden Nenner multiplicirt,

$$(a_0x^l + a_1x^{l-1} + \ldots + a_{l-1}x + a_l)$$
$$\times(b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$
$$-(b_0x^l + b_1x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}x + b_l)$$
$$\times(a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = 0.$$

Denkt man sich jetzt die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nach Potenzen von $x$ entwickelt, so wird dieselbe offenbar die folgende Form annehmen:

$$A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + A_{2,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,l}x + A_{n-1,l} = 0,$$

und mittelst einer sehr einfachen Betrachtung überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Ausdrücke:

$$A_{0,l} = a_0b_{l+1} - b_0a_{l+1},$$
$$A_{1,l} = a_1b_{l+1} - b_1a_{l+1}$$
$$+ a_0b_{l+2} - b_0a_{l+2},$$
$$A_{2,l} = a_2b_{l+1} - b_2a_{l+1}$$
$$+ a_1b_{l+2} - b_1a_{l+2}$$
$$+ a_0b_{l+3} - b_0a_{l+3},$$

Digitized by Google

$$A_{2,l} = a_3 b_{l+1} - b_3 a_{l+1}$$
$$+ a_2 b_{l+2} - b_2 a_{l+2}$$
$$+ a_1 b_{l+3} - b_1 a_{l+3}$$
$$+ a_0 b_{l+4} - b_0 a_{l+4},$$

u. s. w.

$$A_{l-1,l} = a_{l-1} b_{l+1} - b_{l-1} a_{l+1}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+2} - b_{l-2} a_{l+2}$$
$$+ a_{l-3} b_{l+4} - b_{l-3} a_{l+3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$A_{l,l} = a_l b_{l+1} - b_l a_{l+1}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+2} - b_{l-1} a_{l+2}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+3} - b_{l-2} a_{l+3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,,$$
$$A_{l+1,l} = a_l b_{l+2} - b_l a_{l+2}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+3} - b_{l-1} a_{l+3}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+4} - b_{l-2} a_{l+4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,,$$
$$A_{l+2,l} = a_l b_{l+3} - b_l a_{l+3}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+4} - b_{l-1} a_{l+4}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+5} - b_{l-2} a_{l+5}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,,$$
$$A_{l+3,l} = a_l b_{l+4} - b_l a_{l+4}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+5} - b_{l-1} a_{l+5}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+6} - b_{l-2} a_{l+6}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,,$$

u. s. w.

$$A_{n-2,l} = a_l b_{n-1} - b_l a_{n-1}$$
$$+ a_{l-1} b_n - b_{l-1} a_n.$$
$$A_{n-1,l} = a_l b_n - b_l a_n.$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke zur Entwickelung der Grössen

$$A_{0,l};\ A_{1,l};\ A_{2,l};\ A_{3,l};\ \ldots\ A_{n-1,l}$$

hat man sich nur zu merken, dass man sowohl in der Reihe der durch $a$ mit den gehörigen Indices, als auch in der Reihe der durch $b$ mit den gehörigen Indices bezeichneten Coefficienten von jedem Gliede an aufsteigend und absteigend immer nur so weit fortschreiten muss, als diese Coefficienten nicht verschwinden. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, sei $l = 4$, $n = 7$; so ist

Digitized by Google

$$A_{0,4} = a_0 b_5 - b_0 a_5,$$
$$A_{1,4} = a_1 b_5 - b_1 a_5 + a_0 b_6 - b_0 a_6,$$
$$A_{2,4} = a_2 b_5 - b_2 a_5 + a_1 b_6 - b_1 a_6 + a_0 b_7 - b_0 a_7,$$
$$A_{3,4} = a_3 b_5 - b_3 a_5 + a_2 b_6 - b_2 a_6 + a_1 b_7 - b_1 a_7,$$
$$A_{4,4} = a_4 b_5 - b_4 a_5 + a_3 b_6 - b_3 a_6 + a_2 b_7 - b_2 a_7,$$
$$A_{5,4} = a_4 b_6 - b_4 a_6 + a_3 b_7 - b_3 a_7,$$
$$A_{6,4} = a_4 b_7 - b_4 a_7.$$

Sehr leicht erhellet nun aber auch aus dem Vorhergehenden die Richtigkeit der nachstehenden für das Folgende wichtigen Relationen:

$$A_{l+1,l} = A_{l,l+1},$$
$$A_{l+2,l} = A_{l,l+2},$$
$$A_{l+3,l} = A_{l,l+3},$$

u. s. w.

$$A_{n-2,l} = A_{l,n-2},$$
$$A_{n-1,l} = A_{l,n-1}.$$

Aus der Gleichung

$$A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + A_{2,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,l}x + A_{n-1,l} = 0,$$

oder vielmehr aus der Gleichung

$$A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + A_{2,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,l}x^1 + A_{n-1,l}x^0 = 0,$$

erhält man, wenn, was verstattet ist, für $l$ nach und nach die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, . . ., $n-1$ gesetzt werden, die folgenden $n$ Gleichungen:

$$A_{0,0}x^{n-1} + A_{1,0}x^{n-2} + A_{2,0}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,0}x^1 + A_{n-1,0}x^0 = 0,$$
$$A_{0,1}x^{n-1} + A_{1,1}x^{n-2} + A_{2,1}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,1}x^1 + A_{n-1,1}x^0 = 0,$$
$$A_{0,2}x^{n-1} + A_{1,2}x^{n-2} + A_{2,2}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,2}x^1 + A_{n-1,2}x^0 = 0,$$
$$A_{0,3}x^{n-1} + A_{1,3}x^{n-2} + A_{2,3}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,3}x^1 + A_{n-1,3}x^0 = 0,$$

u. s. w.

$$A_{0,n-1}x^{n-1} + A_{1,n-1}x^{n-2} + A_{2,n-1}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,n-1}x^1 + A_{n-1,n-1}x^0 = 0;$$

und wird also, wie sich aus dem Obigen sogleich ergiebt, zu der

Digitized by Google

gesuchten, die Grösse $x$ nicht mehr enthaltenden Gleichung gelangen, wenn man aus den Grössen

$$A_{0,0};\ A_{1,0};\ A_{2,0};\ \ldots\ A_{n-2,0};\ A_{n-1,0}$$
$$A_{0,1};\ A_{1,1};\ A_{2,1};\ \ldots\ A_{n-2,1};\ A_{n-1,1}$$
$$A_{0,2};\ A_{1,2};\ A_{2,2};\ \ldots\ A_{n-2,2};\ A_{n-1,2}$$

u. s. w.

$$A_{0,n-2};\ A_{1,n-2};\ A_{2,n-2};\ \ldots\ A_{n-2,n-2};\ A_{n-1,n-1}$$
$$A_{0,n-1};\ A_{1,n-1};\ A_{2,n-1};\ \ldots\ A_{n-2,n-1};\ A_{n-1,n-1}$$

auf bekannte Weise die im Obigen durch $\varphi$ bezeichnete Function bildet, und dieselbe der Null gleich setzt. Aus den im Vorhergehenden bewiesenen Relationen ergiebt sich aber auf der Stelle, dass man auch statt des obigen Schema's das Schema

$$A_{0,0};\ A_{0,1};\ A_{0,2};\ \ldots\ A_{0,n-2};\ A_{0,n-1}$$
$$A_{0,1};\ A_{1,1};\ A_{1,2};\ \ldots\ A_{1,n-2};\ A_{1,n-1}$$
$$A_{0,2};\ A_{1,2};\ A_{2,2};\ \ldots\ A_{2,n-2};\ A_{2,n-1}$$

u. s. w.

$$A_{0,n-2};\ A_{1,n-2};\ A_{2,n-2};\ \ldots\ A_{n-2,n-2};\ A_{n-2,n-1}$$
$$A_{0,n-1};\ A_{1,n-1};\ A_{2,n-1};\ \ldots\ A_{n-2,n-1};\ A_{n-1,n-1}$$

setzen, aus den in diesem Schema enthaltenen Grössen die im Obigen durch $\varphi$ bezeichnete Function bilden, und dieselbe der Null gleich setzen kann.

Am Schluss dieser Abhandlung bemerken wir noch, dass bei derselben überhaupt das Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique par Cauchy. T. I. Paris. 1840 *) p. 385 vielfach benutzt worden ist. In einer zweiten Abhandlung werden wir späterhin auf diesen Gegenstand zurück kommen.

---

*) Wovon aber die 12te Lieferung, in welcher sich das in Rede stehende Mémoire befindet, nur erst ganz vor Kurzem erschienen ist.

Digitized by Google

# VIII.

## Ueber die Summen der Winkel in ebenen geradlinigen Vielecken.

Von dem

Herrn Director J. H. T. Müller

am Realgymnasium zu Gotha.

1. Bekanntlich wird die Summe der nach einerlei Richtung genommenen Aussenwinkel eines ebenen einfachen Vielecks dadurch ermittelt, dass man aus irgend einem Punkte mit den auf einander folgenden Polygonseiten die gleichstimmig parallelen Linien zieht und die in einerlei Drehungsrichtung genommenen Winkel der den successiven Seiten entsprechenden Parallelen summirt, woraus hervorgeht, dass diese Summe immer ein Vielfaches von $4R$ betragen muss.

2. Auf ganz dieselbe Weise lässt sich auch, was man bisher übersehen zu haben scheint, die Summe der innern Winkel eines solchen Vielecks finden, wenn aus einem beliebigen Punkte mit der 1sten, 3ten, 5ten, .. Seite die gleichstimmig, mit der 2ten, 4ten, 6ten, .. Seite aber die ungleichstimmig parallelen Linien gezogen und dann bei einerlei Drehungsrichtung die Winkel der Parallelen nach folgendem Gesetze summirt werden.

Bezeichnen 1; 3; 5; .. die gleichstimmigen und 2; 4; 6; .. die ungleichstimmigen Parallelen, so ist die Summe aller innern Winkel

1) im $(2n)$eck

$$= (1,2) + (2,3) + (3,4) + \ldots + (2n-1,2n) + (2n,1)$$

2) im $(2n+1)$eck

$$= (1,2) + (2,3) + (3,4) + \ldots + (2n,2n+1) + (2n+1,1')$$

wenn im letztern Falle $1'$ die Rückverlängerung der Parallelen 1 bezeichnet. — Im ersten Falle ist demnach jene Winkelsumme immer ein gerades, im zweiten ein ungerades Vielfaches von 2 rechten Winkeln.

3. Diese Herleitungsweise der Summe der innern Vieleckswinkel hat, abgesehen von der Uebereinstimmung mit der für die äussern Winkel, vor der gewöhnlichen den erheblichen Vorzug, dass sie sich ganz gleichmässig auf alle Vielecke mit beliebig vielen convexen Winkeln anwenden und dass sie die eigentliche Bedeutung der Polygonwinkel deutlicher erkennen lässt.

Es sei mir erlaubt, aus dem Obigen noch einige Folgerungen

Digitized by Google

zu ziehen, welche eine Ergänzung dessen bilden, was ich in der Abhandlung über die symmetrischen Kreisvielecke von ungerader Seitenzahl, Gotha 1840. über die verschiedenen Winkelsummen der Vielecke angedeutet hatte.

4. Bei unveränderter Drehungsrichtung ist in einem einfachen ebenen Vielecke die Summe der Winkel je zweier aufeinander folgender Seiten

| | für $(2n+1)$ Scheitel; | für $(2n)$ Scheitel |
|---|---|---|
| entweder | $1 \cdot 2R$, | $2 \cdot 2R$, |
| oder | $3 \cdot 2R$, | $4 \cdot 2R$, |
| oder | $5 \cdot 2R$, | $6 \cdot 2R$, |
| | . . | . . |
| | . . | . . |
| oder | $(4n+1) \cdot 2R$. | $(4n-2) \cdot 2R$. |

Da aber bei jedem *n*eck die eine oder die andere Drehungsrichtung gewählt werden kann, so giebt es im Allgemeinen für dasselbe zwei Summen der Winkel je zweier anstossender Seiten, welche einander zu $n \cdot 4R$ ergänzen. Beschränkt man sich daher, wenn beide Summen ungleich sind, auf die jedesmalige kleinere, so erhält man bloss nachstehende mögliche Werthe:

| für das $(2n+1)$eck; | für das $(2n)$eck |
|---|---|
| $1 \cdot 2R$, | $2 \cdot 2R$, |
| $3 \cdot 2R$, | $4 \cdot 2R$, |
| . . | . . |
| . . | . . |
| $(2n+1) \cdot 2R$, | $2n \cdot 2R$, |

wo die höchsten Werthe Vielecken angehören, deren Winkelsumme bei beiden Drehungsrichtungen gleich gross ist.

5. Aus der in (2) angegebenen Construction ergiebt sich sogleich, wie umgekehrt auch Vielecke von gegebener Seitenzahl und Seitenrichtung construirt werden können, welche eine vorgeschriebene Winkelsumme, wie die in (4) angegebenen, haben.

Zieht man nämlich von irgend einem Punkte aus in einer Ebene $n$ Strahlen in beliebigen Richtungen, und schreibt an jeden derselben eine der $n$ ersten natürlichen Zahlen, so hängt bei geradzahligen Vielecken die Summe der Winkel von der Zahl der Nichtfolgen ab, welche sich ergeben, wenn man in der gewählten Drehungsrichtung vom Strahle 1 an fortgehend sämmtliche Strahlen so abliest, wie sie, ohne Rücksicht auf die Bezeichnung, der Reihe nach auf einander folgen. Enthalten alsdann die zugehörigen Zahlen $a$ Nichtfolgen, so ist die Summe der Winkel jedes $(2n)$ecks, dessen 1ste, 3te, 5te, .. und 2te, 4te, 6te, .. Seite den Strahlen 1, 3, 5, .. gleichstimmig und den Strahlen 2, 4, 6, .. ungleichstimmig parallel ist, $= (1+a) \cdot 4R$, indem dann $a$ Umläufe gemacht werden müssen, bis man wieder zu dem ersten Strahle gelangt, von dem man ausgegangen war. So enthält jedes zu den

Digitized by Google

aufeinanderfolgenden Strahlen 1352476 gehörige Sechseck, wegen der beiden Nichtfolgen 52 und 76, $\widetilde{(1+2)} \cdot 4R$.

Bei den ungeradzahligen Vielecken ist zu unterscheiden, ob alle Strahlen auf einer oder auf beiden Seiten des Strahls 1 sammt dessen Rückverlängerung 1′ liegen. Im ersten Falle ist bei a Nichtfolgen die Winkelsumme $=(1+2a) \cdot 2R$, im zweiten aber $=(3+2a) \cdot 2R$.

Die sogenannten Drudenfüsse gehören zu den ungeradzahligen Vielecken, deren Winkelsumme $=2R$ ist.

Uebrigens ist die Lage des die Richtung der letzten Vielecksseite bestimmenden Strahles, wie man leicht sieht, innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, weil die letzte Seite der ersten selbst, nicht aber ihrer Verlängerung über den Scheitel (1,2) hinaus begegnen muss. Hieraus erklärt es sich auch, warum beim Dreiecke die Summe der Winkel nur $2R$ oder $10R$, nicht aber $6R$ betragen kann, indem für keine Lage dreier Strahlen eine geschlossene einfache Figur entstehen kann, deren Winkelsumme den zwischen 2 und 10 fallenden Werth von 6 rechten Winkeln gäbe.

6. Die Anwendung der Strahlen führt ausserdem auf eine sehr einfache Methode, die Winkelsummen der $m-1.m-2.m-3 \ldots 4.3$ verschiedenen einfachen ebenen $m$ecke zu finden, welche zu denselben $m$ gegebenen Scheiteln gehören.

Seien (Taf. I. Fig. 1. *a* und *b*) 1, 2, 3, 4, 5 fünf solche in einer Ebene liegende Scheitel, so sind zwischen diesen die zehn Verbindungslinien 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45 und wenn man, wie hier nöthig, auch die Richtung berücksichtigt, die zehn andern Verbindungslinien 21, 31, 41, 51, 32, 42, 52, 43, 53, 54 möglich. Zieht man nun aus dem Mittelpunkte eines Kreises mit diesen 20 Verbindungslinien die gleichstimmig parallelen Radien und schreibt an den Endpunkt jedes derselben die beiden Zahlen, welche der ihm entsprechenden Verbindungslinie angehören: so erhält man ein Strahlensystem, vermittelst dessen sich aus der blossen Aufeinanderfolge der gegebenen Scheitel die Summe der Winkel des dadurch bestimmten einfachen Fünfecks sofort finden lässt. Ist nämlich z. B. 13254 das zu untersuchende Fünfeck, so sind nach (2.) 13, 23, 25, 45, 41, 31 die Endpunkte der ihm zugehörigen Strahlen, die sich ohne die Figur selbst ergeben, wenn man 1̇3̇2̇5̇4̇1̇3̇ statt 13254 schreibt und abwechselnd vor- und rückwärts liest. So viel halbe Umläufe nun gemacht werden müssen, um in einerlei Richtung die Punkte des Kreisumfangs 13, 23, . . ., 31 zu durchlaufen: so viel gestreckte Winkel kommen auf das Fünfeck 13254.

Man sieht leicht, wie durch Einführung neuer Symbole die Auflösung unserer Aufgabe auch auf die Zählung der Nichtfolgen (5.) reducirt werden kann.

7. Die Darstellung aller einfachen $m$ecke, welche dieselben Scheitel: 1, 2, 3, . ., $m$ haben, wird am leichtesten dadurch bewirkt dass man alle Combinationen zweiter Klasse aus den Elementen 2, 3, . ., $m$ bildet, zwischen jede solche Combination die noch übrigen $(m-3)$ Elemente in allen möglichen Anordnungen stellt und jeder so gebildeten Form das Element 1 voranstellt. Für 1, 2, 3, 4, 5 erhält man demnach

Digitized by Google

1 2 45 3; 1 3 25 4;
1 2 54 3; 1 3 52 4;
1 2 35 4; 1 3 24 5;
1 2 53 4; 1 3 42 5;
1 2 34 5; 1 4 23 5;
1 2 43 5; 1 4 32 5,

welches die 12 verschiedenen Fünfecke sind, die zu jenen Scheiteln gehören.

8. Die auf solche Weise gebildeten Anordnungen der Elemente 2, 3, .., $m$, worin keine zwei vorkommen, von denen die eine die Umkehrung der andern ist, verdienen wegen des häufigen Gebrauchs, der sich in der Geometrie davon machen lässt, besondere Beachtung.

9. Aus (7.) ergiebt sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden, dass die verschiedenen zu denselben Scheiteln gehörigen Vielecke sich nach den kleinsten Summen ihrer Winkel klassificiren lassen, was man bisher unterlassen zu haben scheint.

10. Bei der Richtung, welche die Geometrie in der neuern Zeit genommen, dürfte die Aufnahme des in (2.) gegebenen Beweises in die Elemente nicht unzweckmässig sein, indem der Anfänger dann frühzeitig mit den Vielecken in ihrer allgemeinern Bedeutung bekannt gemacht werden kann.

# IX.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

(Fortsetzung.)

### 4. Cubatur des Ellipsoids, Hyperboloids mit 2 gleichen Axen.

Die Gleichung des um die grosse Axe rotirenden Kegelschnitts sei $y^2 = px + qx^2$, die Abscisse $x$ werde in $n$ gleiche Theile getheilt und durch die Endpunkte der Ordinaten werden Parallelen zur grossen Axe gezogen, dann entstehen durch Umdrehung des Kegelschnitts Cylinder, deren Gesammt-Cubikinhalt durch die Summation der Quadratzahlen und der natürlichen Zahlen gefunden wird $= x\pi\left[\frac{px}{2}(1+\frac{1}{n})+qx^2(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})\right]$.

Digitized by Google

Indem man das Ellipsoid mit 3 ungleichen Axen durch Ebenen, die zu zwei Axen parallel gezogen werden, in gleich weit von einander abstehende elliptische Cylinder zerfällt, kann man durch dasselbe Hülfsmittel ohne die geringste Schwierigkeit den Gesammt-Cubikinhalt der elliptischen Cylinder erhalten. Sind die Axen $b$ und $c$, zu welchen die Ebenen parallel gelegt werden, und wird die auf $a$ genommene Abscisse $x$ vom Mittelpunkte gezählt in $n$ gleiche Theile getheilt, so ist der Cubikinhalt der elliptischen Cylinder $= x\pi cb\left[1-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right]$, woraus der Cubikinhalt des halben Ellipsoids $\frac{2}{3}abc\,.\,\pi$ folgt.

5.

Der bekannte Ausdruck für den Radius des Krümmungskreises der Kegelschnitte durch die Normale stand mir zu isolirt, ich suchte deshalb einen Ausdruck für den Radius des durch 3 Punkte eines Kegelschnitts gelegten Kreises, und fand, dass jener Radius gleich ist dem Produkte dreier Normalen auf die 3 Sehnen des Kegelschnitts, dividirt durch das Quadrat des halben Parameters. Jede dieser Normalen wird auf folgende Art bestimmt: Aus dem Mittelpunkte wird ein Radius Vektor durch den Mittelpunkt der Kegelschnittssehne gelegt, und die oben bezeichnete Normale auf diese Sehne geht von dem Endpunkte des Radius Vektor auf der Curve bis zum Durchschnitte mit der grossen Axe. Fallen die 3 Punkte des Kegelschnitts zusammen, so verwandeln sich die ursprünglich ungleichen Normalen in 3 gleiche Linien.

6.

Wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse bewegt, während der anziehende Punkt in einem Brennpunkte derselben steht, so ist die anziehende Kraft dem Quadrate der umgekehrten Entfernung des anziehenden von dem angezogenen Punkte proportional.

Dieser bekannte Satz lässt sich ohne Hülfe der höhern Rechnungen beweisen. Die Kraft, mit welcher der Punkt vom Centrum der Anziehung sich zu entfernen strebt, ist $=\frac{v^2}{R}$, wenn $v$ die Geschwindigkeit und $R$ den Krümmungshalbmesser für den Ort des bewegten Punkte bezeichnet. Ist $F$ die Kraft, mit welcher dieser Punkt in der Richtung des Radius Vektor $r$ angezogen wird, so ist die in die Richtung der Normale $n$ fallende Kraft $F\cos(t,r)$, wenn $t$ die Senkrechte vom Brennpunkte auf die Tangente bezeichnet. Da nun die genannte Kraft gerade so gross sein muss, als die Centrifugalkraft $\frac{v^2}{R}$, so ist $F=\frac{v^2}{R}\cdot\frac{r}{t}$. Ist die Geschwindigkeit im nächsten Scheitelpunkte 1, die Excentrizität $e$, so ist $a(1-e)=vt$, folglich $F=\frac{a^2\,.\,(1-e)^2\,.\,r}{Rt^2}$. Da aber, wie leicht zu beweisen, $\frac{nt}{r}=\frac{b^2}{a}$, und $R=\frac{n^2\,.\,a^2}{b^4}$, so ist $F=\frac{(1-e^2)a^2}{b^2\,.\,r^2}$.

Bewegt sich der Punkt auf der Peripherie der Ellipse, während der anziehende Punkt im Mittelpunkte derselben steht, so ist $F$ der Entfernung direkt proportional.

Digitized by Google

Denn sei der Radius Vektor $r$, so ist $F = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{r}{t}$, wenn $t$ die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Tangente bedeutet. Ist die Geschwindigkeit im Scheitel 1, so hat man $v = \frac{a}{t}$, $t = \frac{ab}{n}$, $Rt^3 = \frac{n^3 a^2 a^2 b^3}{b^4 n^3} = \frac{a^4}{b}$, folglich $F = \frac{b}{a^3} \cdot r$.

7.

Ein weites und interessantes Gebiet zur Untersuchung der Eigenschaften der Ellipse bietet die Betrachtung dieser Curve als der orthographischen Projektion des Kreises dar, wenn beide Ebenen in der Richtung der grossen Axe einander schneidend angenommen werden. Durch die einfachsten Hülfsmittel, als da sind, die Projektionen paralleler Linien im Raume auf dieselbe Ebene sind parallel, der Cosinus des Neigungswinkels einer begrenzten Figur in der Kreisebene mit der Projektion ist $= \frac{b}{a}$ u. s. w., gelangt man ohne die geringste Mühe zu den Eigenschaften der Tangenten, der konjugirten Durchmesser, der umschriebenen Parallelogramme u. s. w.

8.

Die Auflösung der 6 Hauptfälle der sphärischen Trigonometrie durch geometrische Construction in der Ebene lässt sich auf sehr einfache Weise erhalten, indem man in der körperlichen dreiseitigen Ecke, deren Kanten $SA$, $SB$, $SC$ in derselben Folge die Winkel $c$, $b$ und $a$ einschliessen, $BC$ und $AC$ rechtwinklig auf $SC$ nimmt. Das Dreieck $ABC$, in welchem 3 Seiten bekannt sind, wenn $a$, $b$ und $c$ gegeben werden, giebt den Neigungswinkel $ACB$ oder den sphärischen Winkel zwischen $a$ und $b$. Durch dasselbe Dreieck findet man die dritte sphärische Seite aus den beiden andern Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. Ist gegeben $c$, $a$ und der $c$ gegenüber liegende Winkel, so fällt man von $A$ eine Senkrechte $AD$ auf $BC$ und eine Senkrechte von $AE$ auf $SB$, so liegen die Punkte $S$, $E$, $D$, $C$ auf der Peripherie eines Kreises, so dass die Lage des Punktes $E$ durch den Durchschnitt dieses Kreises und des mit dem Radius $SE$ beschriebenen Kreises gefunden werden kann u. s. w.

9.

Die graphische Darstellung der Funktionen scheint mir ein zweckmässiges Hülfsmittel für den Unterricht, um eine recht bewusste Auffassung der Eigenschaften derselben möglich zu machen. Zu dem Ende habe ich mir eine ansehnliche Menge solcher Darstellungen gezeichnet, wie die Linien der Sinus, der Cosinus, der Tangenten, der natürlichen und Briggischen Logarithmen, der Logarithmen der Kreisfunktionen u. s. w. Selbst einfache Funktionen, wie $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ bieten, wenn sie für dieselbe Veränderliche auf dasselbe Blatt gezeichnet werden, manche Eigenschaften dar, deren sich wenigstens der Schüler in dem Augenblicke, da ihm diese Funktionen genannt werden, nicht be-

Digitized by Google

wusst wird, z. B. dass sich alle diese Curven in 2 Punkten begegnen, dass sie je nach dem höhern Grade bis zum Punkte $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ immer näher an die Abscissenaxe und an die Ordinate 1 treten u. s. w.

### 10. Veranschaulichende Darstellung der Primzahlen.

Ein grosses gleichseitiges Dreieck wird in 10000 kongruente gleichseitige Dreiecke zertheilt und in jedes Dreiecksfeld eine der natürlichen Zahlen so geschrieben, dass die Zahl 1 in die Spitze, 2 an den Anfang der zweiten Horizontalreihe, 4 an das Ende derselben, 5 an den Anfang der dritten Horizontalreihe, 9 an das Ende derselben kommt, wie denn überhaupt der ganze rechte Saum des Dreiecks von den Quadraten der natürlichen Zahlen eingenommen, in jeder Horizontalreihe aber von der linken nach der rechten Hand gezählt wird. Giebt man nun den Feldern der Primzahlen eine andere Farbe, so gewahrt man bei geringer Aufmerksamkeit, dass im Allgemeinen die Primzahlen in gewissen parallelen fast gleichweit von einander entfernten Richtungen dichter beisammen liegen, als in andern Richtungen. Die Zahlen von der Form $41 + n(n-1)$ stellen einen Stab mit geschlossenem sechseckigem Sterne dar, dem einzigen, der unter den 10000 Dreiecken vorkommt.

### 11.

Einfache Bestimmung des Brechungsverhältnisses in einem dreiseitigen Prisma durch den Neigungswinkel $\psi$ zweier Seiten-Ebenen des Prismas und durch die Winkel, welche der einfallende und der austretende Strahl an jeder Stelle mit dem Einfallslothe bilden.

Der Strahl treffe in $A$ das Prisma, und bilde mit dem Einfallslothe den Winkel $\alpha$, der gebrochene Strahl trete in $B$ aus dem Prisma und bilde mit dem Einfallslothe daselbst den Winkel $\delta$, die beiden Lothe, welche die Winkel $\alpha$ und $\beta$ im Innern des Prismas mit dem Strahle $AB$ einschliessen, schneiden sich in $C$, so hat man in dem Dreiecke $ABC$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \,.\, CB \,.\, \cos\psi$$

$$= AB^2\left[\frac{AC^2}{AB^2} + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 + \frac{2AC}{AB}\cdot\frac{CB}{AB}\cos\psi\right]$$

folglich $1 = \sin\beta^2 + \sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\psi$

$$= \frac{\sin\delta^2}{n^2\sin\psi^2} + \frac{\sin\alpha^2}{n^2\sin\psi^2} + \frac{2\sin\alpha\,.\,\sin\delta\,.\,\cos\psi}{n^2\sin\psi^2}$$

und $n\sin\psi = \sqrt{\sin\alpha^2 + \sin\delta^2 + 2\sin\alpha\,.\,\sin\delta\,\cos\psi}$ *).

*) Siehe Seebeck's: Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Berolini 1830.

(Der Schluss folgt im nächsten Hefte.)

Digitized by Google

# X.

## Lehrsatz, die Ecken der Pyramiden betreffend.

Von dem

Herrn Director J. H. T. Müller

am Realgymnasium zu Gotha.

Da die Eigenschaften der Polyederecken bisher noch wenig untersucht worden sind, so wird vielleicht einzelnen Mathematikern die Mittheilung eines, wie ich glaube, neuen und an Folgerungen ziemlich reichen Lehrsatzes, die Ecken der Pyramiden betreffend, nicht unangenehm sein. Sollte ich mich hierin nicht täuschen, so würde ich später noch eine Reihe damit verwandter Sätze für andere Polyeder mittheilen.

1. Ich lege, der grössern Deutlichkeit wegen, statt einer $n$seitigen Pyramide die beliebige fünfseitige $OABCDE$ (M. s. Fig. 2 *a* und *b* auf der schon dem ersten Hefte beigegebenen Taf. I.) bei meiner Betrachtung zu Grunde und nehme auch fürs Erste an, dass die fünfkantige Basis $ABCDE$ lauter concave Winkel enthält. Jene Beschränkung ist ohne Einfluss auf die Allgemeingültigkeit des Lehrsatzes und diese wird später aufgehoben werden.

2. Um die Ecken unserer Pyramide zu vereinigen, verfahre ich wie bei der Summirung der Winkel eines ebenen geradlinigen Vielecks in dem Aufsatze Nr. VIII. und ziehe aus dem Mittelpunkte $M$ irgend einer Kugel

1) mit den Seitenkanten $OA$, $OB$, $OC$, $OD$, $OE$ die ungleichstimmig parallelen Radien, welche der Kugelfläche bezüglich in den Punkten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, $\varepsilon'$ begegnen und dort die Spitzen eines sphärischen Fünfecks $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ bilden, welche das Maass der Scheitelecke von $O$, mithin auch der ursprünglichen Ecke $O$ in der gegebenen Pyramide ist;

2) aus demselben Punkte $M$ mit den Grundkanten $BA$, $CB$, $DC$, $ED$, $AE$ die gleichstimmig parallelen Radien, die die Kugelfläche bezüglich in den Punkten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ und rückwärts verlängert in $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ treffen, und sämmtlich in dem mit der Basis der Pyramide parallelen Hauptkreise der Kugel liegen.



Digitized by Google

3. Da $Ma'$, $Me$, $M\alpha'$ mit $AB$, $AE$, $AO$ gleichstimmig parallel sind, so ist das sphärische Dreieck

$a'\alpha'e$ das Maass der Grundecke $A$ der gegebenen Pyramide,

und ebenso $b'\beta'a$ - - - - $B$ - - -

$c'\gamma'b$ - - - - $C$ - - -

$d'\delta'c$ - - - - $D$ - - -

$e'\varepsilon'd$ - - - - $E$ - - -

Ausserdem entstehen noch die sphärischen Vierecke

$$a'eb'\beta'$$
$$\beta'ac'\gamma'$$
$$\gamma'bd'\delta'$$
$$\delta'ce'\varepsilon'$$
$$\varepsilon'da'\alpha',$$

bei denen, was ihren Inhalt betrifft, zu unterscheiden ist, ob die zwischen einem griechischen und lateinischen Buchstaben liegenden Seiten einander verlängert oder unverlängert schneiden, welches statt findet, je nachdem in der Drehungsrichtung $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ die untern Grundlinien derselben, nämlich $eb'$, $ac'$, $bd'$, $ce'$, $da'$, Folgen oder Nichtfolgen bilden. Im letztern Falle nämlich giebt der Unterschied zwischen dem obern und untern der beiden entstandenen Dreiecke den Inhalt des jedesmaligen sphärischen Vierecks.

4. Mit Rücksicht hierauf ist

$$\begin{aligned}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' &+ a'\alpha'e + a'eb'\beta' = \text{der Halbkugelfläche},\\ &+ b'\beta'a + \beta'ac'\gamma'\\ &+ c'\gamma'b + \gamma'bd'\delta'\\ &+ d'\delta'c + \delta'ce'\varepsilon'\\ &+ e'\varepsilon'd + \varepsilon'da'\alpha'\end{aligned}$$

die das Maass von 4 rechten Ecken ist, welche ich mit $4R$ bezeichne.

5. Weil ferner z. B. $OA$, $OB$ und $AB$ in einer Ebene liegen, so liegen auch die Endpunkte $\alpha'$, $\beta'$, $a$ und $a'$ der damit parallelen Radien in einer und derselben Ebene, und es ist das sphärische Zweieck $a'\alpha'\beta'ad'ea'$ das Maass des Grundkeils $AB$. Bezeichnen wir nun die die Grundkeile der Pyramide, nämlich $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$ messenden Zweiecke mit $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$, $(e)$, so erhalten wir die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned}(a) &= a'\alpha'e + a'eb'\beta' + b'\beta'a;\\ (b) &= b'\beta'a + \beta'ac'\gamma' + c'\gamma'b;\\ (c) &= c'\gamma'b + \gamma'bd'\delta' + d'\delta'c;\\ (d) &= d'\delta'c + \delta'ce'\varepsilon' + e'\varepsilon'd;\\ (e) &= e'\varepsilon'd + \varepsilon'da'\alpha' + a'\alpha'e.\end{aligned}$$

6. Addirt man die in (5) erhaltenen Gleichungen und sub-

Digitized by Google

trahirt von der dadurch hervorgebrachten die in (4) erhaltene Gleichung, so ist für $K$ als Halbkugelfläche:

$$(a)+(b)+(c)+(d)+(e)-K=a'\alpha'e+b'\beta'a+c'\gamma'b + d'\delta'c+e'\varepsilon'd-\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'.$$

Aus dieser Gleichung aber ergiebt sich, wenn man von der Kugelfläche wieder zu den Ecken zurückkehrt und zugleich erwägt, dass $(a)-a'\alpha'e$ das Maass derjenigen Ecke, welche $AO$, $AE$ und die Verlängerung von $BA$ über $A$ hinaus zu Kanten hat, also die Aussenecke von $A$ ist, die ich mit $A'$ bezeichne, dass

$$A'+B'+C'+D'+E'+O=4R.$$

7. Da die ganze Herleitungsweise zeigt, dass die Beziehungen für jede mehrseitige Pyramide sich nicht ändern, so ist allgemein für jede Pyramide mit hohlwinkliger Grundfläche

$$A'+B'+C'+\ldots+O=4R, \text{ d. i.}$$

„In jeder gewöhnlichen Pyramide ist die Summe „aller nach einerlei Richtung genommenen Aus„senecken über der Grundfläche, vermehrt um die „Ecke an der Spitze, so gross als vier rechte „Ecken;“

oder was dasselbe ist,

„die Summe aller Aussenecken gleich der Neben„ecke der Ecke an der Spitze.“

8. Diess ist vielleicht der erste Lehrsatz, der bei Polyedern mit nicht parallelen Flächen, einen constanten Werth für eine Summe von Ecken nachweist, welche von der Zahl und Lage der Seiten völlig unabhängig ist.

Auch ist die Analogie dieses Satzes mit dem bekannten planimetrischen zu beachten, dem zufolge

in jedem hohlwinkligen ebenen Vielecke die Summe aller Aussenwinkel vier rechte Winkel beträgt.

9. Bewegt sich die Spitze $O$ der Pyramide nach der Grundfläche hin, so behält der Satz auch dann noch seine Gültigkeit, wenn $O$ in die Ebene der Grundfläche selbst fällt, indem dann die Aussenkeile sämmtlich zu Null werden, während die Ecke $O$ in eine flache Ecke übergeht, die $4R$ gleich ist.

Setzt die Spitze $O$ ihre Bewegung noch weiter fort, d. h. tritt sie unter die Grundfläche, so wird, wie man sich sogleich überzeugt, die Ecke an der Spitze convex, also grösser als $4R$; dagegen werden dann die Aussenecken an der Grundfläche, Alles auf die ursprüngliche Figur bezogen, negativ. Auch dann ist noch

die algebraische Summe der Aussenecken und der Ecke an der Spitze so gross als vier rechte Ecken.

Der letztere Fall kommt bei der Betrachtung der allgemeinen Polyeder in Anwendung.

Wird der Abstand der Spitze $O$ von der Grundfläche unendlich gross, werden also die Seitenkanten der Pyramide einander parallel, und geht die Ecke $O$ in Null über, so ist auch noch



Digitized by Google

in dem halbbegrenzten prismatischen Raume die Summe aller einseitswendigen Aussenecken gleich der Summe von vier rechten Ecken.

10. Aus dem Beweise von (7) folgt ferner unmittelbar, dass in jeder Pyramide

die Summe der nach einer Richtung hin genommenen Aussenecken an der Grundfläche gleich ist der Summe der nach der entgegengesetzten hin genommenen.

11. Auch ergiebt sich sofort,

dass wenn in zwei Pyramiden von gleicher oder ungleicher Seitenzahl die Summen der einseitswendigen Aussenecken an der Grundfläche einander gleich sind, auch die beiden Ecken an der Spitze einander gleich sein werden.

Der obige Lehrsatz bietet demnach auch ein Hülfsmittel dar, die Gleichheit zweier der Gestalt nach durchaus verschiedenen Ecken zu erweisen.

12. Umgekehrt ist, wenn man durch eine Ecke beliebig viele Ebenen legt, welche keiner Kante parallel sind und nicht durch den Scheitel gehen,

an jeder solchen Ebene die Summe aller einseitswendigen nach der Spitze zu liegenden Aussenecken constant und der Ergänzung der gegebenen Ecke zu vier rechten Ecken gleich.

Auch lässt sich dieser Satz auf gleichgrosse Ecken ausdehnen.

13. Enthält endlich die Grundfläche der Pyramide convexe Winkel, so lässt sich eben so leicht darthun,

dass die Summe aller einseitswendigen Aussenecken vermehrt um die Ecke an der Spitze sovielmal vier rechte Ecken beträgt, als in der Summe der Aussenwinkel der Grundfläche vier rechte Winkel enthalten sind.

Erst in dieser Gestalt hat der Lehrsatz die erforderliche Allgemeinheit, in welcher er sich auf Polyeder mit convexen Ecken anwenden lässt.

14. Mit Uebergehung aller weitern Folgen, welche sich aus dem oben erwiesenen Lehrsatze ziehen lassen, erlaube ich mir noch schliesslich einige ganz leichte Sätze, die Ecken und Keile der Prismen betreffend mitzutheilen, die, wenn es nicht bereits geschehen ist, in die Elemente der Stereometrie könnten aufgenommen werden.

15. Im $n$seitigen Prisma ist

1) die Summe aller Seitenkeile das $(n-2)$fache des gestreckten Keils.

2) Die Summe aller Grundkeile das $n$fache des gestreckten Keils.

Hieraus folgt, dass

3) im Parallelepipedon die Summe aller Keile das 3fache von vier rechten Keilen ist.

16. Eben so ist im $n$seitigen Prisma die

Summe aller Ecken gleich der Summe aller Seitenkeile oder $(n-2)$mal so gross als die flache Ecke.

Demnach haben alle Parallelepipeda eine gleichgrosse Eckensumme, welche $8R$ oder eine volle Ecke beträgt.

Digitized by Google

# XI.

## Combinatorische Lösung der Euler-Pfaff'schen Aufgabe in Nr. XXVII. des ersten Theils.

Von dem

Herrn Professor Dr. Tellkampf

in Hannover.

---

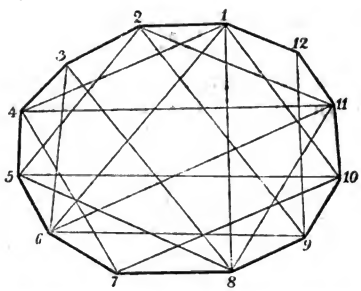
Die nach dem Vorgange von Euler, welcher seine Forderung auf die Zerlegung in Dreiecke beschränkt hatte, von J. F. Pfaff gestellte allgemeinere Aufgabe lautet a. a. O. folgendergestalt:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt.

Da der Gegenstand der Betrachtung offenbar einen combinatorischen Charakter hat, indem es sich um alle denkbaren Umstellungen der Diagonalen handelt, durch welche die Gesammtfigur in die verlangten Partialfiguren zerlegt werden könne, so erscheint es angemessen, die Eckpunkte des gegebenen $n$ecks durch die fortlaufende Zahlenreihe $1, 2, 3 \ldots n$ zu bezeichnen und die von diesen Punkten auslaufenden Diagonalen (als die eigentlichen Elemente der Zusammenstellungen) ebenfalls beziehungsweise mit den Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ anzudeuten, wobei indessen Wiederholbarkeit derselben bedungen werden muss, um z. B. durch die Combinationsform $1.1.1.1$ vier verschiedene aber sämmtlich vom Eckpunkte 1 ausgehende Diagonalen auszudrücken. Unter dieser Voraussetzung braucht man, um irgend eine Combinationsform von $q$ Elementen aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ als Diagonalenstellung in der gegebenen Figur nachzuweisen, nur von jedem der bezeichneten Eckpunkte zu dem um $(m-1)$ weiter gezählten eine Diagonale zu ziehen, indem man zunächst (um dem Schneiden der Diagonalen zu begegnen) mit denjenigen Punkten beginnt, auf welche mindestens $(m-2)$ nicht in der Complexion angedeutete folgen, und dann mit dem übrig bleibenden Theile der Figur dieses Verfahren fortsetzt. Zu noch bestimmterer Bezeichnung der Diagonalenstellung deutet man am zweckmässigsten ihre Reihenfolge durch die der Elemente an, so dass das erste, zweite, dritte u. s. f. zugleich die erste, zweite, dritte .... Diagonale bezeichnet, was freilich nicht selten eine Umstellung der Elemente einer gegebenen Combinationsform nöthig machen wird, wobei dann natürlich auch niedrigere Elemente auf höhere folgen dürfen.

Digitized by Google

Wählen wir zu völliger Verdeutlichung dieser Darstellungsweise irgend eine bestimmte Figur, etwa wie nachstehend ein Zwölfeck.




Um dasselbe auf alle mögliche Arten in Vierecke zu zerlegen, welches durch 4 Diagonalen geschieht, so wird man diese zunächst von dem Eckpunkte 1 nach den Punkten 4, 6, 8, 10 ziehen und durch die Combinationsform 1 . 1 . 1 . 1 darstellen können. Wollte man die Endpunkte dieser vier Linien ebenfalls bemerklich machen, so dürfte man nur jedem Elemente 1 die Zahl der Ecke anhängen, welche den Endpunkt bilden soll; folglich wäre näher bestimmt die Combinationsform $1 . 1 . 1 . 1 = 1_4 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$, und es lässt sich nach dem oben Gesagten aus der unmittelbaren Betrachtung der Figur leicht entnehmen, wie man jeder andern Complexion aus vier der gegebenen Elemente 1, 2, 3 . . . . 12 in gleicher Weise ihre bestimmte Deutung zu geben im Stande ist. So findet man z. B. leicht die Diagonalenstellungen für die Formen:

$$1)\ 1 . 1 . 1 . 1 = 1_4 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$$
$$2)\ 1 . 1 . 1 . 2 = 2_5 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$$
$$3)\ 1 . 1 . 1 . 3 = 3_6 . 1_6 . 1_8 . 1_{10},$$

indem die erste Diagonale zu den Punkten 2 und 3, und also in zwei andere Lagen übergeht, während die drei übrigen unverändert bleiben. Dagegen fordern die Formen:

$$4)\ 1 . 1 . 1 . 4 = 1_4 . 4_7 . 1_8 . 1_{10}$$
$$5)\ 1 . 1 . 1 . 5 = 1_4 . 5_8 . 1_8 . 1_{10}$$
$$6)\ 1 . 1 . 1 . 6 = 1_4 . 1_6 . 6_9 . 1_{10}$$
$$7)\ 1 . 1 . 1 . 7 = 1_4 . 1_6 . 7_{10} . 1_{10}$$

eine Vertauschung der zweiten oder dritten aus dem Punkte 1 gezogenen Diagonale gegen eine andere, die von einem der Punkte 4,5 oder 6,7 ausgeht. Beispielsweise mögen endlich noch die Complexionen

$$8)\ 1 . 4 . 7 . 10 = 1_4 . 4_7 . 7_{10} . 10_1$$
$$9)\ 1 . 2 . 3 . 4 = 1_{10} . 2_9 . 3_8 . 4_7$$

Digitized by Google

10) $2.4.6.8 = 2_{11}.4_{11}.6_{11}.8_{11}$

mit der Figur verglichen werden, um die Bestimmtheit zu erkennen, welche in der hier gewählten arithmetischen Andeutung der verschiedenen Diagonalenstellungen liegt.

So unzweifelhaft aber auch die geometrische Deutung ist, die man nach dem Vorhergehenden einer jeden Complexion zu geben vermag, sind die verschiedenen Complexionen doch weit entfernt, eben so viele verschiedene Diagonalenstellungen auszudrücken. Schon das letzte der obigen Beispiele zeigt augenfällig, dass für ein in Vierecke zu zerlegendes Zwölfeck die Form $2.4.6.8 = 2_{11}.4_{11}.6_{11}.8_{11}$ gleichbedeutend mit der Complexion $11.11.11.11 = 11_2.11_4.11_6.11_8$ ist. Noch bestimmter wird man die Mannigfaltigkeit von Combinationsformen durchaus gleicher Bedeutung aus folgenden Beispielen abnehmen können:

1.
$$\begin{cases} 1.1.1.1 = 1_4.1_6.1_8.1_{10} \\ 1.1.1.10 = 1_4.1_6.1_8.10_1 \\ 1.1.8.10 = 1_4.1_6.8_1.10_1 \\ 1.6.8.10 = 1_4.6_1.8_1.10_1 \\ 4.6.8.10 = 4_1.6_1.8_1.10_1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 1.2.3.4 = 1_{10}.2_8.3_8.4_7 \\ 1.2.3.7 = 1_{10}.2_9.3_8.7_4 \\ 1.2.7.8 = 1_{10}.2_9.8_3.7_4 \\ 1.7.8.9 = 1_{10}.9_2.8_3.7_4 \\ 7.8.9.10 = 10_1.9_2.8_3.7_4 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 1.3.5.5 = 1_{10}.3_{10}.5_{10}.5_8 \\ 1.3.5.8 = 1_{10}.3_{10}.5_{10}.8_5 \\ 1.3.8.10 = 1_{10}.3_{10}.10_5.8_5 \\ 1.8.10.10 = 1_{10}.10_2.10_5.8_5 \\ 8.10.10.10 = 10_1.10_3.10_5.8_5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 1.2.11.11 = 2_6.1_6.11_6.11_6 \\ 1.2.8.11 = 2_5.1_6.11_6.8_{11} \\ 1.2.6.8 = 2_5.1_6.6_{11}.8_{11} \\ 2.6.6.8 = 2_6.6_1.6_{11}.8_{11} \\ 5.6.6.8 = 5_2.6_1.6_{11}.8_{11} \end{cases}$$

Bei näherer Betrachtung der vorstehenden vier Diagonalenstellungen nimmt man ohne Mühe wahr, dass die Umgestaltung ihrer Ausdrücke allmählig fortschreitet und zwar von der letzten Diagonale ausgeht. Denn zunächst darf man sich diese umgewendet (oder von ihrem Endpunkte aus gezogen) und demgemäss anders bezeichnet vorstellen, ohne dass dadurch die Bedeutung der Complexion im Mindesten geändert wird. Das Nämliche gilt dann aber auch von der vorletzten Diagonale u. s. f. bis zur ersten hin, so dass hier jede beliebige Complexion vier Umformungen gestat-

Digitized by Google

tet, die mit ihr durchaus dasselbe bezeichnen. — Sei nun die allgemeine Andeutung einer beliebigen Combinationsform

$$a \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, c \,.\, d = a_\alpha \,.\, b_\beta \,.\, \ldots \,.\, c_\gamma \,.\, d_\delta,$$

worin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die respectiven Endpunkte der aus den Ecken $a$, $b$, $c$, $d$ gezogenen Diagonalen andeuten, so bleibt die Bedeutung jener Complexion die nämliche in den Formen

$$a_\alpha \,.\, b_\beta \,.\, \ldots \,.\, c_\gamma \,.\, \delta_d = a_\alpha \,.\, b_\beta \,.\, \ldots \,.\, \gamma_c \,.\, \delta_d = a_\alpha \,.\, \beta_b \,.\, \ldots \,.\, \gamma_c \,.\, \delta_d$$
$$= \alpha_a \,.\, \beta_b \,.\, \ldots \,.\, \gamma_c \,.\, \delta_d;$$

denn es wird zunächst die letzte Diagonale eben so bestimmt durch $\delta$ als durch $d$ bezeichnet, da bei unveränderter Andeutung der vorhergehenden über die Lage der äussersten Theilungslinie in beiden Fällen kein Zweifel bleiben kann; — und da das Nämliche aus gleichen Gründen von der vorletzten Diagonale behauptet werden darf, sofern man nur in den Andeutungen aller übrigen nichts ändert, so lässt sich die Umsetzung der Elemente allmählig bis zum ersten ausdehnen. Die gegebene Complexion $a \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, c \,.\, d$ wird also, wenn sie überhaupt $q$ Elemente enthält, auch $q$ Umformungen zulassen, ohne ihre Bedeutung zu ändern; oder mit andern Worten: es werden unter sämmtlichen Complexionen $(q+1)$ von dieser übereinstimmenden geometrischen Bedeutung enthalten sein.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche ein gegebenes $n$eck sich durch $q$ Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt, ist nunmehr ohne alle Schwierigkeit bestimmbar, da man weiss, dass die überhaupt mögliche Menge von Combinationsformen zu $q$ aus $n$ wiederholbaren Elementen durch

$$\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,\ldots\ldots\,(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,q}$$

ausgedrückt wird, worin nach dem Vorhergehenden die arithmetische Darstellung jeder Diagonalenstellung $(q+1)$mal enthalten ist, so dass man, um die wirklich verschiedenen Diagonalenstellungen zu erhalten, noch mit $(q+1)$ dividiren muss. Bezeichnen wir daher die gesuchte Anzahl für ein $n$eck mit $q$ Diagonalen durch $A^n{}_q$, so erhalten wir den allgemeinen Ausdruck

$$A^n{}_q = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{n(n+1)\,(n+2)\,\ldots\ldots\,(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,q};$$

und vermöge dieser independenten Formel lässt sich eine Tafel, wie die von Nic. Fuss gegebene (s. Pag. 198 a. a. O.) leicht bis zu beliebiger Weite aufstellen, indem man nur aus derjenigen der Figurirten Zahlen die entsprechenden Werthe zu nehmen und beziehungsweise durch die ganzen Zahlen 1, 2, 3 .... $= q+1$ zu dividiren braucht.

Auf den ersten Blick mag es auffallend erscheinen, in vorstehendem allgemeinen Ausdrucke unter den bestimmenden Grössen die Zahl $m$ zu vermissen, welche in den a. a. O. mitgetheilten recurrirenden Formeln, so wie auch in der daraus durch Induction geschlossenen independenten auftritt. Man erkennt aber leicht, dass bei der Abhängigkeit, in welcher die Grössen $n$, $m$ und $q$ zu einander stehn, ausgedrückt durch die Gleichung

Digitized by Google

$$n = (q+1)\,m - 2q,$$

nur eine der beiden Zahlen $n$, $m$ überhaupt in die Formel einzugehen braucht; wie sich denn auch, wenn man diesen Werth von $n$ und zugleich $i-1$ statt $q$ in den obigen Ausdruck substituirt, die Umgestaltung desselben in die von dem Herrn Herausgeber (S. 199) hypothetisch aufgestellte allgemeine Form

$$A_i = \frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots.(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(i-1)}$$

augenblicklich ergiebt.

Wieviel zweckmässiger es aber ist, bei der Behandlung des hier besprochenen Problems die Anzahl $n$ statt $m$ in die Betrachtung zu ziehen, giebt sich am augenfälligsten zu erkennen, wenn man die Aufgabe zu folgender noch allgemeineren erweitert:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch $q$ Diagonalen in $(q+1)$ Figuren zerlegen lässt, unter denen $a$ Dreiecke, $b$ Vierecke, $c$ Fünfecke u. s. f. enthalten sein mögen. (Bedingungsgleichungen also: $q+1 = a+b+c+\ldots.$, wo $a$, $b$, $c$.... irgend einen Werth der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3.... haben können; und $n = 3a+4b+5c\ldots.-2q$).

Man überzeugt sich nämlich leicht durch nähere Betrachtung irgend eines beliebigen Polygons, dass die oben für den Specialfall gleichartiger Theilfiguren geführte Untersuchung hier auf völlig gleiche Weise ihre Anwendung findet, nur dass durch jede beliebige Complexion mehr als eine Diagonalenstellung bezeichnet wird. Wäre z. B. ein Zwölfeck durch 4 Diagonalen in 2 Dreiecke, 2 Vierecke und 1 Sechseck zu zerlegen, so würde die Form 1 . 1 . 1 . 1 hier die ganz verschiedenen Diagonalenstellungen

$1_1.1_4.1_6.1_8$; $1_1.1_4.1_6.1_{10}$; $1_1.1_4.1_8.1_{10}$; $1_1.1_6.1_8.1_{10}$; u. s. w.

andeuten, deren Menge sich dadurch, dass man hier fünf auf einander folgende Figuren, unter denen zwei Paare gleichartiger sind, auf alle mögliche Weise unter einander versetzt denkt, sogleich als die Permutationszahl $\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2} = 30$ zu erkennen giebt. Sind der Theilfiguren allgemein $q+1$, und darunter $a$ der einen, $b$ der zweiten, $c$ der dritten Art u. s. f., so erhält man aus den nämlichen Gründen statt der einen Diagonalenstellung, welche irgend eine beliebige Complexion bei der Zerlegung in lauter gleichartige Figuren repräsentirte, ihrer vielmehr eine Anzahl $= \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots..q\,.\,(q+1)}{(1\,.\,2\,..\,a)\,(1\,.\,2\,..\,b)\,(1\,.\,2\,..\,c)}$. Durch diese Zahl wird demnach der obige Ausdruck von $A^n{}_q$ noch zu multipliciren sein, sofern er auf die hier verallgemeinerte Aufgabe Anwendung finden soll, so dass die verlangte Anzahl aller möglichen Zerlegungen eines $n$ecks durch $q$ Diagonalen in $a$ Dreiecke, $b$ Vierecke, u. s. w. dargestellt wird durch die allgemeine Formel:

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots..q\,.\,(q+1)}{(1\,.\,2\,..\,a)\,(1\,.\,2\,..\,b)\,(1\,.\,2\,..\,c)}\cdot\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots.(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots..q\,.\,(q+1)}$$

$$= \frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots..(n+q-1)}{(1\,.\,2\,.\,3\,..\,a)\,(1\,.\,2\,.\,3\,..\,b)\,(1\,.\,2\,.\,3\,..\,c)},$$

Digitized by Google

ein Ausdruck, der sofort wieder in den obigen Werth von $A^n_q$ übergeht, sobald man zu der speciellen Annahme durchaus gleichartiger Figuren schreitet, in welchem Falle die Zahlen $a, b, c \ldots$. sich offenbar auf eine einzige, und zwar auf $(q+1)$ reduciren.

# XII.

## Von der numerischen Auflösung der Gleichung $A=(1+x)^m\ (1+bx)$, wenn $x$ ein kleiner Bruch ist.

Von dem

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

Bezeichnet $x$ die jährliche Zinse eines Thalers, so wird aus dem verzinsten Kapitale $K$ am Ende des ersten Jahres $K(1+x)$, am Ende des zweiten Jahres $K(1+x)^2$, am Ende des dritten Jahres $K(1+x)^3$ u. s. w., im Allgemeinen am Ende des $m$ten Jahres $K(1+x)^m$, wenn man nämlich voraussetzt, dass die Zinsen eines jeden Jahres am Ende desselben zum Kapitale geschlagen und in den folgenden Jahren mit dem Kapitale verzinst werden.

Nennt man also den auf diese Weise in $m$ Jahren aus dem Kapitale $K$ hervorgegangenen Werth desselben $\overset{x}{K}_m$, so erhält man die Gleichung

$$(1) \qquad \overset{x}{K}_m = K(1+x)^m,$$

so dass $\overset{x}{K}_m$ mit $m$ und $x$ zugleich wächst.

Die eben geschriebene Gleichung gilt aber nur so lange, als $m$ eine ganze Zahl ist. In der That, wird $m'=m+\frac{p}{q}$ statt $m$ gesetzt, wo $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch ist, so erhält man für den durch Zins und Zinseszins angewachsenen Werth des Kapitals am Ende der ersten $m$ Jahre wiederum $K(1+x)^m$. Soll dieses Kapital nun noch $\frac{p}{q}$ Jahre verzinst werden, so betragen die Zinsen während

Digitized by Google

dieser Zeit $K(1+x)^m \cdot \frac{p}{q}\,x$, also Kapital und Zinsen für diesen Fall

$$(2) \quad \overset{x}{K}_{m'} = K(1+x)^m \left\{1+\frac{p}{q}\,x\right\}$$

während man nach der Gleichung (1) hierfür

$$K'_{m'} = K(1+x)^{m+\frac{p}{q}}$$

erhalten hätte.

Um den letztern Ausdruck mit dem richtigen zu vergleichen, hat man dafür $K(1+x)^m \cdot (1+x)^{\frac{p}{q}}$ zu setzen und den letztern Faktor nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln. Hierdurch ergiebt sich

$$K'_{m'} = \overset{x}{K}_m \left\{1+\frac{p}{q}\,x+\frac{p(p-q)}{2q^2}\,x^2+\frac{p(p-q)\,(p-2q)}{6q^3}\,x^3+\ldots\right\}$$

oder, da $\overset{x}{K}_m\left(1+\frac{p}{q}\,x\right) = \overset{x}{K}_{m'}$ ist,

$$\frac{\overset{x}{K}_{m'} - K'_{m'}}{\overset{x}{K}_m} = \frac{p(q-p)}{2q^2}\,x^2 - \frac{p(q-p)\,(2q-p)}{6q^3}\,x^3+\ldots\ldots$$

Da nun $x$ seiner Bedeutung nach ein kleiner Bruch ist, so wird, bei der Beschaffenheit der Coefficienten der einzelnen Glieder, das Vorzeichen der ganzen Reihe mit dem des ersten Gliedes übereinstimmen, und folglich, wegen $q > p$, positiv sein; so dass die Gleichung (1), auf den Fall angewandt, wo $m$ eine gebrochene Zahl ist, einen Werth liefern würde, der zwar zu klein wäre, aber verhältnissmässig doch wenig von der Wahrheit abweichen würde, weil diese Abweichung kleiner ist als $\frac{1}{2}x^2$.

Wird nun die Aufgabe gestellt, dass man aus dem gegebenen Werthe eines Kapitals $K$, aus dem künftigen Werthe desselben $\overset{x}{K}_{m'}$ und aus der Dauer der Verzinsung $m' = m + \frac{p}{q}$ die jährlichen Zinsen eines Thalers finden soll, so hat man die Gleichung (2), oder wenn man durch $K$ dividirt und $\frac{\overset{x}{K}_{m'}}{K} = A$ und $\frac{p}{q} = b$ setzt, die Gleichung

$$(3) \quad A = (1+x)^m\,(1+bx)$$

nach $x$ aufzulösen.

Im vorliegenden besondern Falle ist $b < 1$. Bevor aber zur Auflösung dieser Gleichung geschritten wird, soll noch folgende Aufgabe gleichfalls aus der Zinseszinsrechnung mitgetheilt werden, die auch von obiger Gleichung resultirt, in welcher aber $b$ jeden beliebigen Werth erhalten kann:

Es wird sofort das Kapital $d$ und dann am Ende jedes Jahres die Rente $c$ während $m$ Jahren zum Zinsfusse $1+x$ verzinslich angelegt und aufgespart, und von der hieraus erwachsenden Summe nun zu dem nämlichen Zinsfusse die immerwährende Rente $a$ be-

Digitized by Google

zogen, wie gross ist der Zinsfuss? Der Werth des sofort angelegten Kapitals $d$ ist nach $m$ Jahren $d(1+x)^m$ und die Werthe der successive hinzukommenden Renten $c$ betragen am Ende jener $m$ Jahre respective $c(1+x)^{m-1}$, $c(1+x)^{m-2}$, $c(1+x)^{m-3}$ u. s. w., jenachdem die Rente am Ende des 1sten, 2ten, 3ten Jahres u. s. w. hinzugekommen ist. Demnach beträgt der künftige Werth sämmtlicher Ersparnisse mit Zinsen und Zinseszinsen:

$$d(1+x)^m + c\{(1+x)^{m-1} + (1+x)^{m-2} + (1+x)^{m-3} + \ldots + 1\}$$
$$= d(1+x)^m + c \cdot \frac{(1+x)^m - 1}{x}$$

Da man nun aus dem Kapitale die jährlichen Zinsen erhält, wenn man dasselbe mit $x$ multiplicirt, und diese Zinsen gleich $a$ sein sollen, so ergiebt sich die Gleichung

$$dx(1+x)^m + c\{(1+x)^m - 1\} = a$$

d. h.

$$(1+x)^m \ (c+dx) = a + c$$

oder wenn man durch $c$ dividirt und wiederum $\frac{a+c}{c} = A$ und $\frac{d}{c} = b$ setzt,

$$(1+x)^m \ (1+bx) = A$$

wie vorher.

Was nun die Auflösung dieser Gleichung nach $x$ betrifft, so sieht man sogleich, dass diese letztere vom $(m+1)$sten Grade ist, und also im Allgemeinen auf algebraischem Wege nicht aufgelöst werden kann. Man hat sich also damit zu begnügen, für den Fall, dass $A$ und $b$ in bestimmten Zahlen gegeben sind, 1stens einen ersten Näherungswerth und 2tens aus demselben einen solchen Werth für $x$ zu finden, der für jeden praktischen Bedarf als hinreichend genau gelten kann, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass $x$ selbst nur wenige Hundertel beträgt, also die Annäherung noch viel weiter gehen muss.

Ist nun $b < 1$, oder allgemein: ist $m$ gegen $b$ so gross, dass $m+b$ als verhältnissmässig wenig verschieden von $b$ angesehen werden kann, so folgt aus der vorhergehenden Auseinandersetzung, dass man nahe genug $(1+x)^m \ (1+bx) = (1+x)^{m+b}$ setzen kann, so dass man aus der Gleichung

$$(1+x_1)^{m+b} = A$$

$$(4) \quad x_1 = -1 + \sqrt[m+b]{A}$$

als einen ersten Näherungswerth für $x$ erhält, der um so genauer ist, jemehr $m$ das $b$ an Grösse übertrifft.

Findet das oben angegebene Verhältniss zwischen $m$ und $b$ nicht statt, so dass also $m$ keine grosse Zahl ist, so setze man näherungsweise

$$(1+x)^m = \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}$$

und bestimme $\alpha$ und $\beta$ dergestalt, dass dieser Gleichung so viel als

Digitized by Google

möglich Genüge geleistet werde. Entwickelt man beide Ausdrücke nach steigenden Potenzen von $x$, so erhält man

$$1+mx+\frac{m^2-m}{2}x^2+\ldots=1+(\alpha-\beta)\,x-\beta\,(\alpha-\beta)\,x^2+\ldots.$$

Man wird also den angenommenen Quotienten der Potenz $(1+x)^m$ am meisten annähern, wenn man

$$\alpha-\beta=m \text{ und } -\beta(\alpha-\beta)=\frac{m^2-m}{2}$$

setzt, weil sich dadurch beide Ausdrücke nur in der dritten und den höhern Potenzen der sehr kleinen Quantität $x$ von einander unterscheiden.

Dividirt man aber die zweite der so eben gefundenen beiden Bedingungsgleichungen durch die erste, so erhält man $\beta=-\frac{m-1}{2}$, also $\alpha=m+\beta=\frac{m+1}{2}$ und

$$(3)\quad (1+x)^m=\frac{2+(m+1)x}{2-(m-1)x}.$$

Sucht man daher aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{2+(m+1)x_1}{2-(m-1)x_1}\,(1+bx_1)=A$$

den positiven Werth von $x_1$, so wird derselbe gleichfalls als ein Näherungswerth von $x$ angesehen werden können.

Um aus dem auf die eine oder die andere Art, je nach dem verschiedenen zwischen $m$ und $b$ stattfindenden Verhältnisse, gefundenen Näherungswerthe $x_1$ sogleich einen recht genauen Werth für $x$ zu finden, setze man $x=x_1+\Delta x_1$, wo $\Delta x_1$ positiv oder negativ aber nur noch eine sehr kleine Correktion von $x_1$ ist. Substituirt man dies in die Gleichung (3), so bleibt noch die Gleichung

$$A=(1+x_1+\Delta x_1)^m\ \{1+b(x_1+\Delta x_1)\}$$

nach $\Delta x_1$ aufzulösen. Werden auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, so erhält man

$$\log A=m\log(1+x_1+\Delta x_1)+\log\{1+b(x_1+\Delta x_1)\}$$

$$=m\log(1+x_1)+\log(1+bx_1)+m\log\left(1+\frac{\Delta x_1}{1+x_1}\right)$$

$$+\log\left(1+\frac{b\Delta x_1}{1+bx_1}\right)$$

oder, wenn man

$$(6)\quad m\log(1+x_1)+\log(1+bx_1)=\log A_1$$

setzt,

$$\log A-\log A_1=m\log\left(1+\frac{\Delta x_1}{1+x_1}\right)+\log\left(1+\frac{b\Delta x_1}{1+bx_1}\right).$$

Hierfür kann man aber, wie aus der Analysis oder auch schon aus dem blossen Aufschlagen der Logarithmen mehrziffriger Zahlen in den Tabellen bekannt ist,

$$\log A-\log A_1=(md+bd')\,\Delta x_1$$

Digitized by Google

setzen, wo $d$ und $d'$ die sogenannten herrschenden Differenzen respektive von $\log(1+x_1)$ und $\log(1+bx_1)$ sind, so dass man also

$$\Delta x_1 = \frac{\log A - \log A_1}{md + bd'},$$

und folglich

$$(7) \quad x = x_1 + \frac{\log A - \log A_1}{md + bd'}$$

erhält, wo sich der Werth von $x_1$ entweder aus der Gleichung (4) oder aus (5) und der von $\log A_1$ aus der Gleichung (6) ergiebt.

Was die Näherung betrifft, die man vermittelst dieser Methode erreicht, so sieht man, dass sie bis auf doppelt so viele Decimalstellen gehen wird, als $x_1$ genau ist, weil die Differenzen $d$ und $d'$ selbst so weit genau sind.

Um das Ganze durch ein Beispiel zu erläutern, setze man

$$\overset{x}{K}_{m'} = 203.3889, \quad K = 150, \quad m = 6 \text{ und } b = \frac{5}{9}.$$

Alsdann findet man $x_1$ aus der Gleichung (4):

$$\begin{array}{r} \log \overset{x}{K}_{m'} = 2.3083272 \\ -\log K \;\; = 2.1760913 \\ \hline \log A = 0.1322359 \\ \hline \log(1+x_1) = 0.0201716 \quad \times \frac{9}{59} \quad \ldots d = 0.415 \\ \hline x_1 = 0.0475424 \end{array}$$

Ferner:

$$\begin{array}{r} m \log(1+x_1) = 0.1210296 \\ + \quad \log(1+bx_1) = 0.0113166 \\ 53 \end{array} \Big\} \ldots d' = 0.424$$

$$\begin{array}{r} \log A_1 = 0.1323515 \\ \hline \log A - \log A_1 = -0.0001156 \\ md + bd' = 2.726 \\ \hline \Delta x_1 = -0.0000424 \end{array}$$

folglich $x = 0.0475$, welches in diesem Falle der genaue Werth ist.

Digitized by Google

# XIII.

## Ueber die Loxodromen auf dem gemeinen Cylinder und Kegel.

Von dem

**Herrn Dr. E. W. Grebe**

ordentlichem Hauptlehrer am Gymnasium zu Cassel.

---

Mit dem Namen Loxodrome belegen wir eine Curve auf einer durch Umdrehung erzeugten Fläche, welche mit allen Linien, in denen die Fläche von einer durch ihre Axe gelegten Ebene durchschnitten wird, einen constanten Winkel bildet. Die Loxodrome auf der Rotationsfläche, deren Erzeugende eine Gerade ist, bietet sehr interessante Eigenschaften dar, wesshalb wir die wichtigsten hier, doch nur in der Form von Resultaten, mittheilen wollen. Die Formeln, welche speciell der Cylinderloxodrome angehören, und die, welche lediglich auf die Kegelloxodrome bezogen werden sollen, werden wir dadurch kenntlich machen, dass wir den Nummern der ersteren den Buchstaben $a$, und denen der letzteren den Buchstaben $b$ beifügen.

Die Umdrehung der geraden Linie

$$1. \quad v = r - \cot \varepsilon . x$$

um die Axe der $x$ erzeugt die Rotationsfläche

$$2. \quad y^2 + z^2 = (r - \cot \varepsilon . x)^2$$

$\varepsilon$ denken wir uns stets grösser als 0, aber nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ haben wir eine cylindrische, sonst eine conische Fläche. $r$ ist der Halbmesser der Grundebene. Das Coordinatensystem ist rechtwinklig. Eine Loxodrome, welche mit der erzeugenden Geraden stets den Winkel $\varphi$ bildet, hat ausser 2. noch die Gleichung

$$3. \quad \text{arc tang } \frac{y}{z} = \text{tang } \varphi \sec \varepsilon \log \frac{r}{r - \cot \varepsilon . x},$$

die für sich betrachtet einer windschiefen Fläche zwischen der Loxodrome und ihrer Axe zukommt, welche wir Wendelfläche nennen wollen.

Aus 3. ergibt sich

$$3.^a \quad \text{arc tang } \frac{y}{z} = \text{tang } \varphi . \frac{x}{r}.$$

Auch lassen sich die Gleichungen unserer Curve folgendermassen darstellen:

Digitized by Google

$$4.\quad \begin{cases} y = v \sin\left(\operatorname{tang}\varphi \sec\varepsilon \log \frac{r}{r - \cot\varepsilon . x}\right) \\ z = v \cos\left(\operatorname{tang}\varphi \sec\varepsilon \log \frac{r}{r - \cot\varepsilon . x}\right) \end{cases}$$

$$4.^{a}\quad \begin{cases} y = r \sin\left(\operatorname{tang}\varphi . \frac{x}{r}\right) \\ z = r \cos\left(\operatorname{tang}\varphi . \frac{x}{r}\right) \end{cases}$$

Den Winkel $\varphi$ denken wir uns stets zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Einen Unterschied zwischen rechts und links gewundener Loxodrome zu machen, ist nicht erforderlich, da wir die positiven Richtungen der Axen der $y$ und $z$ immer der Windung angemessen wählen können. Von Differenzialformeln bemerken wir folgende:

$$5.\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cot\varepsilon . y + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . z}{v}$$

$$6.\quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . y - \cot\varepsilon . z}{v}$$

$$7.\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$8.\quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$9.\quad \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} = \sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1$$

$$10.\quad \frac{d^2y^2}{dx^4} + \frac{d^2z^2}{dx^4} = \frac{\operatorname{tang}\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2}{v^2} \quad (\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1)$$

$$11.\quad \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} \quad (\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1)$$

Bezeichnet $s$ den zu der Abscisse $x$ gehörigen Bogen der Loxodrome, so ist

$$12.\quad s = \sec\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . x$$

$$12.^{a}\quad s = \sec\varphi . x$$

und wenn wir auf dem Kegel die Länge der Loxodrome von der Grundebene bis zur Spitze $\xi$ nennen

$$12.^{b}\quad \xi = r \sec\varphi \sec\varepsilon$$

Der Bogen der Loxodrome ist also stets seiner Projection auf die Abscissenaxe proportional, welche Eigenschaft keiner einzigen ebenen Curve zukommt.

Für den Krümmungshalbmesser $R$ haben wir

$$13.\quad R = \frac{v}{\sin\varphi \sqrt{(1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2)}}$$

$$13.^{a}\quad R = r \operatorname{cosec}\varphi^2$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

Digitized by Google

$$14.\quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \dfrac{v \cot\varphi \sin\varepsilon}{1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2} \cdot \dfrac{dz}{dx} \\ z' = z - \dfrac{v \cot\varphi \sin\varepsilon}{1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} \end{cases}$$

und es folgt somit, dass der Krümmungshalbmesser in einer auf der Axe senkrechten Ebene liegt, was, wenn auch nicht bei der Cylinder-, doch bei der Kegelloxodrome auffallen kann.

Für die Entfernung $v'$ des Krümmungsmittelpunktes von der Axe findet sich

$$15.\quad v' = v\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2 + \cot\varphi^2}{\cos\varepsilon^2 + \operatorname{tang}\varphi^2}}.$$

Demnach liegen alle Krümmungsmittelpunkte in einer neuen Loxodrome, und wenn für diese $\varphi'$ und $\varepsilon'$ das bedeutet, was $\varphi$ und $\varepsilon$ für die ursprüngliche, so ergeben sich die Beziehungen

$$16.\quad v' \operatorname{tang}\varepsilon' = v \operatorname{tang}\varepsilon$$

$$17.\quad \operatorname{tang}\varphi' : \operatorname{tang}\varphi = \cos\varepsilon' : \cos\varepsilon.$$

Insbesondere liegen die Krümmungsmittelpunkte einer Cylinderloxodrome in einer andern Cylinderloxodrome, deren Krümmungsmittelpunkte wieder in der ersten liegen, und es ist

$$17.^a\quad \varphi + \varphi' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Bedeutet $Q$ den Krümmungshalbmesser einer Loxodrome auf derselben Cylinder- oder Kegelfläche, deren Ansteigungswinkel den der ursprünglichen zu einem rechten ergänzt, so erhält man

$$18.\quad Q = \frac{v}{\cos\varphi\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 \sin\varepsilon^2)}}.$$

Die Entfernung $w'$ der Krümmungsmittelpunkte der letzteren von der Axe ist dann

$$19.\quad w' = v\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2 + \operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varepsilon^2 + \cot\varphi^2}}$$

und es folgt

$$20.\quad v'w' = v^2$$

$$21.\quad v' : w' = R^2 : Q^2.$$

Seien $x'$, $y'$, $z'$ die veränderlichen Coordinaten einer Linie oder Fläche, deren Gleichung angegeben werden soll, so erhält man als Gleichung der Krümmungsebene

$$22.\quad (x' - x)(\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1) - (y' - y)\frac{dy}{dx} - (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$23.\quad (x' - x) + (y' - y)\frac{dy}{dx} + (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Für die Krümmungsaxe gilt



Digitized by Google

$$24.\quad \begin{cases} y'-y=\dfrac{-\cot\varepsilon.y-\cot\varphi\ \operatorname{cosec}\varepsilon.z}{v}\ (x'-x) \\ z'-z=\dfrac{\cot\varphi\ \operatorname{cosec}\varepsilon.y-\cot\varepsilon.z}{v}\ (x'-x); \end{cases}$$

für die Tangente

$$25.\quad \begin{cases} y'-y=(x'-x)\dfrac{dy}{dx} \\ z'-z=(x'-x)\dfrac{dz}{dx}; \end{cases}$$

für den Krümmungshalbmesser

$$26.\quad \begin{cases} x'=x \\ y'\dfrac{dy}{dx}+z'\dfrac{dz}{dx}+\cot\varepsilon.v=0. \end{cases}$$

Neigt sich die Krümmungsaxe gegen eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebene unter dem Winkel $m$, die Tangente unter dem Winkel $n$, so ist

$$27.\quad \sin m=\sqrt{(1-\cos\varphi^2\sin\varepsilon^2)}$$

$$28.\quad \sin n=\cos\varphi\sin\varepsilon$$

Der Neigungswinkel der Krümmungsebene gegen jene Ebene ist alsdann $\frac{1}{2}\pi-m$, und der Neigungswinkel der Normalebene $\frac{1}{2}\pi-n$.

Legt man durch die Kegelspitze eine auf der Axe senkrechte Ebene, so ist der Bogen der Loxodrome von irgend einem Punkte bis zur Kegelspitze gleich der Tangente an diesen Punkt von dem Berührungspunkt an bis zu jener Ebene. Der Endpunkt der Tangente hat die Coordinaten

$$29.^b.\quad \begin{cases} x'=r\ \operatorname{tang}\varepsilon \\ y'=\operatorname{tang}\varphi\sec\varepsilon.z \\ z'=-\operatorname{tang}\varphi\sec\varepsilon.y \end{cases}$$

und sein Abstand $i$ von der Kegelspitze ist

$$30.^b.\quad i=\operatorname{tang}\varphi\sec\varepsilon.v.$$

Verlängert man die Krümmungsaxen bis sie dieselbe Ebene treffen so sind die Coordinaten eines Durchschnittspunktes

$$31.^b.\quad \begin{cases} x'=r\ \operatorname{tang}\varepsilon \\ y'=-\cot\varphi\sec\varepsilon.z \\ z'=\cot\varphi\sec\varepsilon.y \end{cases}$$

und für die Entfernung $u$ eines solchen von der Kegelspitze hat man

$$32.^b.\quad u=\cot\varphi\sec\varepsilon.v$$

so dass

$$33.^b.\quad iu=\sec\varepsilon^2.v^2.$$

Die Kegelloxodrome steht in vielfachen Beziehungen zur logarithmischen Spirale. Wir führen die wichtigsten derselben auf, und geben bei jeder logarithmischen Spirale deren Elemente an, näm-

Digitized by Google

lich den Leitstrahl $l$ der Spirale, der durch einen gewissen Punkt der Loxodrome bedingt ist, und den constanten Winkel $\psi$, welchen die Spirale mit den Leitstrahlen bildet.

1. Wenn der Kegelmantel in eine Ebene ausgebreitet wird, so erscheint die Loxodrome als logarithmische Spirale, für welche

$$34.^b \quad \begin{cases} l = \sec \varepsilon . v \\ \psi = \varphi \end{cases}$$

2. Die Projection der Kegelloxodrome auf die Grundebene des Kegels ist eine logarithmische Spirale, bei der

$$35.^b \quad \begin{cases} l = v \\ \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi \sec \varepsilon \end{cases}$$

3. Der Durchschnitt der Tangenten mit einer durch die Kegelspitze gelegten Horizontalebene, oder der Ort der Punkte, deren Coordinaten in $29.^b$ bestimmt wurden, ist ebenfalls eine logarithmische Spirale. Für diese ist

$$36.^b \quad \begin{cases} l = \operatorname{tang} \varphi \sec \varepsilon . v \\ \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi \sec \varepsilon \end{cases}$$

4. Breitet man die abwickelbare Fläche, in welcher sämmtliche Tangenten liegen, oberhalb oder unterhalb der Knotenfurche, in eine Ebene aus, so wird aus der Knotenfurche eine logarithmische Spirale mit

$$37.^b \quad \begin{cases} l = \dfrac{v}{\sqrt{(\cos \varepsilon^2 + \sin \varepsilon^2 \sin \varphi^4)}} \\ \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi \sec \varepsilon \sqrt{(1 - \sec \varepsilon^2 \cos \varphi^2)}. \end{cases}$$

5. Wählt man hierbei das Stück oberhalb der Knotenfurche, so wird aus der unter Nr. 3. aufgeführten logarithmischen Spirale eine andere, welcher die unter Nr. 4. genannten Elemente gleichfalls zukommen.

Die Nummern 2. 3. 4. 5. wiederholen sich für die Kegelloxodrome, in welcher die Krümmungsmittelpunkte der ursprünglichen liegen, und die Elemente der so entstehenden logarithmischen Spiralen lassen sich nach den Formeln 15. 16. 17 bestimmen.

Ferner kehren auch die Nummer 2. 3. 4. 5. noch einmal für die Kegelloxodrome wieder, deren Tangenten die Krümmungsaxen der ursprünglichen sind. Allgemein nämlich ist die Knotenfurche der abwickelbaren Fläche, in welcher sämmtliche Krümmungsaxen der Loxodrome liegen, wieder eine Loxodrome, für welche

$$38. \quad \operatorname{tang} \varepsilon'' = \operatorname{tang} \varepsilon \ (\sec \varphi^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2 - 1)$$

$$39. \quad \operatorname{tang} \varphi'' : \operatorname{tang} \varphi = \cos \varepsilon'' : \cos \varepsilon$$

Die Coordinaten des Punktes, welcher einem Punkte der ursprünglichen entspricht, sind

$$40. \quad \begin{cases} x' = x - \operatorname{cosec} \varphi^2 \cot \varepsilon . v \\ y' = -y \cot \varphi^2 \\ z' = -z \cot \varphi^2 \end{cases}$$

Bei dem Cylinder fällt diese Loxodrome mit der, in welcher die



Digitized by Google

Krümmungsmittelpunkte liegen, zusammen, für den Kegel aber ist sie von derselben verschieden.

Zum Beschluss geben wir noch die Quadratur der Wendelfläche $W$. Es ist

$$41.a. \quad W = (\sin\varphi + \cot\varphi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,\frac{rx}{2},$$

allgemein aber, wenn man setzt

$$\operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon:$$

$$41. \quad W = (\sin\chi + \cot\chi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,(\tfrac{1}{2}rx - \tfrac{1}{4}\cot\varepsilon.x^2);$$

und mithin für $x = r \operatorname{tang}\varepsilon$

$$41.b. \quad W = (\sin\chi + \cot\chi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,\frac{r^2 \operatorname{tang}\varepsilon}{2}.$$

# XIV.

## Trigonometrische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln zweier beliebiger ebener oder sphärischer Dreiecke.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Fast alle Lehr- und Handbücher der Trigonometrie enthalten mehr oder minder ausführlich die Relationen zwischen den sechs Bestandtheilen eines Dreiecks; aber kein einziges derselben hat, so viel mir bekannt ist, die entsprechenden Formeln für die Seiten und Winkel zweier Dreiecke untersucht, obschon die Kenntniss derselben bei der Betrachtung der zusammengesetzteren Gebilde der Planimetrie und Stereometrie von sehr wesentlichem Nutzen ist, und eine grosse Masse Arbeit erspart. Diese Lücke theilweise auszufüllen und überhaupt diejenigen allgemeinen Theoreme zusammenzustellen, die bei trigonometrischen Untersuchungen Vortheile gewähren, ist der Zweck der nachfolgenden Zeilen.

Digitized by Google

## §. 1.

Bezeichnen $abc$ die drei Seiten und $ABC$ die ihnen beziehungsweise gegenüberliegenden Winkel eines geradlinigen Dreieckes, $\Delta$ den Flächeninhalt desselben, und sind $a_1 b_1 c_1$ $A_1 B_1 C_1$ und $\Delta_1$ die nämlichen Dinge für irgend ein ganz beliebiges zweites ebenes Dreieck, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{l} c\cos B = a - b\cos C, \quad c_1\cos B_1 = a_1 - b_1\cos C_1 \\ b\cos C = a - c\cos B, \quad b_1\cos C_1 = a_1 - c_1\cos B_1 \end{array}\right\} 1.$$

u. s. w. Durch Multiplication zweier neben einander stehender Gleichungen, z. B. der beiden obersten, ergiebt sich:

$$cc_1\cos B\cos B_1 = aa_1 - a_1 b\cos C - ab_1\cos C_1 + bb_1\cos C\cos C_1$$

oder

$$2aa_1 cc_1\cos B\cos B_1 = 2a^2 a_1{}^2 - 2a_1{}^2 ab\cos C - 2a^2 a_1 b_1\cos C_1 + 2aa_1 bb_1\cos C\cos C_1.$$

Nun ist aber $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ und $2a_1 b_1\cos C_1 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - c_1{}^2$; werden daher diese Werthe substituirt und dann aufgehoben, was sich aufheben lässt, so ergiebt sich:

$$c^2 a_1{}^2 + c_1{}^2 a^2 - 2aa_1 cc_1\cos B\cos B_1 = a^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b^2 - 2aa_1 bb_1\cos C\cos C_1.$$

Es ist aber ferner:

$$2\Delta = ac\sin B = ab\sin C$$

$$2\Delta_1 = a_1 c_1\sin B_1 = a_1 b_1\sin C_1$$

folglich auch:

$$\pm 2aa_1 cc_1\sin B\sin B_1 = 2aba_1 b_1\sin C\sin C_1$$

und dieses zu der oben gefundenen Gleichung hinzugefügt, giebt endlich:

$$a^2 c_1{}^2 + a_1{}^2 c^2 - 2aa_1 cc_1\cos(B \pm B_1) = a^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b^2 - 2aa_1 bb_1\cos(C \pm C_1).$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswerth, dass er die Form der Grundgleichung für ein geradliniges Dreieck hat, nur mit dem Unterschiede, dass statt der in der letzteren vorkommenden Dreiecksseiten hier die Produkte aus zwei Seiten von beiden Dreiecken eintreten. Das Gesetz, nach dem sich die Gleichung bildet, ist leicht zu übersehen, lässt sich jedoch nur unbequem in Worte fassen. Macht man nun das System durch gehörige Vertauschung der Buchstaben vollständig, so bekommt man:

Digitized by Google

$$
\left.\begin{array}{l}
a^2a_1{}^2 + b^2b_1{}^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \mp C_1) \equiv a^2c_1{}^2 + b_1{}^2c^2 - 2ab_1cc_1 \cos(B \mp A_1) \\
\equiv b^2c_1{}^2 + a_1{}^2c^2 - 2a_1bcc_1 \cos(A \mp B_1) \\
a^2a_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2aa_1cc_1 \cos(B \mp B_1) \equiv a^2b_1{}^2 + c_1{}^2b^2 - 2ab_1c_1 \cos(C \mp A_1) \\
\equiv b^2a_1{}^2 + b_1{}^2c^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \mp C_1) \\
b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2bb_1cc_1 \cos(A \mp A_1) \equiv b^2a_1{}^2 + c_1{}^2a^2 - 2aa_1bc_1 \cos(C \mp B_1) \\
\equiv a^2b_1{}^2 + a_1{}^2c^2 - 2aa_1b_1c \cos(B \mp C_1) \\
a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \mp C_1) \equiv a^2c_1{}^2 + a_1{}^2c^2 - 2aa_1cc_1 \cos(B \mp B_1) \\
\equiv b^2c_1{}^2 + b_1{}^2c^2 - 2bb_1cc_1 \cos(A \mp A_1) \\
a^2a_1{}^2 + b^2c_1{}^2 - 2aa_1bc_1 \cos(C \mp B_1) \equiv b^2b_1{}^2 + a_1{}^2c^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \mp C_1) \\
\equiv c^2c_1{}^2 + a^2b_1{}^2 - 2ab_1cc_1 \cos(B \mp A_1) \\
a^2a_1{}^2 + b_1{}^2c^2 - 2aa_1b_1c \cos(B \mp C_1) \equiv b^2b_1{}^2 + a^2c_1{}^2 - 2ab_1c_1 \cos(C \mp A_1) \\
\equiv c^2c_1{}^2 + a_1{}^2b^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \mp B_1)
\end{array}\right\} 2.
$$

Diese sechs Gleichungen enthalten in der That alles, was sich nur über die gegenseitigen Beziehungen irgend zweier Dreiecke sagen lässt, namentlich alle Sätze über die Congruenz und Aehnlichkeit dieser Figuren. Dass die Dreiecke dabei ganz willkührlich sind und nicht einmal in einerlei Ebene zu liegen brauchen, versteht sich von selbst.

## §. 2.

Aus den im vorigen Paragraphen gebrauchten Grundgleichungen (1) ergiebt sich sofort auch:

Digitized by Google

$$1 = \frac{b\cos C + c\cos B}{a} = \frac{b_1\cos C_1 + c_1\cos B_1}{a_1}.$$

Wird nun diese Gleichung einmal mit $c\sin B = b\sin C$, das andere Mal mit $c_1\sin B_1 = b_1\sin C_1$ multiplicirt, so findet man

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta\cdot\frac{a_1}{a} &= bc_1\sin C\cos B_1 + b_1c\sin B\cos C_1 \\ &= bb_1\sin C\cos C_1 + cc_1\sin B\cos B_1 \\ 2\Delta_1\cdot\frac{a}{a_1} &= bc_1\cos C\sin B_1 + b_1c\cos B\sin C_1 \\ &= bb_1\cos C\sin C_1 + cc_1\cos B\sin B_1 \\ \frac{2\Delta a_1^2 \pm 2\Delta_1 a^2}{aa_1} &= bc_1\sin(C\pm B_1) + b_1c\sin(B\pm C_1) \\ &= bb_1\sin(C\pm C_1) + cc_1\sin(B\pm B_1) \end{aligned}\right\} 3.$$

Ferner wird

$$\frac{a^2-b^2}{c^2} = a\cos B - b\cos A \text{ und } \frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2} = a_1\cos B_1 - b_1\cos A_1;$$

dies auf dieselbe Weise behandelt, wie die vorhergehenden Gleichungen, giebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\Delta(a_1^2-b_1^2)\pm 2\Delta_1(a^2-b^2)}{cc_1} &= a_1b\sin(A\mp B_1) - ab_1\sin(B\mp A_1) \\ &= aa_1\sin(B\pm B_1) - bb_1\sin(A\pm A_1) \end{aligned}\right\} 4.$$

wonach sich die analogen Ausdrücke unmittelbar bilden lassen.

## §. 3.

Ist irgend eine Gleichung von der Form $u^2+v^2-2uv\cos Y = w^2+x^2-2wx\cos Z$ gegeben, so lässt sie sich ganz auf dieselbe Weise umformen, wie die bekannte Formel der ebenen Trigonometrie. Denn man gebe ihr die Gestalt $u^2+v^2-w^2-x^2 = 2uv\cos Y - 2wx\cos Z$ und addire und subtrahire successive auf beiden Seiten die Grösse $2uv+2wx$, so erhält man durch Multiplication der beiderseitigen Resultate sogleich:

$$\left.\begin{aligned} (u+v+w-x)\,(u+v-w+x)\,(u-v+w+x)\,(-u+v+w+x) \\ -8uvwx = \\ = 4[uv\sin Y \pm wx\sin Z]^2 + 8uvwx\cos(Y\pm Z). \end{aligned}\right\} 5.$$

Wendet man dieses Theorem auf die Gleichungen Nr. 2. an, und macht aus (3) und (4) die nöthigen Substitutionen, so findet man, wenn zur Abkürzung $ac_1+a_1c+bc_1+b_1c = 2\alpha\beta$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^2{}_{\alpha\beta} &= 16(\alpha\beta-b_1c)\,(\alpha\beta-bc_1)\,(\alpha\beta-a_1c)\,(\alpha\beta-ac_1) - 8aa_1bb_1c^2c_1^2 \\ &= 16(\Delta c_1^2 \pm \Delta_1 c^2)^2 + 8aa_1bb_1c^2c_1^2\cos(C\pm C_1) \\ &= 16[\Delta(a_1^2-b_1^2) \pm \Delta_1(a^2-b^2)]^2 \\ &\quad + 8aa_1bb_1c^2c_1^2\cos[(A-B)\pm(A_1-B_1)] \end{aligned}\right\} 6.$$

Digitized by Google

## §. 4.

Mit Hülfe dieser allgemeinen Theoreme kann nun eine ziemliche Zahl specieller Fälle entwickelt werden. Da das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ganz beliebig ist, so wollen wir zuvörderst $a_1 = b_1 = c_1$ setzen, und erhalten damit aus Nr. 2. sogleich:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(60° \pm C) = a^2 + c^2 - 2ac \cos(60° \pm B)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos(60° \pm A)$$

d. h. construirt man über den drei Seiten eines geradlinigen Dreieckes gleichseitige Dreiecke, so aber, dass dieselben entweder sämmtlich auf den äusseren oder inneren Seiten liegen, und verbindet dann jede Spitze des Urdreieckes mit der gegenüberliegenden Spitze des gleichseitigen Dreieckes über ihrer Gegenseite; so sind diese drei Verbindungslinien unter einander gleich.

Ist $a_1 b_1 c_1$ ferner ein rechtwinklich-gleichschenkliches Dreieck und $a_1 = b_1$, so wird:

$$a^2 + b^2 \pm 2ab \sin C = 2a^2 + c^2 - 2ac \sqrt{2} \cos(45° \pm B)$$
$$= 2b^2 + c^2 - 2bc \sqrt{2} \cos(45° \pm A)$$

$$a^2 + c^2 \pm 2ac \sin B = 2a^2 + b^2 - 2ab \sqrt{2} \cos(45° \pm C)$$
$$= b^2 + 2c^2 - 2bc \sqrt{2} \cos(45° \pm A)$$

$$b^2 + c^2 \pm 2bc \sin A = a^2 + 2b^2 - 2ab \sqrt{2} \cos(45° \pm C)$$
$$= a^2 + 2c^2 - 2ac \sqrt{2} \cos(45° \pm B)$$

d. h. errichtet man über zwei Seiten eines geradlinigen Dreiecks rechtwinklich-gleichschenkliche Dreiecke, so dass beide zugleich entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes fallen, und ihre rechten Winkel beide an dem Durchschnittspunkte jener beiden Seiten liegen; — und man verbindet nun die beiden anderen Spitzen des Urdreieckes mit den gegenüberliegenden Spitzen der über ihren Gegenseiten construirten Dreiecke; so sind diese beiden Verbindungslinien unter einander gleich.

Man setze ferner das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ dem Dreiecke $abc$ ähnlich, so wird $A_1 = A$, $B_1 = B$ und $C_1 = C$, und man findet aus (2), wenn man immer nur die oberen Zeichen nimmt:

$$a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 \cos 2C = (a^2 + b^2 + 2ab \cos C)c^2.$$

Nun ist aber bekanntlich $a^2 + b^2 + 2ab \cos C$ gleich dem Quadrate der doppelten aus der Spitze $C$ auf die Seite $c$ gezogenen Schwerlinie; nennt man daher diese Schwerlinien $\alpha\, \beta\, \gamma$, je nachdem sie zur Seite $a\ b\ c$ gehören; so findet man:

$$a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 \cos 2C = 4c^2 \gamma^2$$
$$a^4 + c^4 - 2a^2 c^2 \cos 2B = 4b^2 \beta^2$$
$$b^4 + c^4 - 2b^2 c^2 \cos 2A = 4a^2 \alpha^2.$$

Auf diese Art könnte man nun fortfahren und noch andere Voraussetzungen über die Natur des Dreieckes $a_1 b_1 c_1$ machen; indessen lassen sich die meisten der dadurch erhaltenen Resultate eben so

Digitized by Google

leicht unmittelbar ableiten, daher es an den angeführten Beispielen genügen mag.

## §. 5.

Weit wichtiger sind dagegen die Resultate, die man erhält, wenn man einzelne Stücke beider Dreiecke gleich setzt; denn dieser Fall ist derjenige, der am meisten vorkommt und der, wenn die Dreiecke nicht in einerlei Ebene liegen, einer geschmeidigen Behandlung bisher am meisten widerstanden hat. Nimmt man zuvörderst an, dass eine Seite beider Dreiecke gleich sei, und setzt demnach etwa $c = c_1$, so erhält man aus Nr. 2. sogleich:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos(C \mp C_1) = c^2(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(A \mp B_1)) \\ a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2aa_1 bb_1 \cos(C \mp C_1) = c^2(a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos(B \mp A_1)) \\ a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos(C \mp C_1) = c^2(a^2 + b^2 - 2ab \cos(A \mp B_1)) \end{array}\right\} 7.$$

Setzt man ferner:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{ab}^{\,2} &= (a+a_1+b-b_1)\,(a+a_1-b+b_1)\,(a-a_1+b+b_1)\\ &\quad\times(-a+a_1+b+b_1)-8aa_1bb_1\end{aligned}\right\}$$

so wird auch

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{ab}^{\,2} &= 16(\Delta\pm\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\cos(C\pm C_1)\\ &= 16\left[\frac{\Delta(a_1^{\,2}-b_1^{\,2})\pm\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}\right]^2\\ &\quad+8aa_1bb_1\cos((A-B)\pm(A_1-B_1))\end{aligned}\right\}\ 8.$$

## §. 6.

Sind dagegen zwei Seiten des einen Dreiecks einzeln genommen zweien Seiten des andern Dreiecks gleich, also z. B. $a=a_1$ und $b=b_1$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}a^4+c^2c_1^{\,2}-2a^2cc_1\cos(B\pm B_1) &= b^2(a_1^{\,2}+c^2-2a_1c\cos(A\pm C_1))\\ &= b^2(a^2+c_1^{\,2}-2ac_1\cos(C\pm A_1))\\ b^4+c^2c_1^{\,2}-2b^2cc_1\cos(A\pm A_1) &= a^2(b_1^{\,2}+c^2-2b_1c\cos(B\pm C_1))\\ &= a^2(b^2+c_1^{\,2}-2bc_1\cos(C\pm B_1))\\ 4a^2b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(C\pm C_1) &= a^2(c^2+c_1^{\,2}-2cc_1\cos(B\pm B_1))\\ &= b^2(c^2+c_1^{\,2}-2cc_1\cos(A\pm A_1))\end{aligned}\right\}\ 9.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} 16a^2b^2c^2c_1^2-(a^2-b^2)^2(c_1^2-c^2)^2=16\Delta c_1^2\mp\Delta_1(c^2)^2+8a^2b^2c^2c_1^2\cos(C\mp C_1) \\ \qquad=16(a^2-b^2)^2(\Delta\mp\Delta_1)^2+8a^2b^2c^2c_1^2\cos((A-B)\mp(A_1-B_1)) \\ 4a^2(c_1^2+c^2)-(c_1^2-c^2)^2=16\Delta\mp\Delta_1)^2+8a^2cc_1\cos(B\mp B_1) \\ 4b^2(c_1^2+c^2)-(c_1^2-c^2)^2=16\Delta\mp\Delta_1)^2+8b^2cc_1\cos(A\mp A_1) \\ \dfrac{(a^2-b^2)(c_1^2+c^2)}{2cc_1}=a^2\cos(B\mp B_1)-b^2\cos(A\mp A_1) \end{array}\right\}10.$$

## §. 7.

Ist in den beiden verglichenen Dreiecken ein Winkel gleich, also z. B. $C=C_1$, so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(aa_1-bb_1)^2&=a_1{}^2c^2+b^2c_1{}^2-2a_1bcc_1\cos(A-B_1)\\&=a^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2-2ab_1cc_1\cos(B-A_1)\\(ab_1-a_1b)^2&=a^2c_1{}^2+a_1{}^2c^2-2aa_1cc_1\cos(B-B_1)\\&=b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2-2bb_1cc_1\cos(A-A_1)\end{aligned}\right\}\ 11.$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta}{}^2&=16(\Delta_1c^2-\Delta c_1{}^2)^2+8aa_1bb_1c^2c_1{}^2\\&=16[\Delta(a_1{}^2-b_1{}^2)-\Delta_1(a^2-b^2)]^2\\&\qquad+8aa_1bb_1c^2c_1{}^2\cos 2(B-B_1)\\\Phi_{\alpha\gamma}{}^2&=16(\Delta_1b^2-\Delta b_1{}^2)^2+8aa_1b^2b_1{}^2cc_1\cos(B-B_1)\\&=16[\Delta(a_1{}^2-c_1{}^2)-\Delta_1(a^2-c^2)]^2\\&\qquad+8aa_1b^2b_1{}^2cc_1\cos(A-A_1)\\\Phi_{\beta\gamma}{}^2&=16(\Delta_1a^2-\Delta a_1{}^2)^2+8a^2a_1{}^2bb_1cc_1\cos(A-A_1)\\&=16[\Delta(b_1{}^2-c_1{}^2)-\Delta_1(b^2-c^2)]^2\\&\qquad+8a^2a_1{}^2bb_1cc_1\cos(B-B_1)\end{aligned}\right\}\ 12.$$

Da in den beiden Dreiecken sowohl $A-A_1=B_1-B$ als auch $A-B_1=A_1-B$ ist, so können die Winkelaggregate beliebig mit einander vertauscht werden, und man erhält somit noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(A-B_1)=\cos(A_1-B)&=\frac{c_1{}^2(a^2-b^2)-c^2(a_1{}^2-b_1{}^2)}{2cc_1(ab_1-a_1b)}\\\cos(A-A_1)=\cos(B_1-B)&=\frac{c_1{}^2(a^2-b^2)+c^2(a_1{}^2-b_1{}^2)}{2cc_1(aa_1-bb_1)}\end{aligned}\right\}\ 13.$$

## §. 8.

Wird ausser $C=C_1$ auch noch die Gegenseite $c=c_1$, d. h. stehen beide Dreiecke auf gleich grossen Sehnen congruenter Kreise, so wird:

$$\left.\begin{aligned}(aa_1-bb_1)^2&=c^2(a_1{}^2+b^2-2a_1b\cos(A-B_1))\\&=c^2(a^2+b_1{}^2-2ab_1\cos(A_1-B))\\(ab_1-a_1b)^2&=c^2(a^2+a_1{}^2-2aa_1\cos(B_1-B))\\&=c^2(b^2+b_1{}^2-2bb_1\cos(A-A_1))\end{aligned}\right\}\ 14.$$

Ferner ist nach Nr. 8.:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{ab}{}^2&=16(\Delta+\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\cos 2C\\&=16(\Delta-\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\\&=16[\tfrac{\Delta(a_1{}^2-b_1{}^2)+\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}]^2+8aa_1bb_1\cos 2(A-B_1)\\&=16[\tfrac{\Delta(a_1{}^2-b_1{}^2)+\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}]^2+8aa_1bb_1\cos 2(A-A_1)\end{aligned}\right\}\ 15.$$

Aus dem Vorstehenden folgt auch sogleich:

$$\left.\begin{aligned}\cos(A-B_1)=\cos(B_1-A)&=\frac{a^2-a_1{}^2-b^2+b_1{}^2}{2(ab_1-a_1b)}\\\cos(A-A_1)=\cos(B_1-B)&=\frac{a^2+a_1{}^2-b^2-b_1{}^2}{2(aa_1-bb_1)}\end{aligned}\right\}\ 16.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\tfrac{1}{2}(A-B_1) &= \frac{(a+a_1+b+b_1)(a-a_1-b+b_1)}{4(ab_1-a_1b)}\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(A-B_1) &= \frac{(a+a_1-b-b_1)(-a+a_1-b+b_1)}{4(ab_1-a_1b)}\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(A-A_1) &= \frac{(a+a_1+b+b_1)(a+a_1-b-b_1)}{4(aa_1-bb_1)}\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(A-A_1) &= \frac{(a-a_1+b-b_1)(-a+a_1+b-b_1)}{4(aa_1-bb_1)}
\end{aligned}\right\} 17.$$

$$\left.\begin{aligned}
2(\Delta_1-\Delta) &= (ab_1-a_1b)\sin(A-B_1)\\
&= (aa_1-bb_1)\sin(A-A_1)
\end{aligned}\right\} 18.$$

Man kann nun auf diese Art weiter gehen, und z. B. $C+C_1=180°$ oder $C+C_1=90°$ u. s. w. setzen; indessen wird es kaum nöthig sein, diese Specialitäten hier weiter zu verfolgen, da die bereits entwickelten Formeln fast alle Bedürfnisse der rechnenden Geometrie befriedigen. Mehrere der hier gefundenen Ausdrücke sind bereits bekannt, jedoch war ihre Gültigkeit bisher immer darauf beschränkt, dass die verglichenen Dreiecke nicht nur in einer und derselben Ebene liegen, sondern auch mit ihren gleichen Stücken auf irgend eine Art zusammenhängen mussten, während diese Bedingung bei den vorliegenden Formeln gänzlich wegfällt. Ich war daher mit ihrer Hülfe im Stande, den grössten Theil der zwischen den Kanten und Kantenwinkeln eines Tetraeders stattfindenden Relationen, welche ich in der ersten Abhandlung des ersten Bandes dieses Archives mitgetheilt habe, fast ohne alle Rechnung hinzuschreiben. Dasselbe hat bei einer Untersuchung des geradlinigen Viereckes stattgefunden, welche gleichfalls in dem Archive wird bekannt gemacht werden.

## §. 9.

Der im §. 7. erwähnte Fall, wenn die Dreiecke einen gleichen Winkel haben, lässt noch eine andere Behandlung zu, welche in der Planimetrie sehr häufig Anwendung findet, obschon die Formeln bei weitem nicht so allgemein gültig sind, wie die im §. 7. entwickelten. Legt man nehmlich die beiden Dreiecke so auf einander, dass die, die gleichen Winkel $C$ einschliessenden, Seiten sich decken: oder, was dasselbe ist: nimmt man auf dem einen Schenkel eines ebenen Winkels $C$ zwei beliebige Punkte $A$ und $A_1$ und auf dem anderen Schenkel ebenfalls zwei beliebige Punkte $B$ und $B_1$ an und nennt die Geraden

$$CB=a,\ CA=b,\ AB=c,\ AB_1=c_2,$$
$$CB_1=a_1,\ CA=b_1,\ A_1B_1=c_1,\ A_1B=c_2,$$

so entstehen vier Dreiecke $CAB$, $CA_1B_1$, $CAB_1$ und $CA_1B$, welche sämmtlich den Winkel $C$ gemein haben, und es ist also

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\quad c_2^2=a^2+b_1^2-2ab_1\cos C$$
$$c_1^2=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos C,\quad c_2^2=a_1^2+b^2-2a_1b\cos C$$

woraus sich sofort folgende Gleichungen ergeben:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2 &= (a^2+a_1^2+b^2+b_1^2)\\
&\quad -2(a+a_1)(b+b_1)\cos C\\
-c^2-c_1^2+c_2^2+c_3^2 &= 2(a_1-a)(b_1-b)\cos C\\
-c^2+c_1^2-c_2^2+c_3^2 &= 2(a_1-a)(a_1+a-(b_1+b)\cos C)\\
-c^2+c_1^2+c_2^2-c_3^2 &= 2(b_1-b)(b_1+b-(a_1+a)\cos C)
\end{aligned}\right\} 19.$$

$$\left.\begin{aligned}
c^2c_1^2 &= (aa_1+bb_1)^2+(ab_1+a_1b)^2\\
&\quad -2(aa_1+bb_1)(ab_1+a_1b)\cos C-4aa_1bb_1\sin^2 C\\
c_2^2c_3^2 &= (aa_1+bb_1)^2+(ab+a_1b_1)^2\\
&\quad -2(aa_1+bb_1)(ab+a_1b_1)\cos C-4aa_1bb_1\sin^2 C
\end{aligned}\right\} 20.$$

$$\left.\begin{aligned}
c_2^2c_3^2+c_1^2c_2^2 &= 2(a^2a_1^2+b^2b_1^2)+(a^2+a_1^2)(b^2+b_1^2)\\
&\quad -2(aa_1+bb_1)(a_1+a)(b_1+b)\cos C+8aa_1bb_1\cos^2 C\\
c_2^2c_3^2-c_1^2c_2^2 &= (a_1-a)(b_1-b)\{(a_1+a)(b_1+b)\\
&\quad -2(aa_1+bb_1)\cos C\}
\end{aligned}\right\} 21.$$

u. s. w. Die fernere Untersuchung dieser Relationen würde hier zu weit führen; denn sie gehört ihrer Natur nach in die Tetragonometrie.

## §. 10.

Zum Schlusse mag noch erwähnt werden, dass ähnliche Ausdrücke, wie die in Nr. 2. zusammengestellten, auch für die sphärischen Dreiecke existiren. Denn sind $abc$ und $a_1b_1c_1$ die Seiten und $ABC$ und $A_1B_1C_1$ die denselben gegenüberliegenden Winkel zweier sphärischen Dreiecke, so ist stets:

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos a \cos a_1 &\mp \sin a \sin a_1 \cos C \cos C_1 = \cos (b \mp b_1)\{\cos c \cos c_1 \mp \sin c \sin c_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (b \mp b_1)\{\sin c \cos c_1 \cos A \mp \cos c \sin c_1 \cos A_1\} \\
\cos a \cos a_1 &\mp \sin a \sin a_1 \cos B \cos B_1 = \cos (c \mp c_1)\{\cos b \cos b_1 \mp \sin b \sin b_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (c \mp c_1)\{\sin b \cos b_1 \cos A \mp \cos b \sin b_1 \cos A_1\} \\
\cos a \cos a_1 &\mp \sin a \sin a_1 \cos B \cos C_1 = \cos (c \mp b_1)\{\cos b \cos c_1 \pm \sin b \sin c_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (c \mp b_1)\{\sin b \cos c_1 \cos A \mp \cos b \sin c_1 \cos A_1\}
\end{aligned}
\right\} 22.
$$

u. s. w. Setzt man $c = c_1$ so ergiebt sich; wenn man zur Abkürzung den Winkel $x$ einführt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\cos x &= \cos a \cos a_1 + \sin a \sin a_1 \cos (B \pm B_1) \\
&= \cos b \cos b_1 + \sin b \sin b_1 \cos (A \pm A_1) \\
\cos C \cos C_1 \mp \sin C \sin C_1 \cos x &= \\
&= \cos (A \pm A_1) \cos (B \pm B_1) \\
&\quad - \sin (A \pm A_1) \sin (B \pm B_1) \cos c
\end{aligned}\right\} 23.$$

Wird hingegen der Winkel $C = C_1$ angenommen, so findet man mit Hülfe des Winkels $X$:

$$\left.\begin{aligned}
\cos X &= \cos A \cos A_1 + \sin A \sin A_1 \cos (b \pm b_1) \\
&= \cos B \cos B_1 + \sin B \sin B_1 \cos (a \pm a_1) \\
\cos c \cos c_1 \mp \sin c \sin c_1 \cos X &= \\
&= \cos (a \pm a_1) \cos (b \pm b_1) \\
&\quad + \sin (a \pm a_1) \sin (b \pm b_1) \cos X
\end{aligned}\right\} 24.$$

Es zeigt sich hierbei der bemerkenswerthe Umstand, dass die Formeln für sphärische Dreiecke denen für ebene Dreiecke entwickelten nur dann völlig analog werden, wenn die beiden sphärischen Dreiecke durch irgend eine einzige Bestimmung etwas von ihrer gänzlichen Unbestimmtheit verloren haben. Mit Ausnahme des sphärischen Dreieckes scheint dies bei allen sphärischen Gebilden statt zu finden. So ist es ja bekannt, dass für jedes beliebige ebene Viereck der Cosinus der Summe je zweier Gegenwinkel unveränderlich ist; dagegen findet dieser Satz bei sphärischen Vierecken nur dann Statt, wenn sie einem Nebenkreise eingeschrieben sind, also etwas von ihrer Allgemeinheit verloren haben.

## §. 11.

Haben endlich $cc_1c_2c_3$ dieselbe Bedeutung auf der Oberfläche einer Kugel, welche ihnen in §. 9. in der Ebene beigelegt worden ist, so erhält man, wenn zur Abkürzung die Hülfswinkel $\omega a_1 a_2 a_3$ nach den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\cos \omega &= \cos \tfrac{1}{2}(a+a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b+b_1) \\
&\quad + \sin \tfrac{1}{2}(a+a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b+b_1) \cos C \\
\cos \omega_1 &= \sin \tfrac{1}{2}(a+a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b+b_1) \\
&\quad + \cos \tfrac{1}{2}(a+a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b+b_1) \cos C \\
\cos \omega_2 &= \cos \tfrac{1}{2}(a+a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b+b_1) \\
&\quad + \sin \tfrac{1}{2}(a+a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b+b_1) \cos C \\
\cos \omega_3 &= \sin \tfrac{1}{2}(a+a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b+b_1) \\
&\quad + \cos \tfrac{1}{2}(a+a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b+b_1) \cos C
\end{aligned}\right\} 25.$$

eingeführt werden, die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\cos c + \cos c_1 + \cos c_2 + \cos c_3 &= 4 \cos \tfrac{1}{2}(a-a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b-b_1) \cos \omega \\
\cos c + \cos c_1 - \cos c_2 - \cos c_3 &= 4 \sin \tfrac{1}{2}(a-a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b-b_1) \cos \omega_1 \\
\cos c - \cos c_1 + \cos c_2 - \cos c_3 &= 4 \cos \tfrac{1}{2}(a-a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b-b_1) \cos \omega_2 \\
\cos c - \cos c_1 - \cos c_2 + \cos c_3 &= 4 \sin \tfrac{1}{2}(a-a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b-b_1) \cos \omega_3
\end{aligned}\right\} 26.$$

so wie auch:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\cos c\,\cos c_1 - \cos c_2\,\cos c_3 = \sin(a_1 - a)\,\sin(b_1 - b)\,\cos C\\
&\cos c\,\cos c_2 - \cos c_1\,\cos c_3 = \sin(b_1 - b)\times\\
&\quad\times\{\cos(a+a_1)\,\sin(b_1+b) - \sin(a_1+a)\,\cos(b_1+b)\,\cos C\\
&\qquad + \sin a\,\sin a_1\,\sin(b+b_1)\,\sin^2 C\}
\end{aligned}\right\}\ 27.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos c\,\cos c_3 - \cos c_1\,\cos c_2 = \sin(a_1 - a)\times\\
&\quad\times\{\sin(a_1+a)\,\cos(b_1+b) - \cos(a_1+a)\,\sin(b_1+b)\,\cos C\\
&\qquad + \sin b\,\sin b_1\,\sin(a_1+a)\,\sin^2 C\}
\end{aligned}\right\}$$

Die geometrische Bedeutung der Hülfswinkel $a$ liegt klar vor Augen. Mittelst dieser Formeln ist der grössere Theil der im Tetraeder stattfindenden Relationen zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln entwickelt worden, so wie sie auch bei Untersuchung des sphärischen Viereckes die besten Dienste geleistet haben.

# XV.

## Ueber die Grundformeln der Dioptrik und Katoptrik.

Von

dem Herausgeber.

### I.

### Betrachtung der Brechung und Zurückwerfung bei einem Kreisbogen.

#### §. 1.

Ein den aus dem Mittelpunkte $C$ in Taf. II. Fig. 1. mit dem Halbmesser $R$ beschriebenen Kreisbogen $KK$ in $E$, die Axe $XY$ in $M$ treffender Strahl $MN$ kann gegen das Einfallsloth $CC_1$ offenbar nur eine der vier in der Figur dargestellten Lagen, welche wir durch I, II, III, IV bezeichnen wollen, haben. Die, jenachdem der Punkt $M$ auf der convexen oder concaven Seite des Kreisbogens $KK$ liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des Puntes $M$ von dem Durchschnittspunkte $A$ des Kreisbogens $KK$ mit der Axe $XY$ wollen wir durch $\Delta$ bezeichnen, und den Symbo-



Digitized by Google

den $\omega$ und $\Theta$ die aus der Figur auch ohne weitere Erläuterung mit hinreichender Deutlichkeit ersichtliche Bedeutung beilegen.

Dies vorausgesetzt, ist nun in dem Falle I.

$$CE : CA + AM = \sin(\omega - \Theta) : \sin \omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega - \Theta) : \sin \omega.$$

In dem Falle II. ist

$$CE : AM - CA = \sin(\Theta - \omega) : \sin \omega,$$

d. i.

$$R : -(R + \Delta) = \sin(\Theta - \omega) : \sin \omega,$$

oder

$$R : R + \Delta = \sin(\omega - \Theta) : \sin \omega.$$

In dem Falle III. ist

$$CE : CA + AM = \sin(\omega + \Theta) : \sin \omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega + \Theta) : \sin \omega.$$

In dem Falle IV. ist

$$CE : CA - AM = \sin(\omega + \Theta) : \sin \omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega + \Theta) : \sin \omega.$$

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so sieht man, dass immer

$$R : R + \Delta = \sin(\omega \mp \Theta) : \sin \omega,$$

oder

$$1. \quad \frac{R + \Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin(\omega \mp \Theta)},$$

und in dieser Gleichung in den Fällen I. und II. das obere, in den Fällen III. und IV. das untere Zeichen zu nehmen ist.

Denken wir uns nun in dem Falle I., wo nach dem Vorhergehenden

$$\frac{R + \Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin(\omega - \Theta)}$$

ist, entweder $ME$ oder $NE$ als den einfallenden Strahl, stellen uns durch $E$ eine Tangente an den Kreisbogen $KK$ gezogen vor, und bezeichnen für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch $\omega$, und $\Delta$, dasselbe, was vorher für den einfallenden Strahl durch $\omega$ und $\Delta$ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II, für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R + \Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin(\omega_1 - \Theta)},$$

Digitized by Google

für den zurückgeworfenen Strahl *) dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)}.$$

Denken wir uns in dem Falle II, wo nach dem Vorhergehenden auch

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\Theta)}$$

ist, wieder entweder $ME$ oder $NE$ als den einfallenden Strahl, stellen uns auch jetzt durch $E$ eine Tangente an den Kreisbogen $KK$ gezogen vor, und bezeichnen für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch $\omega_1$ und $\Delta_1$ wieder dasselbe, was im Vorhergehenden durch $\omega$ und $\Delta$ für den einfallenden Strahl bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1-\Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)}.$$

Denken wir uns ferner in dem Falle III, wo nach dem Vorhergehenden

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega+\Theta)}$$

ist, entweder $ME$ oder $NE$ als den einfallenden Strahl, stellen uns durch $E$ eine Tangente an den Kreisbogen $KK$ gezogen vor, und bezeichnen wieder für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch $\omega_1$ und $\Delta_1$ dasselbe, was im Vorhergehenden für den einfallenden Strahl durch $\omega$ und $\Delta$ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

*) Rücksichtlich des Falls der Zurückwerfung bemerken wir, dass wir denselben im Folgenden aus einem allgemeinern Gesichtspunkte als gewöhnlich geschieht betrachten werden, indem wir auch in diesem Falle bloss annehmen wollen, dass die Sinus der beiden spitzen Winkel, welche der einfallende und zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe einschliessen, in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.



Digitized by Google

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 - \Theta)}.$$

Denken wir uns endlich in dem Falle IV., wo nach dem Vorhergehenden wieder

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + \Theta)}$$

ist, entweder $ME$ oder $NE$ als den einfallenden Strahl, stellen uns durch $E$ eine Tangente an den Kreisbogen $KK$ gezogen vor, und bezeichnen auch jetzt für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch $\omega_1$ und $\Delta_1$ dasselbe, was vorher für den einfallenden Strahl durch $\omega$ und $\Delta$ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 + \Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 - \Theta)}.$$

Ueberhaupt ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden Folgendes:

In den Fällen I. und II. ist

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega - \Theta)}, \quad \frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 \mp \Theta)};$$

in den Fällen III. und IV. dagegen ist

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + \Theta)}, \quad \frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 \pm \Theta)};$$

wo immer die obern Zeichen dem Falle der Brechung, die untern dem Falle der Zurückwerfung entsprechen.

Also ist im Falle der Brechung mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$2. \quad \frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega \mp \Theta)}, \quad \frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 \mp \Theta)}.$$

Im Falle der Zurückwerfung ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$3. \quad \frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega \mp \Theta)}, \quad \frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin \omega_1}{\sin (\omega_1 \pm \Theta)}.$$

Im Falle der Brechung ist folglich nach 2.

$$4. \quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} \cdot \frac{\sin (\omega_1 \mp \Theta)}{\sin (\omega \mp \Theta)}.$$

Dagegen ist im Falle der Zurückwerfung nach 3.

$$5. \quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} \cdot \frac{\sin (\omega_1 \pm \Theta)}{\sin (\omega \mp \Theta)}.$$

Digitized by Google

Aus der Gleichung 4. erhält man auch

$$4^{*}.\quad \text{tang}\,\Theta = \pm\frac{\Delta-\Delta_1}{(R+\Delta)\cot\omega-(R+\Delta_1)\cot\omega_1},$$

und aus der Gleichung 5. ergiebt sich

$$5^{*}.\quad \text{tang}\,\Theta = \pm\frac{\Delta-\Delta_1}{(R+\Delta)\cot\omega+(R+\Delta_1)\cot\omega_1}.$$

Nach 2. ist im Falle der Brechung

$$1+\frac{\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad 1+\frac{\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\mp\Theta)};$$

folglich

$$\frac{\Delta}{R}=\frac{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad \frac{\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin(\omega_1\mp\Theta)};$$

also

$$6.\quad \frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}\cdot\frac{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\mp\Theta)}$$

oder

$$7.\quad \frac{\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}.$$

Nach 3. ist im Falle der Zurückwerfung

$$1+\frac{\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad 1+\frac{\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\pm\Theta)};$$

folglich

$$\frac{\Delta}{R}=\frac{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad \frac{\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin(\omega_1\pm\Theta)};$$

also

$$8.\quad \frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}\cdot\frac{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\pm\Theta)},$$

oder

$$9.\quad \frac{\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}.$$

Im Falle der Brechung ist also nach 4. und 7.

$$10.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 5. und 9.

$$11.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta)}.$$

Auch ist nach bekannten goniometrischen Formeln im Falle der Brechung nach 10.

$$12.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\mp\frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 11.

Digitized by Google

$$13.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Aus der Formel 12. ergiebt sich auch

$$12^*.\quad \cot\tfrac{1}{2}\Theta = \mp\frac{\frac{R}{\Delta}-\frac{R}{\Delta_1}}{(1+\frac{R}{\Delta})\cot\omega-(1+\frac{R}{\Delta_1})\cot\omega_1}.$$

und aus der Formel 13. erhält man

$$13^*.\quad \cot\tfrac{1}{2}\Theta = \mp\frac{\frac{R}{\Delta}-\frac{R}{\Delta_1}}{(1+\frac{R}{\Delta})\cot\omega+(1+\frac{R}{\Delta_1})\cot\omega_1}.$$

Setzt man

$$14.\quad \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$

wo bekanntlich $n$ eine constante Grösse ist, so werden die vorhergehenden Formeln im Falle der Brechung

$$15.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = n\,\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung

$$16.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -n\,\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung ist bekanntlich $n = 1$, und folglich nach 16.

$$17.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\cdot\frac{\cos(\omega \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Wir wollen aber, wie schon oben erinnert worden ist, die Zurückwerfung hier immer aus dem oben angegebenen allgemeinern Gesichtspunkte betrachten.

## §. 2.

Der Punkt $A$ soll jetzt als der Anfang, die Axe $XY$ als die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen werden, und die positiven Abscissen wollen wir immer auf der convexen Seite des Bogens $KK$ nehmen. Ist nun $M'$ ein beliebiger strahlender Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das angenommene System $p$, $q$ sind, so denke man sich durch denselben und den Mittelpunkt $C$ des Kreisbogens $KK$ die Axe $X'Y'$ gezogen, welche den in Rede stehenden Kreisbogen in dem Punkte $A'$ schneiden mag, und bezeichne in Bezug auf diese Axe für den Punkt $M'$ durch $\Delta'$ und $\Delta'_1$, ganz dasselbe, was im vorhergehenden Paragraphen in Bezug auf die den Kreisbogen $KK$ in $A$ schneidende Axe $XY$ für den Punkt $M$ durch $\Delta$ und $\Delta_1$ bezeichnet worden ist. Ferner bezeichne man den von der Linie $CA'$ mit der Axe $XY$ eingeschlossenen, jenachdem die Linie $CA'$ auf der Seite der positiven oder auf der Seite der negativen Ordinaten liegt, als positiv oder als negativ betrachteten spitzen Winkel durch $\varphi$; so wird aus Taf. II. Fig. 2. leicht erhellen, dass in völliger Allgemeinheit

Digitized by Google

$$18.\quad \begin{cases} p = (R+\Delta')\cos\varphi - R, \\ q = (R+\Delta')\sin\varphi \end{cases}$$

ist. Sind nun $p_1$, $q_1$ die Coordinaten des Punktes, in welchem die Axe $X'Y'$ von dem gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahle geschnitten wird; so ist ganz eben so

$$19.\quad \begin{cases} p_1 = (R+\Delta'_1)\cos\varphi - R, \\ q_1 = (R+\Delta'_1)\sin\varphi. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 18. und 19. folgt

$$\frac{R+p}{R+p_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1},\quad \frac{q}{q_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1};$$

also

$$20.\quad \frac{R+p}{R+p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1}.$$

Ferner ist

$$\Delta' = \frac{R+p}{\cos\varphi} - R = \frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi},$$

$$\Delta'_1 = \frac{R+p_1}{\cos\varphi} - R = \frac{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}$$

und

$$\Delta' = \frac{q}{\sin\varphi} - R = \frac{q - R\sin\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\Delta'_1 = \frac{q_1}{\sin\varphi} - R = \frac{q_1 - R\sin\varphi}{\sin\varphi};$$

also

$$21.\quad \frac{\Delta'}{\Delta'_1} = \frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{q - R\sin\varphi}{q_1 - R\sin\varphi}.$$

Weil nun nach dem vorigen Paragraphen, wenn durch $\Theta'$ jetzt in Bezug auf die Axe $X'Y'$ dasselbe bezeichnet wird, was früher in Bezug auf die Axe $XY$ durch $\Theta$ bezeichnet wurde, im Falle der Brechung

$$\frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1} = \frac{\Delta'}{\Delta'_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')},$$

und im Falle der Zurückwerfung

$$\frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1} = -\frac{\Delta'}{\Delta'_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')}$$

ist; so ist nach 20. und 21. im Falle der Brechung

$$22.\quad \begin{cases} \dfrac{R+p}{R+p_1} = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \dfrac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} \cdot \dfrac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \\ \dfrac{q}{q_1} = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \dfrac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} \cdot \dfrac{q - R\sin\varphi}{q_1 - R\sin\varphi}; \end{cases}$$

und im Falle der Zurückwerfung ist

Digitized by Google

$$23.\quad \begin{cases} \dfrac{R+p}{R+p_1} = -\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\dfrac{\cos(\omega_1\pm\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')}\cdot\dfrac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \\ \dfrac{q}{q_1} = -\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\dfrac{\cos(\omega_1\pm\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')}\cdot\dfrac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi}. \end{cases}$$

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\mp\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\mp\Theta')}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta')}$$
$$= \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin\omega_1\cos\Theta'\pm\cos\omega_1\sin\Theta'}{\sin\omega-\sin\omega\cos\Theta'\pm\cos\omega\sin\Theta'},$$
$$-\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\pm\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin(\omega_1\pm\Theta')}{\sin\omega-\sin(\omega\mp\Theta')}$$
$$= \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin\omega_1\cos\Theta'\mp\cos\omega_1\sin\Theta'}{\sin\omega-\sin\omega\cos\Theta'\mp\cos\omega\sin\Theta'}$$

ist. Wenn nun die Winkel $\omega$, $\omega_1$, $\Theta'$ so klein sind, dass man Grössen, welche in Bezug auf dieselben von der vierten und höhern Dimensionen sind, ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\mp\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin\omega_1\pm\sin\Theta'}{\sin\omega-\sin\omega\pm\sin\Theta'},$$
$$-\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\pm\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin\omega_1-\sin\omega_1\mp\sin\Theta'}{\sin\omega-\sin\omega\pm\sin\Theta'};$$

also offenbar

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\mp\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$
$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\pm\frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega\mp\frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n;$$

und mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf $\omega$, $\omega_1$, $\Theta'$ von der vierten und höhern Dimensionen sind, ist folglich im Falle der Brechung nach 22.

$$24.\quad \frac{R+p}{R+p_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2},\quad \frac{q}{q_1} = n\,\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi};$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 23.

$$25.\quad \frac{R+p}{R+p_1} = -n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2},\quad \frac{q}{q_1} = -n\,\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi}.$$

Auch ist nach 20. mit völliger Genauigkeit

$$\frac{q}{q_1} = \frac{R+p}{R+p_1},$$

und folglich mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf $\omega$, $\omega_1$, $\Theta'$ von der vierten und höhern Dimensionen sind, im Falle der Brechung

$$26.\quad \frac{R+p}{R+p_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2},\quad \frac{q}{q_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$$

und im Falle der Zurückwerfung

Digitized by Google

27. $\frac{R+p}{R+p_1} = -n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = -n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$

oder es ist mit dem obigen Grade der Genauigkeit

28. $\frac{R+p}{R+p_1} = \pm n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = \pm n\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi};$

oder auch

29. $\frac{R+p}{R+p_1} = \pm n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = \pm n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$

wo die obern Zeichen dem Falle der Brechung, die untern dem Falle der Zurückwerfung entsprechen.

Nimmt man nun bloss $n$ im Falle der Brechung positiv, im Falle der Zurückwerfung dagegen negativ, so kann man mit dem obigen Grade der Genauigkeit für beide Fälle

30. $\frac{R+p}{R+p_1} = n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi}$

oder auch

31. $\frac{R+p}{R+p_1} = n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$

setzen. Ist es aber verstattet, auch die Grösse $2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ wegen der Kleinheit von $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ zu vernachlässigen, so nehmen die beiden letzten Formeln die folgende sehr einfache Gestalt an:

32. $\frac{R+p}{R+p_1} = n\frac{p}{p_1}, \quad \frac{q}{q_1} = n\frac{p}{p_1},$

wo immer $n$ im Falle der Brechung positiv, im Falle der Zurückwerfung negativ zu nehmen ist.

Aus den beiden Gleichungen 30. erhält man ohne Schwierigkeit

33. $p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\}\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \quad q_1 = \frac{qR\sin\varphi}{q-n(q-R\sin\varphi)};$

und aus den beiden Gleichungen 31. ergiebt sich

34. $\begin{cases} p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\}\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \\ q_1 = \frac{Rq(1-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)}{R(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}; \end{cases}$

oder

35. $\begin{cases} p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\}\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \\ q_1 = \frac{Rq\cos\varphi}{R(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}; \end{cases}$

und nach 34., wenn man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend betrachtet,

36. $p_1 = \frac{nRp}{R-(n-1)p}, \quad q_1 = \frac{Rq}{R-(n-1)p};$

wo $n$ immer im Falle der Brechung als positiv, im Falle der Zurückwerfung als negativ betrachtet wird.

Digitized by Google

Aus den vorher entwickelten Formeln 33., 34., 35. erhellet, dass unter der wegen der Winkel $\omega$, $\omega_1$, $\Theta'$ gemachten Voraussetzung die Coordinaten $p_1$, $q_1$ sich nicht ändern, so lange die Coordinaten $p$, $q$ keine Aenderung erleiden, welches auch die Richtungen der aus dem Punkte $(pq)$ ausgehenden Strahlen sein mögen, dass also alle von dem Punkte $(pq)$ ausgehende Strahlen sich nach der Brechung oder Zurückwerfung in dem Punkte $(p_1q_1)$ wieder mit einander vereinigen.

Bezeichnet man den Werth, welchen $p_1$ für $p=\infty$ erhält, durch $f_1$, so ergiebt sich aus 34. leicht

$$37.\quad f_1 = -\frac{n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{n-1}R,$$

oder, wie man leicht findet,

$$38.\quad f_1 = -(1+\frac{\cos\varphi}{n-1})R.$$

Betrachtet man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend, so wird nach 37.

$$39.\quad f_1 = -\frac{n}{n-1}R,$$

und folglich für $n=-1$, d. i. bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung,

$$40.\quad f_1 = -\frac{1}{2}R.$$

Die beiden Formeln 36. können auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

$$41.\quad \frac{1}{p} - n\frac{1}{p_1} = (n-1)\frac{1}{R},\quad \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} = (n-1)\frac{p}{Rq}.$$

Weil nun aber nach 39.

$$(n-1)\frac{1}{R} = -n\frac{1}{f_1}$$

ist, so werden die beiden vorhergehenden Gleichungen

$$42.\quad \frac{1}{p} - n\frac{1}{p_1} = -n\frac{1}{f_1},\quad \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} = -n\frac{p}{f_1 q};$$

und die erste dieser beiden Gleichungen kann auch unter der Form

$$43.\quad \frac{1}{p} = n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{f_1})$$

geschrieben werden. Für $n=-1$ ist

$$44.\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_1},$$

oder nach 40.

$$45.\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = -\frac{2}{R}.$$

Dass $q_1$ für $p=\infty$ verschwindet, erhellet aus den Formeln 34., 35. auf der Stelle, wobei aber nie aus den Augen gelassen werden darf, dass die in Rede stehenden Formeln sämmtlich nur Näherungsformeln sind.

Digitized by Google

Wenn man mittelst der Formeln 33. die Coordinaten $p$, $q$ durch die Coordinaten $p_1$, $q_1$ ausdrückt, so erhält man

$$46.\quad p=\frac{Rp_1(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1},\quad q=\frac{nRq_1\sin\varphi}{R\sin\varphi+(n-1)q_1};$$

und aus den Formeln 34. ergiebt sich auf ähnliche Weise

$$47.\quad \begin{cases} p=\dfrac{Rp_1(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}, \\ q=\dfrac{nRq_1(1-4\sin\frac{1}{2}\varphi^2\cos\frac{1}{2}\varphi^2)}{(1-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)\{R(n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1\}}; \end{cases}$$

oder

$$48.\quad \begin{cases} p=\dfrac{Rp_1(1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}, \\ q=\dfrac{nRq_1\cos\varphi}{R(n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}; \end{cases}$$

und nach 47., wenn man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend betrachtet,

$$49.\quad p=\frac{Rp_1}{nR+(n-1)p_1},\quad q=\frac{nRq_1}{nR+(n-1)p_1}.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen $p$ für $p_1=\infty$ erhält, durch $f$, so ist nach dem Vorhergehenden

$$50.\quad f=\frac{1-2n\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{n-1}R,$$

oder, wie man leicht findet,

$$51.\quad f=-(1-\frac{n\cos\varphi}{n-1})R.$$

Betrachtet man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend, so wird nach 50.

$$52.\quad f=\frac{1}{n-1}R.$$

## §. 3.

Nach 49. und 52. ist

$$p=\frac{Rp_1}{nR+(n-1)p_1},\quad f=\frac{1}{n-1}R;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$\frac{p-f}{R}=-\frac{nR}{(n-1)\{nR+(n-1)p_1\}}.$$

Weil nun nach 39.

$$f_1=-\frac{n}{n-1}R$$

ist, so ist

$$\frac{p_1-f_1}{R}=\frac{nR+(n-1)p_1}{(n-1)R}.$$

Also ist

Digitized by Google

$$\frac{(p-f)\,(p_1-f_1)}{R^2} = -\frac{n}{(n-1)^2}$$

oder

$$53.\quad (p-f)\,(p_1-f_1) = -n\left(\frac{R}{n-1}\right)^2,$$

woraus sich ergiebt, dass das Product $(p-f)\,(p_1-f_1)$ eine constante Grösse ist.

Nach 32. ist ferner

$$\frac{q}{q_1} = n\frac{p}{p_1},$$

also

$$\frac{q}{q_1} = n\frac{f+(p-f)}{f_1+(p_1-f_1)},$$

und folglich, weil nach 52. und 39.

$$f = \frac{1}{n-1}R,\ f_1 = -\frac{n}{n-1}R$$

ist,

$$\frac{q}{q_1} = -n\frac{1+(n-1)\frac{p-f}{R}}{n-(n-1)\frac{p_1-f_1}{R}}.$$

Schafft man nun die Nenner weg, so erhält man die Gleichung

$$n(q+q_1) = (n-1)\,(q\frac{p_1-f_1}{R} - nq_1\frac{p-f}{R}),$$

oder, wenn man quadrirt, die Gleichung

$$n^2(q+q_1)^2 = (n-1)^2\,(q\frac{p_1-f_1}{R} - nq_1\frac{p-f}{R})^2.$$

Weil nach 53.

$$n = -\frac{(n-1)^2\,(p-f)\,(p_1-f_1)}{R^2},$$

also

$$n^2 = -\frac{n(n-1)^2\,(p-f)\,(p_1-f_1)}{R^2}$$

ist, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auch unter der folgenden Form darstellen:

$$-n(p-f)\,(p_1-f_1)\,(q+q_1)^2 = |q(p_1-f_1) - nq_1(p-f)|^2.$$

Entwickelt man nun die Quadrate der Binomialgrössen, so erhält man nach leichter Rechnung die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \quad & q^2(p_1-f_1)\,|n(p-f)+p_1-f_1| \\ & +nq_1{}^2(p-f)\,|n(p-f)+p_1-f_1|, \end{aligned}$$

oder

$$q^2(p_1-f_1) = -nq_1{}^2(p-f),$$

Digitized by Google

und folglich

$$54. \quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = -n\frac{p-f}{p_1-f_1},$$

welches auch eine in mehrfacher Rücksicht merkwürdige Gleichung ist.

§. 4.

Wenn wir nun auch von jetzt an der Einfachheit und Kürze wegen bloss den Fall der Brechung in einem Linsenglase oder in einem Systeme von Linsengläsern in's Auge fassen werden; so kann, was wir hier gleich im Voraus bemerken, Alles, was im Folgenden vorkommen wird, doch auch ohne alle Schwierigkeit auf den Fall der Zurückwerfung von zwei oder mehreren Kugelflächen ausgedehnt werden, wenn man nur in den Formeln überall $n$ negativ nimmt, oder bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung $n = -1$ setzt.

II.

Brechung in einem Linsenglase.

§. 5.

Die Durchschnittspunkte zweier Kreisbogen mit der durch ihre Mittelpunkte gehenden geraden Linie $XY$ (Taf. II. Fig. 3.), welche wir ihre Axe nennen wollen, seien $A$, $A_1$, und $E$, $E_1$ seien die Entfernungen eines Punktes in der Axe von den beiden Punkten $A$, $A_1$, unter der Voraussetzung, dass $E$ eine positive oder negative Grösse ist, jenachdem der in Rede stehende Punkt auf der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte $A$ schneidenden Kreisbogens liegt, und dass eben so $E_1$ eine positive oder eine negative Grösse ist, jenachdem der in Rede stehende Punkt auf der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte $A_1$ schneidenden Kreisbogens liegt. Die immer als positiv betrachtete Entfernung der beiden Punkte $A$ und $A_1$ von einander wollen wir durch $D$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt, sind nun die vier folgenden Fälle von einander zu unterscheiden.

Wenn die beiden Kreisbogen ihre concaven Seiten gegen einander kehren, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3ª. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = -D.$$

Wenn die beiden Kreisbogen ihre convexen Seiten gegen einander kehren, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3ᵇ. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = D.$$

Wenn der die Axe in $A$ schneidende Kreisbogen seine concave Seite gegen die convexe Seite des die Axe in $A_1$ schneidenden Kreisbogens kehrt, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3ᶜ. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E - E_1 = -D.$$

Wenn der die Axe in $A$ schneidende Kreisbogen seine con-

Digitized by Google

vexe Seite gegen die concave Seite des die Axe in $A_1$ schneidenden Kreisbogens kehrt, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E - E_1 = D.$$

Hieraus ergiebt sich überhaupt das folgende Resultat:

Wenn gleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind, so ist

$$E + E_1 = \mp D,$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die concaven oder die convexen Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind. Wenn ungleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind, so ist

$$E - E_1 = \mp D,$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die concave oder convexe Seite des die Axe in dem Punkte $A$ schneidenden Kreisbogens respective der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte $A_1$ schneidenden Kreisbogens zugekehrt ist.

Nehmen wir aber die Entfernung der Durchschnittspunkte der beiden Kreisbogen mit ihrer Axe von einander jetzt positiv oder negativ, jenachdem der die Axe in $A$ schneidende Kreisbogen dem die Axe in $A_1$ schneidenden Kreisbogen seine convexe oder seine concave Seite zukehrt, und bezeichnen unter dieser Voraussetzung die in Rede stehende Entfernung wieder durch $D$, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit

$$E \pm E_1 = D,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem die beiden Kreisbogen gleichnamige oder ungleichnamige Seiten einander zukehren.

## §. 6.

Wir wollen uns nun Strahlen denken, welche, aus einem in Bezug auf $A$ als Anfang der Coordinaten durch die Coordinaten $p$, $q$ bestimmten Punkte $(pq)$ ausgehend, nach der Brechung in dem die Axe in dem Punkte $A$ schneidenden Kreisbogen, dessen Halbmesser $R$ sein mag, sich in dem in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem durch die Coordinaten $p'$, $q'$ bestimmten Punkte $(p'q')$ mit einander vereinigen, und, nachdem sie eine zweite Brechung in dem die Axe in $A_1$ schneidenden Kreisbogen, dessen Halbmesser $R_1$ sein mag, erlitten haben, in dem in Bezug auf $A_1$ als Anfang der Coordinaten durch die Coordinaten $p_1$, $q_1$ bestimmten Punkte $(p_1q_1)$ wieder mit einander zusammenkommen. Links von dem die Axe in $A$ und rechts von dem die Axe in $A_1$ schneidenden Kreisbogen, wobei wir uns auf Taf. II. Fig. 3. beziehen, soll ein und dasselbe brechende Medium, zwischen den beiden Kreisbogen soll ein anderes brechendes Medium liegen, und das Brechungsverhältniss für das erste und zweite brechende Medium soll $n : 1$ sein. Die Coordinaten des Punktes, dessen Coordinaten in Bezug auf das Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte $A$ vorher durch $p'$, $q'$

bezeichnet worden sind, sollen in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte $A_1$ durch $p'_1$, $q'_1$ bezeichnet werden.

Dies vorausgesetzt, haben wir nach 32. offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{R+p}{R+p'} = n\frac{p}{p'}, \quad \frac{R_1+p_1}{R_1+p'_1} = n\frac{p_1}{p'_1},$$

zu denen nach dem vorigen Paragraphen noch die Gleichung

$$p' \pm p'_1 = D$$

kommt, in welcher das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem gleichnamige oder ungleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind. Aus diesen drei Gleichungen, die auch unter der Form

$$1+\frac{R}{p} = n(1+\frac{R}{p'}),$$

$$1+\frac{R_1}{p_1} = n(1+\frac{R_1}{p'_1}),$$

$$p' \pm p'_1 = D$$

dargestellt werden können, lassen sich die beiden Grössen $p'$ und $p'_1$ eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen $p$ und $p_1$ entwickeln, welche Entwickelung wir jetzt ausführen wollen.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\frac{R}{p'} = \frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1, \quad \frac{R_1}{p'_1} = \frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1;$$

also

$$p' = \frac{R}{\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1}, \quad p'_1 = \frac{R_1}{\frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1};$$

und folglich, wenn man diese Ausdrücke von $p'$ und $p'_1$ in die dritte Gleichung einführt,

$$55. \quad \frac{R}{\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1} \pm \frac{R_1}{\frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1} = D;$$

oder auch

$$56. \quad \frac{nRp}{R-(n-1)p} \pm \frac{nR_1p_1}{R_1-(n-1)p_1} = D;$$

oder auch, wie man leicht findet,

$$57. \quad \frac{1}{p_1} \pm \frac{1}{p} - (n-1)\left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R}\right) = \frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{n-1}{R_1}\right)$$

oder

$$58. \quad \frac{1}{p} \pm \frac{1}{p_1} - (n-1)\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1}\right) = \pm\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{n-1}{R_1}\right).$$

Bestimmen wir mittelst der Gleichung 55. die Grösse $p_1$ durch $p$ und die Grösse $p$ durch $p_1$; so erhalten wir nach leichter Rechnung

Digitized by Google

$$59.\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{R + |1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})|D}{(n-1)R + |1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})| \ |(n-1)D \pm nR_1|} R_1, \\ p = \dfrac{R_1 \pm |1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R_1}{p_1})|D}{(n-1)R_1 \pm |1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R_1}{p_1})| \ |(n-1)D + nR|} R. \end{cases}$$

Wird nun der Werth, welchen $p_1$ für $p = \infty$ erhält, durch $f_1$, der Werth, welchen $p$ für $p_1 = \infty$ erhält, durch $f$ bezeichnet; so ist nach 59.

$$60.\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1)R + (1 - \frac{1}{n}) \ |(n-1)D \pm nR_1|} R_1, \\ f = \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1)R_1 \pm (1 - \frac{1}{n}) \ |(n-1)D + nR|} R; \end{cases}$$

oder

$$61.\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ |R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D|} R_1, \\ f = \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ |R_1 \pm R \pm (1 - \frac{1}{n})D|} R; \end{cases}$$

oder

$$62.\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ |R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D|} R_1, \\ f = \pm \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ |R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D|} R; \end{cases}$$

Also ist

$$63.\quad f_1 \mp f = \frac{(1 - \frac{1}{n})D(R_1 \mp R)}{(n-1) \ |R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D|}$$

oder

Digitized by Google

64. $$f \mp f_1 = \frac{(1-\frac{1}{n})D(R \mp R_1)}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}.$$

§. 7.

Nach 62. ist

$$p - f = p \mp \frac{R_1 \pm (1-\frac{1}{n})D}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}\,R,$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen

$$Z = (n-1)p\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\} \mp R\,\{R_1 \pm (1-\frac{1}{n})D\}$$

setzt,

$$p - f = \frac{Z}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}.$$

Ferner ist nach 59. und 62.

$$p_1 - f_1 = \frac{R + \{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}D}{(n-1)\,R + \{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\,\{(n-1)D \pm nR_1\}}\,R_1$$

$$- \frac{R + (1-\frac{1}{n})D}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}\,R_1,$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$p_1 - f_1 = \pm \frac{R^2 R_1{}^2}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}Z}.$$

Also ist offenbar

65. $$(p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \frac{R^2 R_1{}^2}{(n-1)^2\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}^2}$$

oder

66. $$(p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \left\{\frac{RR_1}{(n-1)\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}\right\}^2,$$

und das Product $(p-f)\,(p_1-f_1)$ ist daher jederzeit eine constante Grösse.

Für $D = 0$, d. h. wenn man die Dicke der Linse als verschwindend betrachtet, ist

67. $$(p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \left\{\frac{RR_1}{(n-1)\,(R \pm R_1)}\right\}^2.$$



Digitized by Google

§. 8.

Nach 36. ist, wenn wir die in §. 6. eingeführten Bezeichnungen auch hier beibehalten,

$$q' = \frac{Rq}{R-(n-1)p}, \quad q'_1 = \frac{R_1 q_1}{R_1-(n-1)p_1};$$

also, weil offenbar $q' = q'_1$ ist,

$$\frac{Rq}{R-(n-1)p} = \frac{R_1 q_1}{R_1-(n-1)p_1},$$

und folglich

$$68. \quad \frac{q}{q_1} = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{R-(n-1)p}{R_1-(n-1)p_1} = \frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

oder

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1-(n-1)\frac{f}{R}-(n-1)\frac{p-f}{R}}{1-(n-1)\frac{f_1}{R_1}-(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Nach 62. ist aber

$$1-(n-1)\frac{f}{R} = \frac{R}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D},$$

$$1-(n-1)\frac{f_1}{R_1} = \pm\frac{R_1}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = \frac{1}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D}$$

setzen,

$$1-(n-1)\frac{f}{R} = KR, \quad 1-(n-1)\frac{f_1}{R_1} = \pm KR_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$69. \quad \frac{q}{q_1} = \pm\frac{KR-(n-1)\frac{p-f}{R}}{KR_1 \mp (n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

$$K(qR_1 \mp q_1 R) = \pm(n-1)\,(q\frac{p_1-f_1}{R_1} - q_1\frac{p-f}{R}),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, auf die Form

$$K^2(qR_1 \mp q_1 R)^2 = (n-1)^2\,(q\frac{p_1-f_1}{R_1} - q_1\frac{p-f}{R})^2.$$

Digitized by Google

Nun ist aber nach 66.

$$(p-f)\,(p_1-f_1) = \pm\frac{K^2R^2R_1^2}{(n-1)^2},$$

und folglich

$$K^2 = \pm(n-1)^2\,\frac{(p-f)\,(p_1-f_1)}{R^2R_1^2},$$

welches, in die vorhergehende Gleichung eingeführt, die Gleichung

$$\pm(qR_1 \mp q_1R)^2\,\frac{(p-f)\,(p_1-f_1)}{R^2R_1^2} = (q\,\frac{p_1-f_1}{R_1} - q_1\,\frac{p-f}{R})^2$$

giebt. Entwickelt man nun die Quadrate der Binomialgrössen, und hebt die gleichen Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auf; so erhält man die Gleichung

$$\pm q^2(p_1-f_1)\,(\frac{p-f}{R^2} \mp \frac{p_1-f_1}{R_1^2})$$
$$= q_1^2(p-f)\,(\frac{p-f}{R^2} \mp \frac{p_1-f_1}{R_1^2})$$

oder

$$q^2(p_1-f_1) = \pm q_1^2(p-f),$$

und folglich

$$\frac{q^2}{q_1^2} = \pm\frac{p-f}{p_1-f_1}$$

oder

$$70.\quad (\frac{q}{q_1})^2 = \pm\frac{p-f}{p_1-f_1},$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige Gleichung ist.

## §. 9.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

und nach 59. ist, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$1-(n-1)\frac{p_1}{R_1} = \mp\frac{RR_1}{p}\cdot\frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{(n-1)R+\{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\,\{(n-1)D\pm nR_1\}}.$$

Also ist

$$71.\quad \frac{q}{q_1} = \mp p\,\frac{(n-1)R+\{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\,\{(n-1)D\pm nR_1\}}{RR_1},$$

oder auch



Digitized by Google

$$72.\quad \frac{q}{q_1} = 1 \mp (n-1)p\,\frac{R \pm R_1 + \{1 - \frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}D}{RR_1},$$

oder auch

$$73.\quad \frac{q}{q_1} = 1 - (n-1)p\,\frac{R_1 \pm R \pm \{1 - \frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}D}{RR_1},$$

oder auch

$$74.\quad \frac{q}{q_1} = 1 - (n-1)p\,\{\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1 - \frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})}{RR_1}\,D\}$$

## III.

### Brechung in einem Systeme von Linsengläsern.

### §. 10.

Wir müssen bei dieser Untersuchung von einigen allgemeinen Betrachtungen über die Kettenbrüche ausgehen, von denen wir nachher wichtige Anwendungen machen werden. Diese Betrachtungen betreffen die beiden folgenden Kettenbrüche:

$$75.\quad \frac{f_i}{f'_i} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_i}$$

und

$$76.\quad \frac{g_i}{g'_i} = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_{i-2}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

von denen der zweite gewissermassen das Umgekehrte des ersten ist.

Zuerst ist nun offenbar

$$\frac{f_0}{f'_0} = \frac{1}{a_0} \text{ und } \frac{f_1}{f'_1} = \frac{a_1}{1 + a_0 a_1};$$

und

$$\frac{f_2}{f'_2} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_2}}{1 + a_0(a_1 + \frac{1}{a_2})} = \frac{1 + a_1 a_2}{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2} = \frac{f_0 + f_1 a_2}{f'_0 + f'_1 a_2},$$

$$\frac{f_3}{f'_3} = \frac{f_0 + f_1(a_2 + \frac{1}{a_3})}{f'_0 + f'_1(a_2 + \frac{1}{a_3})} = \frac{f_1 + (f_0 + f_1 a_2)a_3}{f'_1 + (f'_0 + f'_1 a_2)a_3} = \frac{f_1 + f_2 a_3}{f'_1 + f'_2 a_3},$$

Digitized by Google

$$\frac{f_4}{f'_4} = \frac{f_1 + f_2(a_2 + \frac{1}{a_4})}{f'_1 + f'_2(a_2 + \frac{1}{a_4})} = \frac{f_2 + (f_1 + f_2 a_3)a_4}{f'_2 + (f'_1 + f'_2 a_3)a_4} = \frac{f_2 + f_3 a_4}{f'_2 + f'_3 a_4},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist also

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, & f'_0 &= a_0; \\ f_1 &= a_1, & f'_1 &= 1 + a_0 a_1; \\ f_2 &= f_0 + f_1 a_2, & f'_2 &= f'_0 + f'_1 a_2; \\ f_3 &= f_1 + f_2 a_3, & f'_3 &= f'_1 + f'_2 a_3; \\ f_4 &= f_2 + f_3 a_4, & f'_4 &= f'_2 + f'_3 a_4; \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Eine ähnliche Betrachtung wollen wir ferner auch über den zweiten der beiden obigen Kettenbrüche anstellen. Es ist offenbar

$$\frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{a_0} \text{ und } \frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a_1}.$$

Also ist, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$\frac{g_2}{g'_2} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_0}}{1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2} = \frac{1 + a_0 a_1}{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2} = \frac{g_0 + g_1 a_1}{g'_0 + g'_1 a_2}.$$

Folglich ist auf ähnliche Art

$$\begin{aligned} \frac{g_3}{g'_3} &= \frac{1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2}{a_1 + \frac{1}{a_0} + \{1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2\}a_3} \\ &= \frac{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2}{1 + a_0 a_1 + \{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2\}a_3} \\ &= \frac{g_1 + g_2 a_2}{g'_1 + g'_2 a_3}, \end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned} \frac{g_4}{g'_4} &= \frac{a_1 + \frac{1}{a_0} + \{1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2\}a_3}{1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2 + \{a_1 + \frac{1}{a_0} + (1 + (a_1 + \frac{1}{a_0})a_2)a_3\}a_4} \\ &= \frac{1 + a_0 a_1 + \{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2\}a_3}{a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2 + \{1 + a_0 a_1 + (a_0 + (1 + a_0 a_1)a_2)a_3\}a_4} \\ &= \frac{g_2 + g_3 a_3}{g'_2 + g'_3 a_4}. \end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und auch das allgemeine Gesetz erhellet schon. Es ist nämlich

Digitized by Google

$$\frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{a_0},$$

$$\frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a_1},$$

$$\frac{g_2}{g'_2} = \frac{g_0 + g_1 a_1}{g'_0 + g'_1 a_2},$$

$$\frac{g_3}{g'_3} = \frac{g_1 + g_2 a_2}{g'_1 + g'_2 a_3},$$

$$\frac{g_4}{g'_4} = \frac{g_2 + g_3 a_3}{g'_2 + g'_3 a_4},$$

$$\frac{g_5}{g'_5} = \frac{g_3 + g_4 a_4}{g'_3 + g'_4 a_5},$$

u. s. w.

Dieses Gesetz kann leicht auf folgende Art allgemein bewiesen werden. Weil überhaupt

$$\frac{g_k}{g'_k} = \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

und

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} = \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

ist, so wird offenbar

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} \text{ aus } \frac{g_k}{g'_k}$$

erhalten, wenn man in dem letztern Bruche $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für $a_0$ setzt, und alle übrigen Indices von $a$ um eine Einheit erhöhet. Also wird offenbar $g_{k+1}$ aus $g_k$ und $g'_{k+1}$ aus $g'_k$ erhalten, wenn man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für $a_0$ setzt, alle übrigen Indices von $a$ um eine Einheit erhöhet, und die dadurch sich ergebenden Grössen dann mit $a_0$ multiplicirt. Sei nun

$$\frac{g_k}{g'_k} = \frac{g_{k-2} + g_{k-1} a_{k-1}}{g'_{k-2} + g'_{k-1} a_k}.$$

Um $\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}}$ zu erhalten, muss man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für $a_0$ setzen, alle übrigen Indices von $a$ um eine Einheit erhöhen, und im Zähler und Nenner mit $a_0$ multipliciren, wodurch jede der Grössen $g_{k-2}$, $g_{k-1}$ und $g'_{k-2}$, $g'_{k-1}$ mit $a_0$ multiplicirt wird. Bei der Anwendung dieses Verfahrens gehen also die Grössen $a_{k-1}$, $a_k$ respective in $a_k$, $a_{k+1}$, und nach dem Obigen gehen offenbar $g_{k-2}$, $g_{k-1}$ re-

Digitized by Google

spective in $g_{k-1}$, $g_k$, so wie $g'_{k-2}$, $g'_{k-1}$ respective in $g'_{k-1}$, $g'_k$ über. Also ist offenbar

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} = \frac{g_{k-1} + g_k a_k}{g'_{k-1} + g'_k a_{k+1}},$$

und das bemerkte Gesetz ist nach einer bekannten Schlussweise folglich allgemein.

Es ist also

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1, & g'_0 &= a_0;\\
g_1 &= a_0, & g'_1 &= 1 + a_0 a_1;\\
g_2 &= g_0 + g_1 a_1, & g'_2 &= g'_0 + g'_1 a_2;\\
g_3 &= g_1 + g_2 a_2, & g'_3 &= g'_1 + g'_2 a_3;\\
g_4 &= g_2 + g_3 a_3, & g'_4 &= g'_2 + g'_3 a_4;\\
&\text{u. s. w.} & &\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Zähler und Nenner mit den oben gefundenen Zählern und Nennern der Partialbrüche des ersten Kettenbruchs, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1,\\
g_1 &= f'_0,\\
g_2 &= g_0 + g_1 a_1 = 1 + a_0 a_1 = f'_1,\\
g_3 &= g_1 + g_2 a_2 = f'_0 + f'_1 a_2 = f'_2,\\
g_4 &= g_2 + g_3 a_3 = f'_1 + f'_2 a_3 = f'_3,\\
g_5 &= g_3 + g_4 a_4 = f'_2 + f'_3 a_4 = f'_4,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
g'_0 &= f'_0,\\
g'_1 &= 1 + a_0 a_1 = f'_1,\\
g'_2 &= g'_0 + g'_1 a_2 = f'_0 + f'_1 a_2 = f'_2,\\
g'_3 &= g'_1 + g'_2 a_3 = f'_1 + f'_2 a_3 = f'_3,\\
g'_4 &= g'_2 + g'_3 a_4 = f'_2 + f'_3 a_4 = f'_4,\\
g'_5 &= g'_3 + g'_4 a_5 = f'_3 + f'_4 a_5 = f'_5,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hiernach hat man also auch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
g'_0 &= f'_0 = g_1,\\
g'_1 &= f'_1 = g_2,\\
g'_2 &= f'_2 = g_3,\\
g'_3 &= f'_3 = g_4,\\
g'_4 &= f'_4 = g_5,\\
g'_5 &= f'_5 = g_6,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Ueberhaupt wollen wir jetzt

$$p_i = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_i} + \frac{1}{q_i}$$

setzen.

Also ist zuerst

$$p_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{f_0}{f'_0} = \frac{1}{a_0}, \quad \frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{a_0};$$

also

$$p_0 - \frac{f_0}{f'_0} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0} - \frac{1}{a_0} = -\frac{1}{a_0(1 + a_0 q_0)},$$

$$q_0 + \frac{g_0}{g'_0} = q_0 + \frac{1}{a_0} = \frac{1 + a_0 q_0}{a_0};$$

und folglich

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})(q_0 + \frac{g_0}{g'_0}) = -(\frac{1}{a_0})^2.$$

Ferner ist

$$p_1 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_0 + \frac{q_1}{1 + a_1 q_1}}$$

d. i.

$$p_1 = \frac{1 + a_1 q_1}{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{a_1}{1 + a_0 a_1}, \quad \frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a};$$

und folglich, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$p_1 - \frac{f_1}{f'_1} = \frac{1}{(1 + a_0 a_1)\,[a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1]},$$

$$q_1 + \frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}{1 + a_0 a_1}.$$

Daher ist

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})(q_1 + \frac{g_1}{g'_1}) = (\frac{1}{1 + a_0 a_1})^2.$$

Man sieht also, dass die Producte

Digitized by Google

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})\ (q_0 + \frac{g_0}{g'_0}),$$

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})\ (q_1 + \frac{g_1}{g'_1})$$

respective von $p_0$, $q_0$ und $p_1$, $q_1$ ganz unabhängig sind.

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu prüfen, wollen wir jetzt

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})\ (q_0 + \frac{g_0}{g'_0}) = L_0,$$

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})\ (q_1 + \frac{g_1}{g'_1}) = L_1,$$

$$(p_2 - \frac{f_2}{f'_2})\ (q_2 + \frac{g_2}{g'_2}) = L_2,$$

u. s. w.

$$(p_{k-1} - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (q_{k-1} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1}$$

setzen, und wollen annehmen, dass die Grössen

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ L_3, \ldots L_{k-1}$$

respective von

$$p_0,\ q_0;\ p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3; \ldots p_{k-1},\ q_{k-1}$$

ganz unabhängig sind.

Weil nun

$$p_{k-1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{q_{k-1}}$$

und

$$p_k = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{q_k}$$

ist, so ist wegen der Gleichung

$$(p_{k-1} - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (q_{k-1} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1},$$

wo $L_{k-1}$ von $p_{k-1}$ und $q_{k-1}$ ganz unabhängig ist, deren Richtigkeit vorausgesetzt worden ist, offenbar

$$(p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (a_k + \frac{1}{q_k} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1}.$$

Weil aber

Digitized by Google

$$\frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}} = \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

ist, so ist

$$a_k + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}} = a_k + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

und folglich, weil

$$\frac{g_k}{g'_k} = \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

ist,

$$a_k + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}} = \frac{g'_k}{g_k}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$(p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\,(\frac{1}{q_k} + \frac{g'_k}{g_k}) = L_{k-1},$$

d. i.

$$\frac{(p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\,(q_k + \frac{g_k}{g'_k})}{q_k \frac{g_k}{g'_k}} = L_{k-1}.$$

Nun ist aber nach den aus dem Obigen bekannten Relationen

$$p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}} = \frac{f_{k-1} + f_k q_k}{f'_{k-1} + f'_k q_k} - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}$$

$$= -\frac{(f_{k-1} f'_k - f_k f'_{k-1}) q_k}{f'_{k-1}(f'_{k-1} + f'_k q_k)},$$

$$p_k - \frac{f_k}{f'_k} = \frac{f_{k-1} + f_k q_k}{f'_{k-1} + f'_k q_k} - \frac{f_k}{f'_k}$$

$$= \frac{f_{k-1} f'_k - f_k f'_{k-1}}{f'_k(f'_{k-1} + f'_k q_k)},$$

und folglich offenbar

$$\frac{p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}}{q_k} = -\frac{f'_k}{f'_{k-1}}\,(p_k - \frac{f_k}{f'_k}).$$

Führt man dies in die oben gefundene Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{(p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k})}{q_k \frac{g_k}{g'_k}} = L_{k-1}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$-\frac{f'_k g'_k}{f'_{k-1} g_k}\ (p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = L_{k-1},$$

also

$$(p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = -\frac{f'_{k-1} g_k}{f'_k g'_k}\ L_{k-1},$$

woraus man sieht, dass

$$(p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k})$$

von $p_k$, $q_k$ ganz unabhängig, und nach einer bekannten Schlussweise das oben bemerkte Gesetz also ganz allgemein gültig, d. h. das Product

$$(p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k})$$

immer von $p_k$ und $q_k$ ganz unabhängig ist.

Setzen wir, analog mit der oben eingeführten Bezeichnung,

$$(p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = L_k,$$

so erhalten wir nach dem Vorhergehenden die Relation:

$$77.\quad L_k = -\frac{f'_{k-1} g_k}{f'_k g'_k}\ L_{k-1}.$$

Hiernach und nach dem Obigen ist

$$L_0 = -(\frac{1}{a_0})^2 = -\frac{g_0}{f'_0 g'_0},$$

$$L_1 = -\frac{f'_0 g_1}{f'_1 g'_1}\ L_0 = \frac{g_0}{f'_0 g'_0} \cdot \frac{f'_0 g_1}{f'_1 g'_1},$$

$$L_2 = -\frac{f'_1 g_2}{f'_2 g'_2}\ L_1 = -\frac{g_0}{f'_0 g'_0} \cdot \frac{f'_0 g_1}{f'_1 g'_1} \cdot \frac{f'_1 g_2}{f'_2 g'_2},$$

$$L_3 = -\frac{f'_2 g_3}{f'_3 g'_3}\ L_2 = \frac{g_0}{f'_0 g'_0} \cdot \frac{f'_0 g_1}{f'_1 g'_1} \cdot \frac{f'_1 g_2}{f'_2 g'_2} \cdot \frac{f'_2 g_3}{f'_3 g'_3},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also allgemein

$$L_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{g_0}{f'_0 g'_0} \cdot \frac{f'_0 g_1}{f'_1 g'_1} \cdot \frac{f'_1 g_2}{f'_2 g'_2} \cdots \frac{f'_{k-2} g_{k-1}}{f'_{k-1} g'_{k-1}} \cdot \frac{f'_{k-1} g_k}{f'_k g'_k},$$

d. i.

$$78.\quad L_k = \frac{(-1)^{k-1}}{f'_k} \cdot \frac{g_0 g_1 g_2 g_3 \cdots g_{k-1} g_k}{g'_0 g'_1 g'_2 g'_3 \cdots g'_{k-1} g'_k}.$$

Digitized by Google

Nach dem Obigen ist aber

$$g'_0 = g_1,$$
$$g'_1 = g_2,$$
$$g'_2 = g_3,$$
u. s. w.
$$g'_{k-1} = g_k$$

und $g'_k = f''_k$. Also ist nach 78.

$$L_k = \frac{(-1)^{k-1}}{f'_k} \cdot \frac{g_0}{f''_k} = \frac{(-1)^{k-1}}{g'_k} \cdot \frac{g_0}{g'_k},$$

und folglich, weil nach dem Obigen $g_0 = 1$, $g'_k = g_{k+1}$ ist,

$$79. \quad L_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(f'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g_{k+1})^2}.$$

Wir haben daher die folgenden merkwürdigen Gleichungen:

$$80. \quad (p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = \frac{(-1)^{k-1}}{(f'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g_{k+1})^2},$$

oder

$$81. \quad (-1)^{k-1}\ (p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = (\frac{1}{f'_k})^2 = (\frac{1}{g'_k})^2 = (\frac{1}{g_{k+1}})^2,$$

von denen wir nachher eine wichtige Anwendung auf die Brechung in einem Systeme von Linsengläsern machen werden.

## §. 11.

Die erste der beiden Gleichungen 59. kann auf folgende Art dargestellt werden:

$$\frac{R_1}{p_1} = \frac{(n-1)R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}\ \{(n-1)D \pm nR_1\}}{R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}D}$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$\frac{R_1}{p_1} = n - 1 \pm \frac{n\{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}R_1}{R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}D}$$

$$= n - 1 \pm \frac{nR_1}{D + \frac{R}{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})}}$$

$$= n - 1 \pm \frac{nR_1}{D + \frac{nR}{n - 1 - \frac{R}{p}}}$$

Digitized by Google

$$= n - 1 \pm \frac{R_1}{\frac{D}{n} + \frac{R}{n - 1 - \frac{R}{p}}}$$

$$= n - 1 \pm \frac{R_1}{\frac{D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} - \frac{1}{p}}}$$

also

$$\frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{R_1} \pm \frac{1}{\frac{D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} - \frac{1}{p}}}$$

oder

$$82. \quad p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} \pm \frac{1}{\frac{D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} - \frac{1}{p}}}}$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem gleichnamige oder ungleichnamige Seiten der beiden im Obigen betrachteten Kreisbogen gegen einander gekehrt sind. Aber eben dieses doppelte Zeichen, welches bei der Betrachtung bloss zweier Kreisbogen oder eines Linsenglases uns keine grosse Unbequemlichkeit verursachte, vielmehr, wie es uns scheint, den zwischen den sogenannten doppelt-concaven und doppelt-convexen Gläsern und den sogenannten Menisken Statt findenden Unterschied recht deutlich herausstellte, weshalb auch vorzüglich bei einem Linsenglase die vorhergehende Betrachtungsweise von uns angewandt worden ist, führt bei der Betrachtung eines Systems von Linsengläsern grosse Unbequemlichkeiten herbei, und wir müssen uns daher jetzt von diesem doppelten Zeichen unabhängig zu machen suchen, was auf folgende Art geschehen kann.

Im Vorhergehenden wurden die Halbmesser $R$ und $R_1$ immer als positiv betrachtet, was auch auf den ersten Anblick allerdings das Natürlichste zu sein scheint; die sogenannte Dicke des Glases $D$ wurde dagegen als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der erste Kreisbogen dem zweiten seine convexe oder seine concave Seite zukehrt; die Grösse $p$ ist positiv oder negativ, jenachdem die ihr entsprechende Linie auf der convexen oder concaven Seite des ersten Kreisbogens liegt, und eben so ist die Grösse $p_1$ positiv oder negativ, jenachdem die ihr entsprechende Linie auf der convexen oder concaven Seite des zweiten Kreisbogens liegt.

Von jetzt an wollen wir die Dicke des Glases immer als positiv betrachten, und unter dieser Voraussetzung durch $D$ bezeichnen; die Halbmesser der beiden Gränzflächen des Glases wollen wir dagegen als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie von den Durchschnittspunkten der entsprechenden Gränzflächen mit der Axe an nach der innern oder äussern Seite des Glases hin

Digitized by Google

liegen, und wollen dieselben unter dieser Voraussetzung durch $R$ und $R_1$ bezeichnen; auf ähnliche Art sollen die Abscissen $p$ und $p_1$ positiv oder negativ sein, jenachdem die ihnen entsprechenden Linien von den Durchschnittspunkten der ersten und zweiten Gränzfläche des Glases mit der Axe an nach der innern oder äussern Seite des Glases hin liegen. Die Symbole $q$ und $q_1$ behalten auch jetzt ganz die ihnen oben beigelegte Bedeutung.

Dies vorausgesetzt, muss man nun, wenn die concaven Seiten der beiden Gränzflächen einander zugekehrt sind, in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$-D,\ R,\ R_1,\ -p,\ -p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in der man jetzt das obere Zeichen nehmen muss, folgende Gestalt erhält:

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{\frac{-D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}}}.$$

Wenn die convexen Seiten der beiden Gränzflächen einander zugekehrt sind, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$D,\ -R,\ -R_1,\ p,\ p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in der jetzt wieder das obere Zeichen genommen werden muss, die folgende Gestalt erhält:

$$p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{-R_1} + \frac{1}{\frac{D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{-R} - \frac{1}{p}}}}.$$

Mittelst einer einfachen Betrachtung überzeugt man sich aber sogleich, dass diese Gleichung immer auf die Form

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{\frac{-D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}}},$$

welche von der Form, auf welche wir im ersten Falle geführt wurden, nicht verschieden ist, gebracht werden kann.

Digitized by Google

Wenn die concave Seite der ersten Gränzfläche der convexen Seite der zweiten Gränzfläche zugekehrt ist, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$-D,\ R,\ -R_1,\ -p,\ p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in welcher jetzt das untere Zeichen zu nehmen ist, die folgende Gestalt erhält:

$$p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{-R_1} - \frac{1}{\frac{-D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}},$$

woraus sich aber mittelst einer ganz einfachen Betrachtung wieder

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{\frac{-D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}}$$

ergiebt.

Wenn endlich die convexe Seite der ersten Gränzfläche der concaven Seite der zweiten Gränzfläche zugekehrt ist, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$D,\ -R,\ R_1,\ p,\ -p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in welcher jetzt das untere Zeichen zu nehmen ist, die folgende Gestalt erhält:

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} - \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{-R} - \frac{1}{p}}},$$

woraus sich aber mittelst einer ganz einfachen Betrachtung wieder

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{\frac{-D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}}$$

ergiebt.

Daher ist unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Allgemeinheit

Digitized by Google

83. $$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}.$$

in welcher Gleichung also nun kein doppeltes Zeichen mehr vorkommt, was für das Folgende der Allgemeinheit und Einfachheit der Darstellung wegen von grosser Wichtigkeit ist.

Mittelst leichter Rechnung erhält man aus 83. die folgende ebenfalls ganz allgemein gültige Gleichung:

84. $$-p = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{p_1}}}},$$

wobei man sogleich übersehen wird, dass dieser Kettenbruch gewissermassen durch Umkehrung des vorhergehenden entsteht.

## §. 12.

Wenn zwei Kreisbogen ihre Axe in den Punkten $A$ und $A_1$ schneiden, die immer als positiv betrachtete Entfernung der beiden Punkte $A$ und $A_1$ von einander durch $D$ bezeichnet wird, und wir die, jenachdem sie von den Punkten $A$ und $A_1$ aus nach dem innern Raume zwischen den beiden in Rede stehenden Kreisbogen oder nach dem äussern Raume hin liegen, als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen eines Punktes in der Axe von den beiden Punkten $A$ und $A_1$ respective durch $E$ und $E_1$ bezeichnen; so ist in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = D,$$

wovon man sich durch eine ganz einfache Betrachtung auf der Stelle überzeugt.

## §. 13.

Wir wollen uns jetzt ein System von $i+1$ Gläsern denken, und wollen annehmen, dass die Mittelpunkte der Gränzflächen aller dieser Gläser in einer und derselben geraden Linie liegen, welche die Axe des Systems genannt werden kann. Die Halbmesser der Gränzflächen der einzelnen Gläser seien nach der Reihe

$$R,\ R_1;\ R^{(1)},\ R_1{}^{(1)};\ R^{(2)},\ R_1{}^{(2)};\ \ldots;\ R^{(i)},\ R_1{}^{(i)};$$

so dass

$$R,\ R^{(1)},\ R^{(2)},\ R^{(3)},\ \ldots\ R^{(i)}$$

die Halbmesser der vordern Gränzflächen, dagegen

$$R_1,\ R_1{}^{(1)},\ R_1{}^{(2)},\ R_1{}^{(3)},\ \ldots\ R_1{}^{(i)}$$

die Halbmesser der hintern Gränzflächen sind, wobei man nicht zu

Digitized by Google

übersehen hat, dass diese Halbmesser nach den in §. 11. gegebenen Bestimmungen positiv oder negativ genommen werden. Die immer als positiv betrachteten Dicken der Gläser nach der Reihe seien

$$D,\ D^{(1)},\ D^{(2)},\ D^{(3)},\ \ldots\ D^{(i)}$$

und die Brechungsverhältnisse für die Glasarten, aus denen die Gläser bestehen, seien

$$n : 1,\ n^{(1)} : 1,\ n^{(2)} : 1,\ n^{(3)} : 1,\ \ldots,\ n^{(i)} : 1.$$

Die Coordinaten der Vereinigungspunkte der Strahlen seien für die einzelnen Gläser nach der Reihe

$$\begin{gathered} p,\quad q;\ p_1,\quad q_1 \\ p^{(1)},\ q^{(1)};\ p_1^{(1)},\ q_1^{(1)} \\ p^{(2)},\ q^{(2)};\ p_1^{(2)},\ q_1^{(2)} \\ p^{(3)},\ q^{(3)};\ p_1^{(3)},\ q_1^{(3)} \\ \text{u. s. w.} \\ p^{(i)},\ q^{(i)};\ p_1^{(i)},\ q_1^{(i)}. \end{gathered}$$

Die sämmtlich als positiv betrachteten Entfernungen der Gläser von einander, welche von der hintern Fläche eines jeden Glases bis zu der vordern Fläche des nächst folgenden Glases genommen werden, seien nach der Reihe

$$E,\ E^{(1)},\ E^{(2)},\ E^{(3)},\ \ldots\ E^{(i-1)}.$$

Dies vorausgesetzt, hat man nun nach 83. offenbar die folgenden Gleichungen:

$$-p_1 = \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{\frac{-D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{p}}},$$

$$-p_1^{(1)} = \frac{1}{\frac{n^{(1)}-1}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{\frac{-D^{(1)}}{n^{(1)}}} + \frac{1}{\frac{n^{(1)}-1}{R^{(1)}} + \frac{1}{p^{(1)}}}},$$

$$-p_1^{(2)} = \frac{1}{\frac{n^{(2)}-1}{R_1^{(2)}} + \frac{1}{\frac{-D^{(2)}}{n^{(2)}}} + \frac{1}{\frac{n^{(2)}-1}{R^{(2)}} + \frac{1}{p^{(2)}}}},$$

u. s. w.



Digitized by Google

$$-p_1^{(i)} = \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R_1^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i)}}{n^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}} + \cfrac{1}{p^{(i)}}}}};$$

und nach §. 12. hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$-p_1 - p^{(1)} = E;$$
$$-p_1^{(1)} - p^{(2)} = E^{(1)},$$
$$-p_1^{(2)} - p^{(3)} = E^{(2)},$$
$$-p_1^{(3)} - p^{(4)} = E^{(3)},$$

u. s. w.

$$-p_1^{(i-1)} - p^{(i)} = E^{(i-1)}$$

oder

$$p^{(1)} = -E - p_1,$$
$$p^{(2)} = -E^{(1)} - p_1^{(1)},$$
$$p^{(3)} = -E^{(2)} - p_1^{(2)},$$
$$p^{(4)} = -E^{(3)} - p_1^{(3)}.$$

u. s. w.

$$p^{(i)} = -E^{(i-1)} - p_1^{(i-1)}.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der obigen Kettenbrüche lässt sich offenbar die Grösse $-p_1^{(i)}$ ohne alle Schwierigkeit ganz allgemein mit Hülfe eines Kettenbruchs, dessen Fortschreitungsgesetz sehr leicht zu übersehen ist, durch die Grösse $p$ ausdrücken. Es ist nämlich offenbar in völliger Allgemeinheit, wie sogleich in die Augen fallen wird,

Digitized by Google

85. $$-p_{1,(i)} = \frac{1}{n^{(i)}-1} + \frac{1}{R_{1,(i)}} + \frac{1}{n^{(i)}} + \frac{1}{-D^{(i)}} + \frac{1}{n^{(i)}-1} + \frac{1}{R^{(i)}} + \frac{1}{-E^{(i-1)}} + \frac{1}{n^{(i-1)}-1} + \frac{1}{R_{1,(i-1)}} + \frac{1}{-D^{(i-1)}} + \frac{1}{n^{(i-1)}} + \frac{1}{n^{(i-1)}-1} + \frac{1}{R^{(i-1)}} + \frac{1}{-E^{(i-2)}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{-E} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{-D} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{p}.$$



Digitized by Google

Auf ganz ähnliche Art ist

86. $$-\nu = \frac{1}{\frac{n-1}{R} + \frac{1}{-D} + \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{-E} + \frac{1}{\frac{n^{(1)}-1}{R^{(1)}} + \frac{1}{-D^{(1)}} + \frac{1}{\frac{n^{(1)}-1}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{-E^{(1)}} + \ddots + \frac{1}{-E^{(\sigma-1)}} + \frac{1}{\frac{n^{(\sigma)}-1}{R^{(\sigma)}} + \frac{1}{-D^{(\sigma)}} + \frac{1}{\frac{n^{(\sigma)}-1}{R_1^{(\sigma)}} + \frac{1}{p_1^{(\sigma)}}}}}}}}}}}$$

Bezeichnet man den Werth, welchen $p_1^{(i)}$ erhält, wenn $p$ unendlich wird, durch $f_1^{(i)}$, so ist nach 85.

87. $$-f_1^{(i)} = \frac{1}{n^{(i)}-1} + \frac{1}{R_1^{(i)}} + \frac{1}{n^{(i)}} + \frac{1}{D^{(i)}} + \frac{1}{R^{(i)}} + \frac{1}{n^{(i)}-1} + \frac{1}{E^{(i-1)}} + \frac{1}{R_1^{(i-1)}} + \frac{1}{n^{(i-1)}-1} + \frac{1}{D^{(i-1)}} + \frac{1}{R^{(i-1)}} + \frac{1}{n^{(i-1)}-1} + \frac{1}{E^{(i-2)}} + \cdots + \frac{1}{E} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{D} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{R}$$

Digitized by Google

und wenn man den Werth, welchen $p$ erhält, wenn $p_{,}^{(i)}$ unendlich wird, durch $f$ bezeichnet, so ist nach 86.

88.
$$-f=\frac{1}{\frac{n-1}{R}+\frac{1}{=D}+\frac{1}{\frac{n-1}{R_{,}}+\frac{1}{=E}+\frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}}+\frac{1}{=D^{(i)}}+\frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R_{,}^{(i)}}+\frac{1}{=E^{(i)}}+\cdots}}}}$$
$$+\frac{1}{=E^{(i-1)}}+\frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}}+\frac{1}{=D^{(i)}}+\frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R_{,}^{(i)}}}}.$$

Digitized by Google

## §. 14.

Die Kettenbrüche 87. und 88. bestehen offenbar aus $3(i+1)+i = 4i+3$ Gliedern. Bezeichnen wir nun den gemeinschaftlichen Nenner der den beiden in Rede stehenden Kettenbrüchen gleichen gemeinen Brüche, welche man durch successive Berechnung der Partialwerthe dieser beiden Kettenbrüche nach bekannten Regeln erhält, durch $N_i$; so ist nach dem in §. 10. bewiesenen, in der Gleichung 81. ausgesprochenen allgemeinen Satze von den Kettenbrüchen, wenn man denselben auf die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Kettenbrüche insbesondere und zunächst auf den Kettenbruch 86. anwendet, offenbar

$$(-1)^{4i+1}\{-p-(-f)\}\{p_1^{(i)}+(-f_1^{(i)})\}=(\tfrac{1}{N_i})^2,$$

und folglich, wie sogleich erhellet,

$$89.\quad (p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=(\tfrac{1}{N_i})^2.$$

Hieraus ergiebt sich also der sehr merkwürdige Satz, dass, was auch $p$ und $p_1^{(i)}$ sein mögen, das Product

$$(p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})$$

immer dem constanten Quadrate $(\frac{1}{N_i})^2$ gleich ist.

## §. 15.

Aus der in §. 11. angestellten Betrachtung erhellet, dass man in der Gleichung 68. statt der Symbole

$$R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

eins der vier folgenden Systeme setzen muss:

$$\begin{aligned} R,&\quad R_1,&-p,&\quad -p_1;\\ -R,&\quad -R_1,&p,&\quad p_1;\\ R,&\quad -R_1,&-p,&\quad p_1;\\ -R,&\quad R_1,&p,&\quad -p_1. \end{aligned}$$

Thut man dies aber, so ergiebt sich in jedem Falle die Gleichung

$$90.\quad \frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

welche also allgemein gültig ist.

Daher hat man jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

Digitized by Google

$$\frac{q^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \frac{1+(n^{(1)}-1)\frac{p^{(1)}}{R^{(1)}}}{1+(n^{(1)}-1)\frac{p_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}},$$

$$\frac{q^{(2)}}{q_1^{(2)}} = \frac{1+(n^{(2)}-1)\frac{p^{(2)}}{R^{(2)}}}{1+(n^{(2)}-1)\frac{p_1^{(2)}}{R_1^{(2)}}},$$

u. s. w.

$$\frac{q^{(i)}}{q_1^{(i)}} = \frac{1+(n^{(i)}-1)\frac{p^{(i)}}{R^{(i)}}}{1+(n^{(i)}-1)\frac{p_1^{(i)}}{R_1^{(i)}}}.$$

Weil nun aber offenbar

$$q_1 = q^{(1)},$$
$$q_1^{(1)} = q^{(2)},$$
$$q_1^{(2)} = q^{(3)},$$

u. s. w.

$$q_1^{(i-1)} = q^{(i)}$$

ist; so erhält man aus dem Obigen die folgende merkwürdige Gleichung:

$$91. \quad \frac{q}{q_1^{(i)}} = \frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}} \cdot \frac{1+(n^{(1)}-1)\frac{p^{(1)}}{R^{(1)}}}{1+(n^{(1)}-1)\frac{p_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}} \cdot \frac{1+(n^{(2)}-1)\frac{p^{(2)}}{R^{(2)}}}{1+(n^{(2)}-1)\frac{p_1^{(2)}}{R_1^{(2)}}} \cdots \cdots \frac{1+(n^{(i)}-1)\frac{p^{(i)}}{R^{(i)}}}{1+(n^{(i)}-1)\frac{p_1^{(i)}}{R_1^{(i)}}}.$$

Mittelst der in §. 13. entwickelten Formeln kann man, wenn $p$ als gegeben betrachtet wird, die Grössen

$$p_1,\ p^{(1)},\ p_1^{(1)},\ p^{(2)},\ p_1^{(2)}, \ldots p^{(i)},\ p_1^{(i)}$$

sämmtlich berechnen, und kann also mit Hülfe der vorhergehenden Gleichung auch das Verhältniss $\frac{q}{q_1^{(i)}}$ bestimmen. Dass auch $p_1^{(i)}$ als gegeben angenommen werden könnte, bedarf kaum noch einer besondern Bemerkung.

## §. 16.

Zu dem Systeme von $i+1$ Gläsern, welches wir vorher betrachtet haben, wollen wir jetzt noch ein $(i+2)$tes Glas hinzufügen, dessen auf ähnliche Art wie im Vorhergehenden genommene Entfernung von dem $(i+1)$sten Glase durch $E^{(i)}$ bezeichnet werden soll. In Bezug auf das $(i+2)$te Glas, wenn man dieses Glas für sich allein als ein System von Gläsern betrachtet, und in Be-

Digitized by Google

zug auf das ganze System der $i+2$ Gläser, sollen respective $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ und $\varphi$, $\varphi_1^{(i+1)}$ eine ganz ähnliche Bedeutung haben wie $f$, $f_1^{(i)}$ in Bezug auf das System der $i+1$ Gläser. Von dem strahlenden Punkte $A$, dessen Coordinaten in Bezug auf die vordere Fläche des ersten Glases $p$, $q$ sein mögen, entstehe nun durch das System der $i+1$ Gläser ein Bild $B$, dessen Coordinaten in Bezug auf die hintere Fläche des $(i+1)$sten Glases $p_1^{(i)}$, $q_1^{(i)}$ sein mögen, und von diesem Bilde $B$ entstehe durch das $(i+2)$te Glas ein neues Bild $C$, welches zugleich als das von dem Systeme der $i+2$ Gläser von dem Punkte $A$ gemachte Bild zu betrachten ist. Die Coordinaten von $B$ in Bezug auf die vordere Fläche des $(i+2)$ten Glases seien $p^{(i+1)}$, $q^{(i+1)}$, und die Coordinaten von $C$ in Bezug auf die hintere Fläche des $(i+2)$ten Glases seien $p_1^{(i+1)}$, $q_1^{(i+1)}$.

Dies vorausgesetzt ist nun nach §. 14., wenn $\mu^2$ und $\mu_1^2$ zwei constante Quadrate bezeichnen,

$$92. \quad (p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=\mu^2$$

und

$$93. \quad (p^{(i+1)}-\mathfrak{f})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=\mu_1^2.$$

Für $p=\varphi$ wird offenbar $p_1^{(i+1)}$ unendlich, und daher, wie leicht erhellen wird,

$$-p_1^{(i)}-\mathfrak{f}=E^{(i)},$$

also

$$p_1^{(i)}=-E^{(i)}-\mathfrak{f};$$

folglich nach 92.

$$94. \quad -(\varphi-f)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\mu^2.$$

Wenn man $p$ unendlich werden lässt, so wird offenbar

$$p_1^{(i+1)}=\varphi_1^{(i+1)},$$

und, wie sogleich erhellen wird,

$$-p^{(i+1)}-f_1^{(i)}=E^{(i)},$$

also

$$p^{(i+1)}=-E^{(i)}-f_1^{(i)};$$

folglich nach 93.

$$95. \quad -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})\,(\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=\mu_1^2.$$

Daher hat man nach 92. und 94., und nach 93. und 95., die beiden folgenden Gleichungen:

$$(p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=-(\varphi-f)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}),$$

$$(p^{(i+1)}-\mathfrak{f})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=-(\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}).$$

Schreibt man diese beiden Gleichungen als Proportionen, so erhält man:

$$p-f:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\varphi-f:p_1^{(i)}-f_1^{(i)},$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:p^{(i+1)}-\mathfrak{f};$$

und aus diesen beiden Proportionen ergiebt sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen:

Digitized by Google

$$p-f : -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}) = p-\varphi : -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+p_1^{(i)}),$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1 : -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}) = p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)} : -(E^{(i)}+f_1^{(i)}+p^{(i+1)}).$$

Weil nun aber offenbar

$$-p_1^{(i)} - p^{(i+1)} = E^{(i)},$$

also

$$E^{(i)}+p_1^{(i)} = -p^{(i+1)},\quad E^{(i)}+p^{(i+1)} = -p_1^{(i)}$$

ist, so werden die beiden obigen Proportionen

$$p-f : -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}) = p-\varphi : p^{(i+1)}-\mathfrak{f},$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1 : -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}) = p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)} : p_1^{(i)}-f_1^{(i)};$$

und führen nun ferner auf der Stelle zu der Gleichung

$$96.\quad \frac{(p-f)\,(p^{(i+1)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)} = \frac{p-\varphi}{p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)}}.$$

Von dieser Gleichung lässt sich die folgende wichtige Anwendung machen.

Nach der in §. 8. bewiesenen Gleichung 70. ist, wenn man sich jetzt nur immer an die in §. 11. gegebenen Bestimmungen hält, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit für ein Glas

$$97.\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1-f_1}.$$

Kommt nun noch ein zweites Glas hinzu, so ist hiernach für dieses Glas in völliger Allgemeinheit

$$\left(\frac{q^{(1)}}{q_1^{(1)}}\right)^2 = \frac{p^{(1)}-\mathfrak{f}}{p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1},$$

und folglich durch Multiplication, weil offenbar $q_1 = q^{(1)}$ ist,

$$\left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2 = \frac{(p-f)\,(p^{(1)}-\mathfrak{f})}{(p_1-f_1)\,(p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(1)}-\mathfrak{f})}{(p_1-f_1)\,(p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1)} = \frac{p-\varphi}{p_1^{(1)}-\varphi_1^{(1)}}.$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2 = \frac{p-\varphi}{p_1^{(1)}-\varphi_1^{(1)}},$$

d. h. es ist, wenn man jetzt für $\varphi$, $\varphi_1^{(1)}$ respective $f$, $f_1^{(1)}$ setzt, für zwei Gläser

$$98.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(1)}-f_1^{(1)}}.$$

Kommt nun noch ein drittes Glas hinzu, so ist nach 97. für dieses dritte Glas

$$\left(\frac{q^{(2)}}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{p^{(2)}-\mathfrak{f}}{p_1^{(2)}-\mathfrak{f}_1},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $q_1^{(1)} = q^{(2)}$ ist,

Digitized by Google

$$\left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{(p-f)\,(p^{(2)}-f)}{(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})\,(p_1^{(2)}-f_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(2)}-f)}{(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})\,(p_1^{(2)}-f_1)} = \frac{p-q}{p_1^{(2)}-q_1^{(2)}},$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{p-q}{p_1^{(2)}-q_1^{(2)}},$$

d. h. es ist, wenn man für $q$, $q_1^{(2)}$ respective $f$, $f_1^{(2)}$ setzt, für drei Gläser

$$99.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(2)}-f_1^{(2)}}.$$

Lässt man jetzt noch ein viertes Glas hinzutreten, so ist nach 97. für dieses vierte Glas

$$\left(\frac{q^{(3)}}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p^{(3)}-f}{p_1^{(3)}-f_1},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $q_1^{(2)} = q^{(3)}$ ist,

$$\left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{(p-f)\,(p^{(3)}-f)}{(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})\,(p_1^{(3)}-f_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(3)}-f)}{(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})\,(p_1^{(3)}-f_1)} = \frac{p-q}{p_1^{(3)}-q_1^{(3)}},$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p-q}{p_1^{(3)}-q_1^{(3)}},$$

d. h. es ist, wenn man für $q$, $q_1^{(3)}$ respective $f$, $f_1^{(3)}$ setzt, für vier Gläser

$$100.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(3)}-f_1^{(3)}}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und es ist daher in völliger Allgemeinheit für ein System von $i+1$ Gläsern

$$101.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(i)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(i)}-f_1^{(i)}},$$

in welcher Gleichung ebenfalls ein sehr wichtiges und merkwürdiges Theorem der Dioptrik ausgesprochen ist *).

*) In einer spätern Abhandlung werden wir das Obige theils noch etwas weiter ausführen, theils verschiedene Anwendungen der in diesem Aufsatze bewiesenen, grösstentheils von Möbius gefundenen, von Gauss, Bessel und Clausen erweiterten Sätze mittheilen. Die obige Darstellung derselben dürfen wir wohl als eine uns eigenthümliche in Anspruch nehmen.

Digitized by Google

# XVI.

## Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degré et Note relative à la construction de la chaînette.

Par

Mr. G. J. Verdam

Docteur ès sciences et Professeur de Mathématiques à l'Université de Leide.

---

### I.

### Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degré en un point donné.

Quand $f=\varphi(x, y)=0$ représente l'équation d'une courbe plane, l'équation d'une droite, touchante cette courbe en un point, dont les coordonnées orthogonales sont $x'$ et $y'$, sera, d'après la théorie générale du contact des lignes, donnée par

$$y_1 - y' = \frac{dy}{dx}(x_1 - x); \quad (1)$$

ou plutôt par

$$(y_1 - y')\left(\frac{df}{dy}\right) + (x_1 - x')\left(\frac{df}{dx}\right) = 0. \quad (2)$$

Dans ces équations $x_1$ et $y_1$ designent les coordonnées courantes de la tangente, et les coefficients différentiels se rapportent au point de contact; c'est à dire, qu'après les avoir déterminé par l'équation de la courbe donnée, on doit substituer aux coordonnées générales $x$, $y$, celles $x'$ et $y'$ du point de contact donné.

De même, pour trouver l'équation d'un plan, touchant une surface donnée en un point donné de cette surface, représentée par la fontion générale $F=\varphi(x, y, z)=0$, on aura l'équation

$$z_1 - z' = \frac{dz}{dx}(x_1 - x') + \frac{dz}{dy}(y_1 - y'), \quad (3)$$

ou plutôt

$$(x_1 - x')\left(\frac{dF}{dx}\right) + (y_1 - y')\left(\frac{dF}{dy}\right) + (z_1 - z')\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0, \quad (4)$$

Digitized by Google

$x_1$, $y_1$, $z_1$ étant les coordonnées courantes du plan tangent, et $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées particulières du point de contact, et ces dernières sont aussi les quantités que l'on doit mettre, après la différentiation, à la place de $x$, $y$, $z$ dans les coëfficients différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dF}{dx}$ etc.

Ces équations sont générales. Quand on les applique aux courbes et aux surfaces du second degré, on trouvera, dans chaque cas particulier, l'équation de la tangente ou du plan tangent pour un point déterminé de cette courbe ou de cette surface, c'est à dire pour le point, dont les coordonnées (toujours rectangulaires) vérifient l'équation donnée de la courbe ou de la surface.

Cependant on peut se servir, pour les courbes et les surfaces du second degré, d'une règle générale, laquelle donne tout de suite l'équation demandée, sans que la differentiation de la proposée soit nécessaire. Voici cette règle, extrémement simple.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du point de contact donné, situé sur une surface du second degré donnée $F=\varphi(x, y, z)=0$. Changez partout $x^2$ en $\alpha x$, $y^2$ en $\beta y$, $z^2$ en $\gamma z$, $xy$ en $\frac{1}{2}\alpha y+\frac{1}{2}\beta x$, $xz$ en $\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1}{2}\gamma x$, $yz$ en $\frac{1}{2}\beta z+\frac{1}{2}\gamma y$; $x$ en $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\alpha$, $y$ en $\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\beta$, $z$ en $\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\gamma$. Développez l'équation, résultante de cette substitution, et joignez y, si cela est besoin, l'équation de condition $F(\alpha, \beta, \gamma)=0$, à la quelle doivent satisfaire les coordonnées $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Vous aurez ainsi l'équation du plan tangent démandé. Comme la même règle s'applique aux fonctions du second degré à deux variables, on obtiendra de même l'équation d'une ligne droite, tangente une courbe donnée en un point donné.

Quelques exemples éclairciseront cet énoncé.

1. Soit l'équation d'un cercle

$$x^2+y^2=r^2.$$

Les coordonnées d'un point déterminé de la circonférence étant $x'=\alpha$ et $y'=\beta$, on aura d'abord la condition

$$\alpha^2+\beta^2=r^2.$$

Puis $\frac{df}{dx}=\frac{d(x^2+y^2-r^2)}{dx}=2x$, $\frac{df}{dy}=2y$; c'est à dire, relativement au point $\alpha$, $\beta$ donné, $\frac{df}{dx}=2\alpha$, $\frac{df}{dy}=2\beta$. Ainsi l'équation (2) deviendra, après avoir divisé par 2, et en désignant, pour plus de simplicité par $x$ et $y$, sans accents, les coordonnées courantes de la droite tangente

$$(y-\beta)\beta+(x-\alpha)\alpha=0,$$

ou bien

$$\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2,$$

et ayant égard à l'équation de condition, on a finalement pour l'équation de la tangente

$$\alpha x+\beta y=r^2.$$

Maintenant, en suivant la règle énoncée, on doit remplacer $x^2$ par

Digitized by Google

$ax$ et $y^2$ par $\beta y$, et l'on aura, sans aucun calcul préliminaire, l'équation de la tangente

$$ax + \beta y = r^2.$$

---

2. Soit l'équation plus générale d'un cercle

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Les équations (1) ou (2) conduiront, pour le point de contact $x' = a$ et $y' = \beta$, à l'équation de la tangente

$$(\beta - b)\ (y-\beta) + (\alpha - a)\ (x-\alpha) = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$y - \beta = \frac{a-\alpha}{\beta - b}\ (x-\alpha).$$

Pour appliquer la règle énoncée plus haut, il faut développer préalablement l'équation donnée, puisque les substitutions dans les termes du second degré diffèrent de celles dans les termes du premier ordre. Ainsi la proposée doit être écrite ainsi

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2.$$

Remplaçant $x^2$, $y^2$ par $ax$, $\beta y$; puis $x$ et $y$ dans les termes $-2ax$ et $-2by$ par $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\beta$, on trouve

$$ax - 2a(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}a) + a^2 + \beta y - 2b(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\beta) + b^2 = r^2,$$

ou

$$(\alpha - a)x + (\beta - b)y - a\alpha + a^2 - \beta b + b^2 = r^2.$$

Cette équation pourra être considérée comme l'équation cherchée de la tangente. Mais pour la rendre identique avec l'équation ordinaire, il faut en éliminer $r^2$ au moyen de l'équation de condition

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = r^2.$$

Or, écrivant celle ci sous la forme

$$\alpha^2 - a\alpha + \beta^2 - \beta b - a\alpha + a^2 - \beta b + b^2 = r^2.$$

et la retranchant de la précédente, on obtient

$$\begin{aligned}(\alpha - a)x - \alpha^2 + a\alpha + (\beta - b)y - \beta^2 + \beta b \\ = (\alpha - a)x - \alpha(\alpha - a) + (\beta - b)y - \beta(\beta - b) \\ = (\alpha - a)\ (x - \alpha) + (\beta - b)\ (y - \beta) = 0\end{aligned}$$

comme on l'a trouvé plus haut.

---

3. Les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$y^2 = px,$$

Digitized by Google

étant traitées suivant la même règle, donneront de suite les équations des tangentes au point $x' = \alpha$, $y' = \beta$,

$$b^2\alpha x + a^2\beta y = a^2b^2,$$
$$b^2\alpha x - a^2\beta y = a^2b^2,$$
$$\beta y = \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{2}p\alpha, \text{ ou } 2\beta y = px + p\alpha,$$

que l'on obtient, par un calcul moins direct, suivant les équations (1), (2).

L'équation de l'hyperbole, rapportée aux asymptotes, étant

$$xy = c^2,$$

on aura, pour l'équation de la tangente au point $x' = \alpha$, $y' = \beta$.

$$(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\alpha)\ (\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\beta) = c^2.$$
$$(x + \alpha)\ (y + \beta) = 4c^2,$$
$$xy + \alpha\beta + \beta x + \alpha y = 4c^2;$$

mais $xy = c^2$ et $\alpha\beta = c^2$, donc

$$\beta x + \alpha y = 2c^2;$$

comme par l'équation (1) ou (2). Changeant cependant, comme la règle l'indique, $xy$ en $\tfrac{1}{2}\alpha y + \tfrac{1}{2}\beta x$, on a de suite l'équation trouvée.

---

4. Posant encore l'équation générale des lignes du second ordre

$$x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0,$$

celle de la droite, tangente au point $x' = \alpha$, $y' = \beta$, sera

$$\alpha x + a(\tfrac{1}{2}\alpha y + \tfrac{1}{2}\beta x) + b\beta y + c(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\alpha) + d(\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}y) + e = 0,$$

ou

$$(2\alpha + a\beta + c)x + (2b\beta + a\alpha + d)y + \alpha c + \beta d + 2e = 0.$$

C'est l'équation connue de la tangente des courbes du second degré. En retranchant l'équation de condition

$$2\alpha^2 + 2a\alpha\beta + 2b\beta^2 + 2\alpha c + 2\beta d + 2e = 0,$$

on obtient facilement

$$(2\alpha + a\beta + c)\ (x - \alpha) + (2b\beta + a\alpha + d)\ (y - \beta) = 0,$$

à la quelle on parvient au moyen des équations (1) ou (2).

---

5. Les équations des surfaces du second degré étant

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

Digitized by Google

$$pz^2 + p'y^2 - pp'x = 0,$$
$$pz^2 - p'y^2 \mp pp'x = 0,$$

celles des plans, tangents ces surfaces au point $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z' = \gamma$, seront

$$\alpha b^2c^2x + \beta a^2c^2y + \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0,$$
$$\alpha b^2c^2x + \beta a^2c^2y - \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0,$$
$$\alpha b^2c^2x - \beta a^2c^2y - \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0,$$
$$2p\gamma z + 2p'\beta y - pp'x - pp'\alpha = 0,$$
$$2p\gamma z - 2p'\beta y \mp pp'x \mp pp'\alpha = 0;$$

les quelles ne diffèrent de celles, données par l'équation (3) ou (4), quand on élimine les termes constants au moyen des équations de condition.

L'équation générale des surfaces du second degré

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0$$

étant traitée de la même manière, donne

$$a\alpha x + a'\beta y + a''\gamma z + 2b(\tfrac{1}{2}\alpha y + \tfrac{1}{2}\beta x) + 2b'(\tfrac{1}{2}\gamma x + \tfrac{1}{2}\alpha z) + 2b''(\tfrac{1}{2}\gamma y + \tfrac{1}{2}\beta z) + 2c(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\alpha) + 2c'(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\beta) + 2c''(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\gamma) + d = 0,$$

ou, en développant,

$$(a\alpha + b\beta + b'\gamma + c)x + (a'\beta + b\alpha + b''\gamma + c')y + (a''\gamma + b'\alpha + b''\beta + c'')z + a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0,$$

comme on la donne dans les traités de géométrie analytique, et en éliminant $d$, au moyen de l'équation de condition, on l'obtient sous l'autre forme usitée, donnée par l'équation (3) ou (4).

---

Il y avoit plusieurs années que je m'étois servi de la règle exposée, avant que je connoissois l'ouvrage de Mr. Puissant „Recueil de diverses propositions de Géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique.

Dans le chapitre II. de la seconde section, et dans le chapitre VI. de la troisième section de cet ouvrage (édition de 1824) on trouve exposée une Règle de Mnémonique pour retrouver de suite l'équation d'une tangente et du plan tangent. Cette règle revient au fond à celle, qui est expliquée dans cette note, la quelle néanmoins pourroit paroître plus expéditive et plus complette. Quant à la démonstration, on peut la faire en suivant la marche, indiquée par Mr. Puissant; elle dérive aussi de l'application des équations différentielles (1), (2), (3), (4); enfin, pour les fonctions homogènes du second ordre, on pourroit se servir d'un théorème, mentionné dans le calcul différentiel de M. L'Abbé Moigno, 13 Leçon, art. 64.

---

Digitized by Google

## II.

### Note relative à la construction de la chainette.

Jean Bernoulli, à qui nous devons la première connoissance de l'équation et des propriétés principales de la chainette, donna aussi la construction de cette courbe transcendante ou mécanique. Jacques Bernouilli, Leibnitz et Huigens en ont donnés de même. Les constructions des Bernouillis et de Huigens sont moins simples, ni recommandables pour l'exécution. Le contraire est vrai à l'égard de l'élégante construction de Leibnitz, qui s'est servi, comme d'une courbe auxiliaire, de la logarithmique, ayant pour module le paramètre de la chainette; cette logarithmique étant construite, la demi somme de deux ordonnées, équidistantes, de part et d'autre, de l'ordonnée module, donnera deux ordonnées de la chainette, équidistantes de l'ordonnée paramètre de cette courbe. Pour faciliter l'exécution, on a proposé, il y a quelques années *), l'emploi de deux logarithmiques opposées, ayant le même axe d'abscisses horizontal, et passant par un point, dont la distance à cet axe est égale au paramètre donné de la chainette à construire, c'est à dire passant par le sommet de cette chainette, ou ayant la même ordonnée module; la bissection de toutes les parties des ordonnées, comprises entre ces deux logarithmiques, dirigées en sens contraire, donnera autant de points de la chainette.

La construction de Leibnitz est tirée immédiatement de l'équation exponentielle de la chainette. Il existe encore d'autres constructions, déduites de l'équation (sous forme logarithmique) de cette courbe; mais rien de plus simple ni de plus élégant que la construction de Leibnitz, modifiée comme il vient d'être expliqué.

Cependant quand il fallait construire la courbe sur une grande échelle, la construction préalable des logarithmiques pourroit devenir embarrassante. Toutes les chainettes étant des courbes semblables, on peut se servir, dans ce cas, d'une chainette déja construite sur une échelle plus petite. On trouve aussi dans plusieurs Traités de Mécanique pratique des tables, donnant, pour un paramètre, égal à 1 ou à 10, les valeurs numériques des ordonnées d'une chainette, pour des abscisses, croissantes en progression arithmétique. Au moyen d'une telle table on construit facilement, par ordonnées, toute chainette, dont on connoit le paramètre, ou de la quelle sont donnés le sommet et les pieds, soit le sommet et les deux points de suspension, qui se trouvent sur une même horizontale; puisque du rapport entre la distance de ces points et la hauteur de la courbe, on déduit le rapport des paramètres de la chainette à construire et de celle, pour la quelle la table a été calculée; donc la multiplication des nombres de la table par ce rapport, donnera les valeurs numériques des coordonnées de la chainette demandeé.

*) Originairement dans le Journal de Mr. Crelle, mais on retrouve l'indication de cette construction dans le Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, von L. J. Magnus, S. 294, Aufgabe 102.



Digitized by Google

Si l'on veut construire une chainette par coordonnées sans faire usage d'une table calculée, on pourrait encore suivre une autre marche, pas connue, à ce que je sache, tracée d'après une propriété des équations exponentielles, qui ont la même forme que celle de la chainette, et dont l'application se retrouve dans plusieurs théories utiles (par exemple dans la théorie de la chaleur, comme on le peut voir, entre autres, dans le Traité de Physique de Mr. Lamé, Tome I., art. 246 et suiv, edition de 1840).

Soit la fonction exponentielle

$$y = ae^{px} + be^{-px},$$

dans la quelle $e$ designe la base du système de logarithmes népériens; $a$, $b$, $p$ des constantes; si l'on donne à la variable $x$ trois valeurs quelconques, mais différant de la même quantité $i$ ($x = x'$, $x = x' + i$, $x = x' + 2i$), que l'on fasse la substitution de ces valeurs, les trois valeurs resultantes de la fonction, c'est à dire $y_1$, $y_2$, $y_3$, seront telles, que le rapport de la somme des valeurs extremes et de la valeur moyenne sera une quantité constante, indépendante des coefficients $a$ et $b$, et l'on aura partout

$$\frac{y_1 + y_2}{y_2} = e^{pi} + e^{-pi}.$$

D'après cette propriété, si $h$ est le paramètre d'une chainette, ayant ses pieds ou ses points de suspension dans une même horizontale $AB$, et si l'on prend pour ligne des abscisses une horizontale, tirée à une distance $CO = h$ dessous le sommet $C$ (voyez Tab. II. Fig. 4.), l'équation de la chainette, rapportée à cette ligne et à l'origine $O$, sera, comme l'on sait,

$$y = \frac{h}{2}\left\{e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right\};$$

donc si l'on prend les abscisses à des distances égales $i$, que l'on mène les ordonnées correspondantes, on aura, pour trois ordonnées consécutives $y_1$, $y_2$, $y_3$, le rapport constant

$$\frac{y_1 + y_2}{y_2} = e^{\frac{i}{h}} + e^{-\frac{i}{h}}.$$

Cela posé, puisque la position des points $A$, $B$, $C$ est donnée, on connoit la longueur des perpendiculaires $AD = BE = f$, $CO = h$, et $DO = OE = \frac{1}{2}AB = d$. Divisant $OD$ et $OE$ en deux parties égales, et menant les ordonnées $ab$, $a'b'$, la distance des trois ordonnées $AD$, $ab$, $OC$, sera égale à celle des ordonnées $ab$, $OC$, $a'b'$; et par l'égalite des ordonnées $ab$, $a'b'$, on aura, suivant la propriété enoncée

$$\frac{AD + OC}{ab} = \frac{ah + a'h'}{OC} = \frac{2ah}{OC}.$$

Nommant la flèche $CF$, ou la hauteur de la chainette, $= c$, $AD$ sera $= CF + OC = c + h$, et l'égalité exprimée deviendra

$$\frac{2h + c}{ab} = \frac{2ah}{h},$$

d'où

Digitized by Google

$$y_1 = ab = \tfrac{1}{2}\sqrt{2h(2h+c)} \quad \ldots\ldots (1)$$

On pourroit construire facilement ces valeurs égales des ordonnées moyennes $ab$, $a'b'$, mais en supposant les dimensions de la courbe plus grandes, que cela convient pour des constructions géométriques, on doit faire le calcul numérique de ces valeurs. Ce calcul fera donc connoître la longueur de deux ordonnées moyennes égales $y_1 = ab = a'b'$.

La bissection de $Oa$ et $Oa'$ donnera deux autres ordonnées moyennes $y_2 = cd = c'd'$, pour les quelles on aura

$$\frac{ab + OC}{cd} = \frac{2cd}{OC},$$

c'est à dire

$$\frac{y_1 + h}{y_2} = \frac{2y_2}{h},$$

et

$$y_2 = cd = c'd' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2h(y_1 + h)} \quad \ldots\ldots (2)$$

On peut à présent continuer cette marche, en divisant chaque fois la distance entre deux ordonnées trouvées, en deux parties égales, et menant la ligne de l'ordonnée moyenne, que l'on calculera ensuite; mais il est à remarquer, que le calcul des ordonnées suivantes $y_3$, $y_4$ etc. devient plus facile, que celui des deux premières, à cause qu'on ne devra plus faire à chaque fois l'extraction de racines. Car soit divisée la distance $aD$ ou $a'E$ en deux parties égales, et menée la perpendiculaire $ef$ ou $e'f'$, il est clair que les ordonnées $ef$ et $cd$ auront la même distance que les ordonnées $OC$ et $ab$ ou $cd$ et $c'd'$, ou $ob$ et $AD$; donc

$$\frac{2cd}{OC} = \frac{cd + ef}{ab},$$

ou

$$\frac{2y_2}{h} = \frac{y_2 + y_3}{y_1};$$

ce qui donne

$$y_3 = \frac{y_2}{h}(2y_1 - h). \quad (3)$$

On recommence à présent la même marche, en partant de l'ordonnée $OC$ du sommet; on divise $Oc$, $Oc'$ en deux parties égales, et, en menant les ordonnées moyennes $gh$, $g'h'$, on en calcule les longueurs, comme on a calculé, pour la première fois, la longueur des ordonnées $ab$, $a'b'$, et pour la seconde fois $cd$ et $c'd'$. Ce calcul nécessitera l'extraction d'une racine, ou le service d'une table de racines, mais pour les ordonnées suivantes, menées entre $cd$ et $ab$, entre $ab$ et $ef$ etc. etc. cette opération ne devra pas être faite; seulement au commencement du calcul de chaque série d'ordonnées moyennes, la valeur de la premiere ordonnée dépendra d'une équation du second degré à deux termes. Il est aisé de voir, que le calcul d'un assez grand nombre d'ordonnées exigera peu de temps, et que, sans recourir à une table calculée, les points de la chainette seront obtenus avec un degré d'exactitude, que les constructions géométriques ne sauroient donner.



Digitized by Google

Le cercle osculateur au point le plus bas $C$ de la chainette a pour rayon le paramètre $h$ de la Chainette, et ce cercle ne s'écarte pas sensiblement de la chainette, toutes le fois que la flèche $CF$ est moindre que la septième partie de la largeur $AB$.

La parabole osculatrice au sommet ou au point le plus bas $C$, a pour équation $y_2 = 2hx$; son paramètre est donc le double du paramètre de la chainette; elle coïncide sensiblement avec la chainette sur une étendue pour la quelle la flèche $CF$ est moindre que la sixième partie de la largueur $AB$. C'est encore cette même parabole dans la quelle la chainette est transformée pour ainsi dire, quand les forces verticales, qui agissent sur les points de la courbe, ne sont plus proportionnelles aux élémens $ds$, mais aux élémens $dx$ des abscisses, $s$ dénotant l'arc ou la longueur de la courbe.

Il existe encore une parabole, la quelle, touchant d'abord la chainette au point $C$, puis s'écartant insensiblement de cette courbe, la coupe ensuite en un point, par le quel passe en même temps l'ordonnée, traversante le foyer de cette parabole. Elle a un paramètre $= 1{,}862\,.\,h$, c'est à dire moindre que celui de la parabole osculatrice, mais, dans l'exécution, elle s'accorderoit sur une plus grande étendue avec la chainette, et ces deux courbes pourroient être censées coïncider en tant que la flèche $CF$ seroit moindre que la quatrième partie de $AB$.

Ces résultats sont deduits d'un calcul numérique. Ils font voir, que dans l'application qu'on pourroit faire de la théorie de la chainette a la construction des ponts suspendus, on pourroit, sans erreur sensible, prendre la parabole pour la chainette. A la vérité la courbure des chaines d'un tel pont ne peût être celle d'une chainette, mais à la rigueur non plus celle d'une parabole, quoiqu'elle en diffère très peu.

---

# XVII.

## Ueber die Auflösung der Delischen Aufgabe.

Von

**Herrn Thomas Clausen**

zu Altona.

---

Die Conchoide mit kreisförmiger Basis, obgleich eine Curve vom sechsten und also höhern Grade als die Conchoide des Nicomedes, die nur vom vierten Grade ist: lässt sich zur Auflösung des Delischen Problems sehr einfach anwenden. Da sie sich eben so

Digitized by Google

einfach mechanisch beschreiben lässt, so schien es mir nicht uninteressant, die geometrische Construction der Auflösung der Aufgabe, oder überhaupt der Cubikwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl durch dieselbe zu entwickeln.

Der Punkt $B$ (Tab. II. Fig. 5.) der Linie $AD$ bewegt sich auf dem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt $C$ ist, während die Linie beständig durch $A$ geht, und der Punkt $D$ auf derselben, dessen Entfernung von $B$ constant ist, beschreibt die Curve.

Es sei $AC=a$, $BC=b$, $BD=3e$, $DA=r$,

$AE$ ($DE$ ist senkrecht auf $AC$) $=x$, $\angle DAE=\varphi$.

In dem ebenen Dreiecke $ABC$ ist

$$b^2=a^2+2a(r-3e)\cos\varphi+(r-3e)^2,$$

$$r^2-6er+9e^2+2ar\cos\varphi-6ae\cos\varphi+a^2-b^2=0$$

und wenn man mit $r$ multiplicirt und $r\cos\varphi=x$ setzt

$$r^2-6er^2+(a^2-b^2+9e^2+2ax)r-6aex=0.$$

Es sei diese Gleichung

$$(r-2e)^2=me^2,$$

so wird

$$12e^2=a^2-b^2+9e^2+2ax,\ me^2=6ae.x-8e^2;$$

woraus

$$e^2=\frac{3(a^2-b^2)}{1-m},\ x=\frac{m+8}{1-m}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

Es sei z. B. in der Delischen Aufgabe $m=16$; so wird wenn man

$$a=2,\ b=3 \text{ setzt: } e=1,\ x=2.$$

Nach diesen Verhältnissen ist die Figur gezeichnet, es ist nemlich

$$AC=2.AF,\ BD=3.AF,\ FE=AF,\ AD-AE=AE\sqrt[3]{2}.$$

# XVIII.

## Aufzulösende geometrische Aufgabe.

Mitgetheilt von

Herrn Thomas Clausen

zu Altona.

Es ist (Tab. II. Fig. 6.) ein Kreis, und auf seiner Peripherie sind vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ gegeben, in denen

Digitized by Google

er von einem übrigens unbekannten Kegelschnitte geschnitten wird. Man soll den Winkel finden, unter dem eine der Hauptachsen des Kegelschnitts irgend eine der Linien, welche die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ zu zweien verbinden, z. B die Linie $AB$, schneidet.

# XIX.

## Zwei allgemeine Summations-Formeln für die dritte Potenz der Glieder der Reihen, deren $n$tes Glied $= \pm [1 + (n-1) \cdot 2^x]$ ist.

(Ein Nachtrag zu Nr. XLI. in Th. I. Heft 3.)

Von dem

Herrn Doctor Hellerung

zu Wismar.

*F.* Die Formeln selbst sind:

1) $1^3 + (1 + 1 \cdot 2^x)^3 + (1 + 2 \cdot 2^x)^3 + (1 + 3 \cdot 2^x)^3 + \ldots . + [1 + (n-1)2^x]^3$
$= n \cdot [1 + (n-1)2^{x-1}] \cdot [1 + (n-1) \cdot 2^x \cdot (1 + n \cdot 2^{x-1})]$

2) $1 - (1 + 1 \cdot 2^x)^3 + (1 + 2 \cdot 2^x)^3 - \ldots . + [1 + (2n-2)2^x]^3 - [1 + (2n-1) \cdot 2^x]^3$
$= -2n \cdot [n^2 \cdot 2^{3x+1} - 3 \cdot n \cdot 2^{2x} \cdot (2^{x-1} - 1) - 3 \cdot 2^{x-1} \cdot (2^x - 1)]$

Z. B. man erhält:

$\alpha$) wenn $x = 0$ ist,

aus 1): $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + n^3 = n \cdot (\frac{n+1}{2}) \cdot (\frac{n^2+n}{2})$

aus 2): $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots . + (2n-1)^3 - (2n)^3 = -n^2(4n+3)$

$\beta$) wenn $x = 1$ ist,

aus 1): $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots . + (2n-1)^3 = n \cdot (n) \cdot (2 \cdot n^2 - 1)$

Digitized by Google

aus 2): $1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (4n-3)^3 - (4n-1)^3 = -2n \cdot (16 \cdot n^2 - 3)$

$\gamma$) wenn $x = 2$ ist,

aus 1): $1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots + (4n-3)^3 = n \cdot (2n-1) \cdot (8 \cdot n^2 - 4n - 3)$

aus 2): $1^3 - 5^3 + 9^3 - 13^3 + \ldots + (8 \cdot n - 7)^3 - (8 \cdot n - 3)^3 = -2n \cdot (2^7 \cdot n^2 - 48 \cdot n - 18)$

$\delta$) wenn $x = 3$ ist,

aus 1): $1^3 + 9^3 + 17^3 + \ldots + (8 \cdot n - 7)^3 = n \cdot (4n-3) \cdot (32 \cdot n^2 - 24 \cdot n - 7)$

aus 2): $1^3 - 9^3 + 17^3 - 25^3 + \ldots + (16 \cdot n - 15)^3 - (16 \cdot n - 7)^3 = -2n \cdot (2^{10} \cdot n^2 - 9 \cdot n \cdot 2^6 - 84)$

etc. etc.

Der Beweis für die Formel 1) ist ganz derselbe, den wir früher (in *A.* und *B.*) bei $x = 0$ und $x = 1$ gebrauchten, nemlich:

Die Summe der ersten $N$ oder $N_1$ Zahlen von der Form $1 + \nu \cdot 2^{x+1}$ ist $= N \cdot [1 + (N-1) \cdot 2^x]$ oder $= N_1 \cdot [1 + (N_1 - 1) \cdot 2^x]$.

Setzt man aber $N = n \cdot [1 + (n-1) \cdot 2^{x-1}]$

und $N_1 = (n-1) \cdot [1 + (n-2) \cdot 2^{x-1}]$;

so erhält man:

$N \cdot [1 + (N-1) \cdot 2^x] - N_1 \cdot [1 + (N_1 - 1) \cdot 2^x] = [1 + (n-1) \cdot 2^x]^2$,

und $N - N_1 = 1 + (n-1) \cdot 2^x$

d. h. also, Erstlich:

Die Summe der $1 + (n-1) \cdot 2^x$ auf einander folgenden Zahlen von der Form $1 + \nu \cdot 2^{x+1}$, von denen die grösste $= 1 + (N-1) \cdot 2^{x+1}$, und die kleinste $= 1 + N_1 \cdot 2^{x+1}$, ist $= [1 + (n-1) \cdot 2^x]^2$.

Und Zweitens muss nun auch:

$$S[1 + (n-1) \cdot 2^x]^2 = 1^3 + (1+1 \cdot 2^x)^3 + (1 + 2 \cdot 2^x)^3 + \ldots + (1 + (n-1) 2^x]^3$$
$$= N \cdot [1 + (N-1) 2^x]$$

sein, woraus die Formel 1) unmittelbar folgt.

Der Beweis für die Formel 2) ist nun eine leichte Folgerung aus dem vorstehenden. Nemlich:

Wenn man von $2 \cdot S[1 + (n-1) \cdot 2^{x+1}]^2$ die $S[1 + (n-1) \cdot 2^x]^2$, nachdem man hierin $2 \cdot n$ statt $n$ gesetzt hat, abzieht; so erhält man die Formel 2).

*G.* 1) Wir fanden (in *E.* 1.) $Sn^{2\nu-1} = \varphi \frac{n(n+1)}{2} = \varphi N$; z. B. für $\nu = 5$ war

$$Sn^9 = \tfrac{1}{4} \cdot N^2 \cdot (2N-1) \cdot (8 \cdot N^2 - 6 \cdot N + 3);$$

daher ist auch, wenn man $2n$ statt $n$ setzt,

$$S(2n)^{2\nu-1} = \varphi n(2n+1) = \varphi N_1 = \Sigma(2n)^{2\nu-1} + \Sigma(2n-1)^{2\nu-1}.$$

Digitized by Google

Man hat aber stets:

$$\Sigma(2n)^{2\nu-1} = 2^{2\nu-1} \cdot S(n)^{2\nu-1} = 2^{2\nu-1} \cdot \varphi N;$$

daher ist auch:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} = \varphi N_2 - 2^{2\nu-1} \cdot \varphi N = \varphi' n^2 \text{ (nach } E. 2.);$$

und auch:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} - \Sigma(2n)^{2\nu-1} = \varphi N_2 - 2^{2\nu} \cdot \varphi N$$
$$= 1^{2\nu-1} - 2^{2\nu-1} + 3^{2\nu-1} - \ldots - (2n)^{2\nu-1}$$

z. B. $1^9 - 2^9 + 3^9 - \ldots - 14^9 = -7^2 \cdot 277003903.$

2) Es ist

$$\frac{(an+b)^{2\nu} - (an-b)^{2\nu}}{4 \cdot \nu} = b(an)^{2\nu-1} + \frac{(2\nu-1)\ (2\nu-2)}{2 \cdot 3} \cdot b^3 (an)^{2\nu-3} + \ldots + b^{2\nu-1} \cdot (an)^1$$

Daher muss also auch stets $S(ab+b)^{2\nu} - S(an-b)^{2n} = \varphi N$ sein. Z. B. wenn $a = 4$ und $b = 1$; so ist:

$$S(4n+1)^3 - S(4n-1)^2 = 16 \cdot N$$
$$S(4n+1)^4 - S(4n-1)^4 = 2^5 \cdot N \cdot (2^4 \cdot N + 1)$$
$$S(4n+1)^6 - S(4n-1)^6 = 2^4 \cdot N \cdot (2^{10} \cdot N^2 - 3 \cdot 2^5 \cdot N + 3)$$
$$= -3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \ldots\ldots$$
$$- (4n-1)^6 + (4n+1)^6$$

etc. etc.

In diesen Gleichungen wird man auf beiden Seiten noch die Einheit addiren.

Dies mag genügen, da hier dem angeblichen Funde von Turner seine vollständige Ausbildung geworden zu sein scheint.

---

# XX.

## Historische Bemerkungen über das Princip der Differentialrechnung.

Von dem

**Herrn Doctor Gerhardt**

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

---

Die Elemente der Differentialrechnung wurden von Leibnitz gefunden und bekannt gemacht, als die Exhaustionsmethode, wel-

Digitized by Google

cher jene, wie sich historisch nachweisen lässt, ihren Ursprung zu verdanken hat, sich am weitesten von ihrer ursprünglichen Strenge entfernt hatte. Auch hatte sie schon längst ihr gewohntes Feld, die Geometrie, verlassen, indem man seit den Zeiten Fermat's und Roberval's bei Quadraturen die geometrischen Grössen durch allgemeine Zeichen ausdrückte und so Reihen fand, deren Summen auf irgend eine Weise, ohne an das Princip der Exhaustionsmethode zu denken, bestimmt wurden. Solche Reihen waren es nun auch, durch deren Betrachtung Leibnitz, wie er selbst wiederholt gesteht, die Differentialrechnung fand. und wahrscheinlich liegt hierin der Grund, dass es ihm so schwer wurde, die Elemente seiner neuen Rechnung auf ihr ursprüngliches Princip zurückzuführen und so zu begründen, als man ihm späterhin den Vorwurf machte, dass die Differentialrechnung eines sicheren Fundamentes entbehre. Allein auch hierzu hatte er selbst die Veranlassung gegeben, denn zuerst sprach er sich nirgends deutlich über das Wesen der Differentiale aus und sodann, anstatt ein für alle Mal an einem Beispiele zu zeigen, wie am genügendsten das Differential mittelst der Gränzmethode aufgefasst werden könne, nahm er zu quantitates incomparabiliter parvae seine Zuflucht. Diese von Leibnitz hypothetisch angenommenen *) Grössen sollten nur ein Hülfsmittel zum Beweise der Lehrsätze seiner neuen Rechnung sein; man verstand ihn aber in diesem Punkte falsch, nahm jene für wirkliche Grössen und stellte sie in Vergleich mit den anderen bisher gebrauchten, obgleich sie von ihm späterhin wiederholt für Fictionen erklärt wurden. So entstand die Lehre vom Unendlichen, und als die unausbleiblichen Zweifel über die Deutlichkeit und Bestimmtheit dieser Grössen zur Sprache kamen, fanden Leibnitz's Erinnerungen, dass die Differentialrechnung am sichersten mittelst der Exhaustionsmethode begründet werden könne, keinen Anklang.

Die obige Behauptung, dass die Differentialrechnung der Exhaustionsmethode der alten Geometer ihren Ursprung zu verdanken habe, erhält noch mehr Bestätigung, wenn man die Erfindung der Fluxionen aufmerksam studirt. Ueberall, wo Newton in seinen Schriften über das Princip der Fluxionsrechnung spricht, zeigt sich deutlich, dass er auf dem von Keppler und Cavaleri eingeschlagenen Wege weiter fortschritt und so zu jener Rechnung gelangte, und man kann mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen, dass, wenn Newton einmal ein selbstständiges Werk über die Fluxionen verfasst hätte, er es sicher auf die in seinen berühmten Principiis gebrauchte Methode der ersten und letzten Verhältnisse d. h. auf die Exhaustionsmethode gegründet haben würde. Das Princip der Fluxionen wurzelt in der Geometrie, was am deutlichsten aus den ihnen zu Grunde liegenden Begriffen von Zeit und Bewegung erhellt, und desshalb vermochte auch Maclaurin um so leichter in seiner Treatise of fluxions, ihr Princip rein nach den Grundsätzen der alten Geometrie zu behandeln. — Indessen blieb anfangs die

*) Er bedient sich des Wortes assumere; z. B. in der Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis (Leib. op. Tom. III. p. 213 sq.): Assumsi inter demonstrandum quantitates incomparabiliter parvas, v. g. differentiam duarum quantitatum communium ipsis quantitatibus incomparabilem. Sic enim, ni fallor, lucidissime exponi possunt. etc.

Digitized by Google

Fluxionsrechnung, wiewohl früher entdeckt, als die Differentialrechnung, lange Zeit ein ausschliessliches Eigenthum Newton's und seiner Freunde; aber auch späterhin hat sie sich nie über ihr Vaterland hinaus verbreitet, während die Differentialrechnung sogleich allgemeine Anerkennung fand und begierig aufgenommen wurde. Hierin mag auch der Grund liegen, wesshalb Maclaurin's oben genanntes Werk, das gewissermassen Newtons Principiis zur Seite zu setzen ist, so wenig beachtet wurde. Die Differentialrechnung hatte eine zu glückliche Bezeichnung und bot in der Anwendung so wenig Schwierigkeiten dar, dass man kein Bedürfniss empfand, sich nach einer andern Methode umzusehen. Wenn auch ihr Princip schwankend war, so waren doch die damaligen ausgezeichneten Mathematiker von ihrer Richtigkeit überzeugt, und minder reich begabte wurden dadurch zufrieden gestellt, dass die Resultate, die mittelst derselben gewonnen wurden, mit den auf andere Weise erhaltenen vollkommen übereinstimmten. Die unendlichkleinen Grössen bilden fortwährend die Grundlage der Differentialrechnung, und auch das erste Lehrgebäude der höhern Analysis, die Analyse des infiniment petits des Marquis de l'Hospital, das sehr viel zur Verbreitung derselben beitrug, erklärte mit ihrer Hülfe die Differentiale. Jede Veränderliche $x$ wurde um eine unendlich kleine Grösse $dx$ vermehrt, und die Differenz zwischen dem so erhaltenen und dem ursprünglich gegebenen Ausdruck das Differential des gegebenen genannt.

Maclaurin's Beispiel blieb jedoch auf dem Festlande nicht ohne Nachahmung; in seine Fussstapfen trat d'Alembert, der als Mitherausgeber der grossen französischen Encyclopädie bei Abfassung der mathematischen Artikel Gelegenheit nahm, über das Princip der Differentialrechnung sich auszusprechen. In dem Artikel „différentiel" dringt er darauf, dass der Differentialrechnung der Begriff der Gränze zu Grunde gelegt werden müsse; „le calcul différentiel, sagt er, ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes et à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche." — „Qu'est-ce en effet, fährt er fort, que trouver un maximum ou un minimum? C'est, dit-on, faire la différence de $dy$ égale à zéro ou l'infini; mais pour parler plus exactement, c'est chercher la quantité $\frac{dy}{dx}$ qui exprime la limite du rapport de $dy$ fini à $dx$ fini et faire ensuite cette quantité nulle ou infinie. Voilà tout le mystère expliqué. Ce n'est point $dy$ qu'on fait $=$ à l'infini: cela serait absurde car $dy$ était prise pour infiniment petite, ne peut être infinie, c'est $\frac{dy}{dx}$: c'est-à-dire qu'on cherche la valeur de $x$ qui rend infinie la limite du rapport de $dy$ fini à $dx$ fini."

Ohngeachtet dieser Vorgänge entbehrte doch noch das um diese Zeit, im Jahr 1755, abgefasste Lehrgebäude der Differentialrechnung unsers unsterblichen Euler die feste Begründung durch die Gränzmethode, aber er setzte, in der Ueberzeugung, dass vor allen Dingen die so vagen unendlichkleinen Grössen aus der Differentialrechnung entfernt werden müssten, mittelst eines kühnen Gewaltstreichs dieselben $=0$ und legte diesen Nullen einen intensiven Werth bei. Nach seiner Meinung müsse man auf ihre Entstehung Rücksicht nehmen, dann dürften sie auch, je nachdem sie aus einer

Digitized by Google

grösseren oder kleineren Grösse entstanden wären, einen verschiedenen Werth unter einander haben, obgleich sie durch dasselbe Zeichen dargestellt würden. Diese Annahme veranlasste aber bei der Bestimmung der Differentiale vielfache Schwierigkeiten, zumal da Euler durch die Differenzenrechnung und mittelst der Entwickelung der Functionen in Reihen dahin gelangen wollte, und in der That ist die Dunkelheit und Unverständlichkeit, die in den ersten Capiteln der Eulerschen Differentialrechnung herrscht, eine merkwürdige Erscheinung für jeden, der mit der äusserst lichtvollen Darstellung Euler's vertraut ist *).

Euler's Bemühungen, das Princip der Differentialrechnung fest zu begründen, befriedigten keineswegs die allgemeine Erwartung; ja die Verwirrung in dieser Hinsicht wurde immer noch grösser. Man meinte sogar, dass die Differentialrechnung bisher noch nicht von der rechten Seite aufgefasst worden sei, und glaubte namentlich in der so sehr erweiterten und in allen Theilen der Mathematik mit Nutzen gebrauchten Lehre von den Reihen ein Mittel zu einer bessern Bestimmung und Erklärung des Differentials gefunden zu haben. Was überhaupt seit dieser Zeit zur Feststellung des Princips der Differentialrechnung geschah, lässt sich unter zwei allgemeine Gesichtspunkte bringen: entweder behielt man den Begriff und das Zeichen eines Differentials bei, und bestimmte den Begriff so, dass die Widersprüche, auf welche er zu führen schien, beseitigt wurden; oder man verwarf alles bisher Angenommene und suchte auf anderem Wege zu dem zu gelangen, was mittelst der bisherigen Methode gefunden war. Zu dem ersten Fall gehört die sogenannte Gränzmethode, von der weiter unten ausführlicher die Rede sein soll; zu dem zweiten alle die Weisen, in welchen mit Hülfe des Taylorschen Lehrsatzes das Differential einer Function gefunden wird. Unter diesen letzteren nimmt Lagrange's Functionentheorie, die im Jahr 1797 zu Paris erschien, den ersten Platz ein.

Wegen des grossen Beifalls, mit dem sie aufgenommen wurde und zum Theil noch jetzt aufgenommen wird, wollen wir sie hier einer näheren Betrachtung unterwerfen. Schon in dem vollständigen Titel: **Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et reduits à l'analyse algébrique des quantités finies,** sind die ganze Tendenz des Werkes und zugleich die Gesichtspunkte angegeben, aus welchen man dasselbe zu betrachten hat. Lagrange will nicht allein eine neue Theorie aufstellen zur Begründung des Princips der Differentialrechnung, sondern auch niedere und höhere Analysis, die bisher völlig gesondert waren, mit einander verbinden. — Nachdem

*) Eine Folge von Euler's Theorie war die sogenannte Nullenrechnung, in welcher man die Differentiale als leere, an sich bedeutungslose Zeichen betrachtete, mit denen man aber nach gewissen sinnreich erdachten Gesetzen eine richtige Rechnung führen könne. Man sah den Algorithmus der Differentialrechnung nicht als ein nothwendiges Erzeugniss der Vernunft an, sondern nannte ihn eine heuristische Fiction. Vergl. Joh. Schulz Entwickelung einiger mathematischen Theorien, Königsberg 1803; und Fischer über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis, Berlin 1808.

Digitized by Google

er nun zuerst die bisherigen Methoden zur Begründung des Princips der Differentialrechnung einer Kritik unterworfen und keine genügend befunden, beginnt er mit der Prüfung des Fundamentaltheorems, dass nämlich jede Function $f(x)$, falls ihre veränderliche $x$ um die Grösse $i$ ($i$ étant une quantité quelconque indéterminée) vermehrt wird, sich in eine Reihe von der Form $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ entwickeln lasse, wo die Coefficienten $p$, $q$, $r$ ... neue aus der ursprünglich gegebenen Function $f(x)$ abgeleitete Functionen von $x$ bezeichnen, und sucht a priori zu beweisen, dass nur ganze positive Exponenten von $i$ vorkommen können. Dass dieser Beweis aber nur ein schwaches, unzulängliches Räsonnement — so wird er auch weiterhin von Lagrange selbst bezeichnet — ist und durchaus nicht dem Beweise eines Satzes gleicht, der einer so allgemeinen Theorie als Grundlage dienen soll, begreift jeder sogleich beim ersten Lesen *). Im Folgenden werden nun die Coefficienten $p$, $q$, $r$ ... der einzelnen Glieder der Reihe bestimmt, und zugleich dargethan, dass wie $p$ aus $f(x)$, ebenso $q$ aus $p$, $r$ aus $q$, u. s. w. hergeleitet wird. Wiewohl so nach Lagrange's Meinung mit einem Blicke zu übersehen ist, wie die einzelnen Glieder der Reihe von einander abhängen, und darin ein Hauptvorzug der Functionentheorie vor der Differentialrechnung bestehen soll, so ist doch die Bildung derselben in allen Fällen nicht so leicht, wie es zu sein scheint, namentlich bei irrationalen Functionen. Es ist bekannt, dass die Coefficienten $p$, $q$, $r$ ... der erste, zweite, dritte, .... Differentialcoefficient der gegebenen Function sind; wäre also in jedem Falle die Entwickelung einer Function in eine solche Reihe möglich, so würden alle Schwierigkeiten beseitigt sein. Dem ist aber nicht so. Schon Euler hatte im 14. Capitel des 2. Buchs seiner Differentialrechnung gezeigt, dass die Differentiale in speciellen Fällen durch Reihenentwickelung nicht gefunden werden können und dann unmittelbar ihrer eignen Natur gemäss (ex ipsa differentialium natura) hergeleitet werden müssen. „Haec methodus, fügt er hinzu, ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium reliquit.“ Auch Lagrange wies in seiner Functionentheorie auf diese speciellen Fälle zurück, in welchen die ersten Glieder der Reihe verschwinden oder unendlich werden und so die Bestimmung der Coefficienten unmöglich machen, und er hilft sich, wie Euler, durch unmittelbare Herleitung aus der Function. Hier giebt er also zu, dass obiges Fundamentaltheorem nicht

*) Da er mit Hülfe allgemeiner algebraischer Schlüsse geführt wird, so gilt von ihm, was Cauchy in der Vorrede zu: Cours d'analyse algébrique, von dieser Beweisart sagt: Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandisque, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment.

Digitized by Google

in allen Fällen zur Bestimmung des Differentials ausreicht, und desshalb durfte es auch nicht an die Spitze einer weit allgemeineren Lehre, als die Differentialrechnung ist, gestellt werden.

Demnach ist im Grunde mit Lagrange's Functionentheorie nichts gewonnen; andere Schwierigkeiten bei Seite gesetzt, entbehrt das zu Grunde gelegte Princip einer durchgreifenden Allgemeinheit. Dasselbe gilt nun auch von allen übrigen Methoden, von dem Derivationscalcul Arbogast's, von der Exponentialrechnung Pasquich's u. s. w. welche die Differentialrechnung vertreten sollen und in denen mittelst des Taylorschen Satzes das Differential einer Function erhalten wird.

Während dieser mannigfachen Versuche, das Princip der Differentialrechnung fest zu begründen, hatte die Akademie der Wissenschaften zu Berlin für das Jahr 1786 eine sichere, streng wissenschaftliche Theorie des sogenannten mathematisch Unendlichen zum Gegenstand einer Preisaufgabe gemacht. L'Huilier aus Genf gewann den Preis durch seine Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, in welcher er zu beweisen suchte, dass das unter den Namen der Exhaustionsmethode bekannte Verfahren der griechischen Geometer gehörig erweitert zu einer Feststellung der Principien der höhern Analysis hinreiche. Im Jahre 1795 erschien von demselben Verfasser zur Vervollständigung jenes Entwurfes ein anderes Werk unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, das aber über das Princip nichts wesentlich Neues beibringt. L'Huilier hat in beiden Schriften, seinem Vorsatze getreu, eine Zusammenstellung der Theoreme gegeben, die das Fundament der Exhaustionsmethode bilden; jedoch entbehrt dieselbe eines durchgreifenden Zusammenhanges, da die an die Spitze gestellte Definition der Gränze nicht hinlänglich allgemein gefasst ist. Auch bedient er sich bei dem Nachweise, dass die Gränze eines Verhältnisses mit dem Differentialverhältnisse identisch ist, der Entwickelung der Functionen in Reihen mittelst des Taylorschen Lehrsatzes, was zu tadeln ist. Von diesen Ausstellungen jedoch abgesehen verdienten beide Schriften alle Aufmerksamkeit, weil nicht allein das Princip der Differentialrechnung, sondern auch die darauf gegründeten Theorien immer auf den Begriff der Gränze zurückgeführt werden, und die bisher so vielfach gehandhabten Ideen über das Unendliche und Unendlichkleine gerechte Würdigung finden.

Dieser Versuch L'Huilier's jedoch, die Differentialrechnung mittelst des Begriffs der Gränze streng wissenschaftlich zu begründen, blieb im Allgemeinen ohne gehörige Anerkennung, da Lagrange's Functionenlehre, besonders von französischen Mathematikern sehr bereitwillig aufgenommen wurde. Zwar bediente man sich nicht durchgängig ihrer Bezeichnung, aber man huldigte vollkommen den aufgestellten Principien und stimmte willfährig Lagrange's Urtheil über die Theorie der Gränzen bei: sie sei zu schwierig und zu dunkel, als dass sie einer Wissenschaft, wie die höhere Analysis, deren Fundament auf die einfachsten und klarsten Principien gebaut werden müsse, als Grundlage dienen könne; man hütete sich aber wohl an ihrer Richtigkeit zu zweifeln. Da nun um dieselbe Zeit eine durchgreifend neue Behandlungsweise der Mathematik beinahe in allen ihren Theilen von Frankreich aus sich verbreitete, so darf man sich nicht wundern, dass zugleich auch die Lehren

Digitized by Google

Lagrange's über das Princip der Differentialrechnung ein grosses Ansehen gewannen und beinahe alle andere Ansichten verdrängten. Das Gebiet der mathematischen Wissenschaften wurde in wenigen Jahrzehnten, namentlich durch Anwendung der Theorie auf Astronomie und Mechanik so sehr erweitert und nebenbei mit den elegantesten analytischen Entdeckungen so glänzend bereichert, dass sich diese Zeit nur mit jener vergleichen lässt, welche auf die Entdeckung der höhern Analysis folgte; und wie damals, bekümmerte man sich auch jetzt weniger um die Principien, vielmehr war man eifrigst beschäftigt, die schwierigsten Untersuchungen, wenn auch nur einen kleinen Schritt, weiter zu fördern. Nachdem sich jedoch dieses Drängen etwas beschwichtigt hatte, kehrte man zu einer ruhigen Prüfung der gewonnenen Resultate zurück, und wiederum war es ein französischer Mathematiker, der Bahn brach. Cauchy, Professor an der polytechnischen Schule in Paris, stellte zuerst in dem Cours d'analyse algébrique, Paris 1821, eine umfassende Theorie über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der Reihen auf, nachdem Lagrange durch die Bestimmung des Fehlers bei der Taylorschen Reihe, wenn dieselbe bei einem bestimmten Gliede abgebrochen wird, den Ton hierzu schon früher angestimmt hatte. Mit derselben Schärfe und Gründlichkeit entwickelte darauf Cauchy das Princip der Differentialrechnung in seinem Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Paris 1823, welches Werk im Jahre 1829 unter dem Titel: Leçons sur le calcul différentiel, in einer neuen Auflage erschien. „Mon but principal, sagt der Verfasser in der Vorrede zu letzterer Schrift, a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon Cours d'analyse, avec la simplicité que produit la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développements des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes. Il en résulte, par exemple, que la formule de Taylor ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes, et complétée par un reste."

Mit Recht hat nach diesen Vorgängen der neuesten Zeit der grösste Theil der Mathematiker den Versuchen, das Princip der Differentialrechnung durch den Begriff der Gränze fest und sicher zu begründen, seinen Beifall nicht versagt, denn nicht allein ergiebt es die geschichtliche Forschung, dass sich allmählig aus der Exhaustionsmethode der Geometer des Alterthums die Differentialrechnung herangebildet hat, und dass dieselbe nach dem Sinne ihrer Erfinder am sichersten auf die Lehre von der Gränze basirt wird, sondern die Gränzmethode hat auch, wie kein anderes Verfahren, allen streng wissenschaftlichen Anforderungen genügt und allen Angriffen Trotz geboten; nur der einzige Vorwurf ist ihr gemacht worden, als sei sie für Anfänger zu dunkel und zu schwierig, um als Fundament der höhern Analysis zu dienen, das nicht genug auf das lichtvollste und klarste dargestellt werden könne.

Digitized by Google

# XXI.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

(Schluss.)

12.

Die Oscillationsgeschwindigkeit $v$ eines geradlinig bewegten Aethertheilchens und sein Abstand vom Ruhepunkt lässt sich unter der Voraussetzung, dass die auf das Theilchen wirkende Kraft der Elastizität der Entfernung vom Ruhepunkte proportional sei, durch einfache Hülfsmittel finden.

Ist in der Entfernung 1 die Kraft der Elastizität $= E$, die Entfernung vom Ruhepunkte $= x$, die grösste Ausweichung vom Ruhepunkte, um welche das Theilchen beim Anfange der Bewegung entfernt ist, $= a$, $a - x = X$, und wird $X$ in $n$ gleiche Theile getheilt, so ist die Kraft $F$, welche das Aethertheilchen an der Stelle $(a - m\frac{X}{n})$ anregt, $= E \,.\, (a - m\frac{X}{n})$. Wird nun angenommen, dass in jedem Raume $\frac{X}{n}$ eine gleichförmig beschleunigte Bewegung stattfinde, die erst im nächsten Raume $\frac{X}{n}$ dem Abstande vom Ruhepunkte proportional sich ändert, aber in einem solchen Raume constant bleibt, so ist

$$v_m \,.\, v_m - v_{(m-1)} \,.\, v_{(m-1)} = 2E(a - m \,.\, \frac{X}{n}) \,.\, \frac{X}{n}.$$

Legt man jetzt $m$ alle Werthe von $m = 1$ bis $m = n$ bei und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bleibt

$$v_n \,.\, v_n = 2E[na - \frac{X(n^2 + n)}{n \quad 2}]\frac{X}{n} = E \,.\, [2a - (1 + \frac{1}{n})X]X.$$

Soll die Bewegung eine continuirliche werden, und bezeichnet $v$ die Geschwindigkeit, so wird

$$v^2 = E(2a - X) \,.\, X = E \,.\, (a + a - X)X = E(a + x)\,(a - x).$$

Setzt man nun $x = a \cos \vartheta$, so erhält man $v = \sqrt{E} \,.\, a \sin \vartheta$ u. s. w. *)

*) S. Bohnenberger's Astronomie S. 403.

Digitized by Google

Zwischen zwölf beliebigen Grössen, die wir im Allgemeinen durch $a$, $a'$, $a''$, $a'''$; $b$, $b'$, $b''$, $b'''$; $c$, $c'$, $c''$, $c'''$ bezeichnen wollen, findet immer die folgende Relation Statt:

$$\begin{aligned}&(ab'-a'b)\ (a''b'''-a'''b'')\\&+(bc'-b'c)\ \ (b''c'''-b'''c'')\\&+(ca'-c'a)\ \ (c''a'''-c'''a'')\\&=(aa''+bb''+cc'')\ (a'a'''+b'b'''+c'c''')\\&-(a'a''+b'b''+c'c'')\ (aa'''+bb'''+cc''').\end{aligned}$$

Für $a=a''$, $b=b''$, $c=c''$ und $a'=a'''$, $b'=b'''$, $c'=c'''$ geht diese Relation in folgende über:

$$\begin{aligned}&(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2\\&=(a^2+b^2+c^2)\ (a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2.\end{aligned}$$

Man soll die Richtigkeit der obigen allgemeinen Relation zwischen zwölf Grössen beweisen.

---

Aufgaben und Lehrsätze. Von Herrn Professor Dr. Oettinger zu Freiburg i. B.

1) Ein Dreieck zu bilden, wenn ein Winkel, die Linie, welche eine der ihm anliegenden Seiten, und die welche die gegenüberstehende Seite in zwei gleiche Theile theilt, gegeben ist.

2) Ein Dreieck zu bilden wenn ein Winkel und die Linien, welche die beiden anliegenden Seiten in zwei gleiche Theile theilen, gegeben sind.

3) Ein Dreieck zu bilden, wenn ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Linie, welche eine der anliegenden Seiten in zwei gleiche Theile theilt, gegeben ist.

4) Ein Dreieck zu bilden, wenn die Linien, welche die drei Dreiecksseiten in zwei gleiche Theile theilen, gegeben sind.

Nennt man die Höhen, welche den drei Dreiecksseiten ($s_1$, $s_2$, $s_3$) zugehören, der Reihe nach $h_1$, $h_2$, $h_3$, die Linien, welche die drei Seiten in zwei gleiche Theile theilen, der Reihe nach $t_1$, $t_2$, $t_3$, so gelten folgende zwei Lehrsätze für die Ableitung der Höhen und Halbirungslinien von einander,

$$5)\ h_1=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_2{}^2+2t_3{}^2-t_1{}^2)}}$$

$$h_2=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_1{}^2+2t_3{}^2-t_2{}^2)}}$$

$$h_3=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_1{}^2+2t_2{}^2-t_3{}^2)}}$$

Digitized by Google

6) $$t_1 = \frac{\sqrt{(2h_1^2h_2^2+2h_1^2h_3^2-h_1^2h_2^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{(2h_2^2h_3^2+2h_2^2h_1^2-h_2^2h_3^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{(2h_1^2h_3^2+2h_3^2h_2^2-h_1^2h_2^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

Diese Sätze reihen sich an die schon bekannten, welche für die Ableitung der Höhen und Seiten von einander gelten, an.

---

**Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. G. J. Verdam zu Leiden.**

1. Tous les triangles sphériques, ayant même base et même aire, ont leurs sommets dans la circonférence d'un petit cercle, passant par les deux points, opposés aux extrémités de la base. En outre, le petit cercle, passant par les extrémites de la base, et ayant son centre, diamétralement opposé au centre du premier petit cercle, jouit de la même propriété.

Cette proposition n'est pas nouvelle; on la trouve dans quelques Traités de Trigonométrie sphérique et de Géométrie analytique. Mais pour trouver le centre du premier petit cercle, on a cette construction. Menez un arc de grand cercle, perpendiculairement par le milieu de la base. Le triangle étant, en général, scalène, cet arc coupera un des côtés, adjacents à la base, et sera coupé par le prolongement de l'autre. Du milieu de cet autre côté, décrivez, avec un rayon, soustendant le quart d'un grand cercle, un arc coupant le prolongement de l'arc perpendiculaire. Le point d'intersection sera le centre cherché.

2. Tous les triangles sphériques, ayant même base et même périmètre, ont leurs sommets dans la circonférence d'un cercle, dont le centre se trouve au milieu de la base. Si la somme des deux côtés est égale à deux angles droits, ou plutôt égale à une demi circonférence, le lieu des sommets sera évidemment un grand cercle de la sphère.

3. Quand on joint les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre régulier ou irrégulier, les trois droites, ainsi menées, se couperont en un même point, qui sera le centre de gravité du tétraèdre. Si le tétraèdre est régulier, les dites droites se couperont perpendiculairement au centre de la sphère circonscrite; mais cette dernière propriété a également lieu pour le tétraèdre demi-regulier, dont les plans sont des triangles égaux et semblables, quoique non équilateraux ou réguliers.

4. Un quadrilatère plan, dans lequel on a mené les deux diagonales, pouvant être consideré comme la projection d'un quadrilatère gauche, ou d'un tétraèdre soit pyramide triangulaire, ou



Digitized by Google

aura aussi cette propriété „que les droites, passant par les milieux „des côtés opposés et des deux diagonales d'un trapezoïde, se „couperont en un même point.“ On le démontre immédiatement en partant du théoreme connu „que les droites, qui joignent „les côtés adjacents d'un trapezoïde, forment un pa„rallelogramme.“ De la on pourroit aussi remonter à la démonstration de la proposition précédente.

---

# XXII.

## Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professors Dr. G. J. Verdam an der Universität zu Leiden.

Leide ce 23. Janvier 1842.

Dès que votre Journal estimé, Archiv für Mathematik und Physik, paroissoit, je me proposois de vous offrir, de temps en temps, quelques notices mathématiques. Mes nombreuses occupations ont toujours empêché de satisfaire à ce voeu, et peutêtre j'aurois encore différé de vous adresser cette lettre, si la lecture de votre Journal n'avoit pas fixé mon attention sur un point, lequel me sembloit hors de doute dans l'Histoire des Mathématiques, et qui regarde l'honneur de priorité d'un célebre Mathématicien Hollandais du 17. Siècle. J'ai en vue le problème connu de trigonométrie, pour trouver la position d'un point, du quel on observe les angles entre trois objets éloignés, dont les distances mutuelles sont connues. La première idée de ce problème est due à Willebrordus Snellius, Géomètre Hollandais, né a Leide en 1591, et depuis 1613 jusqu'en 1626 (l'année de sa mort) Professeur de Mathématiques a l'Université de cette ville. Il est connu que parmi ses travaux scientifiques on distingue la mesure d'un dégré du méridien de Leide, par une triangulation qu'il fit entre les villes d'Alcmar et de Bergen op Zoom, dont la différence de latitude fut trouvée de 71¼ minutes. Il a décrit les détails de cette opération géodésique dans un ouvrage (aujourdhui très rare), intitulé „Eratosthenes Batavus de Terrae ambi„tûs verâ quantitate, a Willebrordo Snellio, *Διὰ τῶν ἐξ „ἀποστημάτων μετρουσῶν διοπτρῶν*, suscitatus. Lugduni Batavorum. CIↃIↃCXVII.!! A la page 165 de cet ouvrage on reconnoit la première trace de ce problème, mais c'est dans le chapitre X, qu'il dit définitivement. „Domûs meae distantiam

Digitized by Google

„a Turri curiae Leidensis ideo adeo sollicite investigavi, „ut tanto facilius conjecturam caperem de locis observationum Alcmariae et Bergae ad Zomam, et ad eam „rem Theorema scitum excogitavi, cujus usus in patriâ „nostrâ deinceps permagnus esse possit, cum tot illustrium locorum intervalla tam accurate sint cognita!!“ Et à la page 203 il énonce son problème en ces verbes „Trium „locorum intervallis inter se datis, quarti distantiam ab „ommibus, *unicâ Statione*, definire.“ Il donne, en premier lieu, la solution graphique de ce problème, par l'intersection de deux segmens de cercle, capable chacun d'un des deux angles, observés dans la station. En second lieu il donne une solution trigonométrique, en faisant usage des triangles rectangles, que l'on obtient, en abaissant, des centres des cercles décrits, des perpendiculaires sur les côtés du triangle donné et sur les cordes, qui vont de la station aux points observés, c'est à dire aux angles de ce triangle. Ensuite il donne de sa solution le calcul numérique (sans employer néanmoins des logarithmes, dont l'invention étoit à peine connue, ou desquelles il n'existoit pas encore de table) pour un cas particulier.

Il me paroit ainsi justifié que la première idée de ce problème appartient tout à fait à notre Snellius, et non pas à Pothenot. Dans tous nos Traités de Trigonométrie rectiligne ce problème est distingué de tout autre par l'épithète de Problème de Snellius. J'ai cherché dans le Wörterbuch de Klügel, — que vous avez continué et achevé avec tant de succès, — dans l'espoir de trouver quelques reflexions ou notices historiques, relatives à ce fameux problème; mains je n'y trouve rien à cet égard. Enfin je prenois en mains le cours de Mathématique du célèbre Géomètre Allemand Kästner, et dans le volume, intitulé. „Anwendungen der „ebenen Geometrie und Trigonometrie, erster Theil, „dritte Abtheilung der mathematischen Anfangsgründe. „Göttingen 1790!!“ *) je lisois, dans le Vorrede; pag. 4., ce qui suit:

„So fand ich unlängst die Aufgabe der 51 Abhand. S. 393. beim „Willebrord Snellius „Eratosthenes Batavus etc. etc.

. . . . . .

„Also hat Snellius diese Aufgabe sehr richtig trigonometrisch „aufgelöst, und Pothenot ist nicht der erste Erfinder von ihr, „hat aber vermuthlich von des Snellius Auflösung nichts gewusst. Wäre Snellius dem Herrn de Montesson bekannt „gewesen, so hätte er vielleicht gesagt, — Snellius habe „Pothenots Methode gebraucht!, wie Cassini de „Thury sagt: Snellius habe zur Messung eines Grades eben „die Methode gebraucht wie die französischen Astronomen „(Mémoires de Paris 1748, pag. 123 **), anstatt zu sagen: „die französischen Astr..... wie Snellius. Die rhetorische Figur heisst, glaube ich, *ὕστερον πρότερον*! !!“

*) Es sind hier Kästners geometrische Abhandlungen. T. I. gemeint. G.

**) On trouve cette expression de Cassini dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, pour les années 1702 et 1718, et non dans le volume de 1748, ce qui est probablement une faute d'impression, au lieu de 1718.



Digitized by Google

Je me sentirai honoré, Mr. Le Professeur, si vous voulez fixer votre attention aux reflexions, que j'ai pris la liberté de vous adresser, et encore plus, si vous voulez en faire mention dans votre Journal.

Permettez moi encore, à cette occasion, la remarque, que la solution géométrique des équations du second dégré, communiquée par Mr. Le Professeur Mensing dans le III. Heft. No. XXV. de votre Journal ne differe au fond d'une solution pareille, déjà donnée par Cagnoli dans son Traité de Trigonométrie. Chap. XII.

---

Briefliche Mittheilung des Herrn Professors Dr. Gerling zu Marburg an den Herausgeber.

Als eine der grossartigsten Einrichtungen zur Beförderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts, welche in der neuern Zeit in Deutschland getroffen worden sind, verdient gewiss ein Bau bezeichnet zu werden, welcher auf Befehl Sr. Hoheit des Kurprinzen und Mitregenten in Marburg ausgeführt, und mit dem Anfange des gegenwärtigen Winter-Semesters dem academischen Gebrauche eröffnet worden ist.

Auf einem hohen Punkte ohnweit der Mitte der Stadt, die sich um den Schlossberg in langem Bogen herumzieht, wurde nämlich ein älteres Staats-Gebäude, der sogenannte Dürnberger Hof zu wissenschaftlichen Zwecken, und zwar namentlich für das seit vielen Jahren hier bestehende mathematisch-physicalische Institut, ganz neu ausgebaut. Das Institut erhielt in demselben den ersten Stock eingeräumt, und somit, unmittelbar neben einem geräumigen Hörsaal, zur angemesseneren Aufstellung des physicalischen Apparates vier Säle, welche nebst einem dazwischen liegenden Zimmer, was zu gewissen Versuchen verdunkelt werden kann, durch Flügelthüren mit einander verbunden sind. Sie stellen so eine Länge von 150 Fuss dar, und verstatten also manche Versuche in geschütztem Raum anzustellen, welche man sonst nur im Freien würde vornehmen können.

Zugleich ist dadurch auch die Gelegenheit gegeben, dass ein grosser Theil des Apparats an seiner bleibenden Stäte benutzt werden kann, ohne dass er, wie sonst üblich, dazu jedesmal in das Auditorium geschafft zu werden braucht.

Ueberdies sind neben diesen Sälen noch zwei Arbeitszimmer eingerichtet. Man hielt nämlich bei dem Plan den Gedanken fest, dass nach dem gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft es durchaus nicht mehr hinreicht, dass der Studirende die Vorlesungen besuche, sondern dass ihm vielmehr auch Gelegenheit gegeben werden sollte, sich in eigenen Arbeiten zu üben. — In diesen Arbeitszimmern ist nun auch einstweilen der Apparat für die praktische Geometrie in Schränken untergebracht. Auch werden sie von denjenigen Studirenden benutzt, welche sich Apparate zeichnen wollen.

Im Erdgeschoss hat das Institut Werkstatt und Schmiede, im oberen Stock ist die Amtswohnung.

Digitized by Google

**Wenn das bisher erwähnte schon eine namhafte Verbesserung und Vervollständigung des Instituts genannt zu werden verdient, so ist dagegen noch Mehreres neu hinzugekommen was bisher der Universität ganz fehlte.**

Es ist nämlich unmittelbar mit dem Haupt-Gebäude ein Thurm verbunden, der in einer Höhe von 80 Fuss vom Felsengrunde sich erhebt, und auf seiner ebenen Fläche einen Pavillon als Local für astronomische Beobachtungen mit beweglichen Instrumenten darbietet. Freilich kann dieser Einrichtung, vom Standpunkt der heutigen Astronomie aus, der Name Sternwarte nicht beigelegt werden, insofern man damit eine Anstalt bezeichnet, die auf die Ausbildung der Wissenschaft selbst abzweckt. Wohl aber ist durch diesen Thurm der Zweck vollständig erreicht, dass von nun an der Marburger Studirende, in den Vorlesungen über Astronomie, das was er hört auch praktisch belegt sehen, und selbst üben kann.

An Instrumenten enthält dieser Thurm bis jetzt: Ein tragbares Passagen-Instrument von Ertel nebst Uhr, einen Chronometer von Kessels, ein fünffüssiges Frauenhofersches Fernrohr, einen desgleichen Cometensucher, eine parallactische Maschine mit dreifüssigem Fernrohr und einige kleinere Werkzeuge. Zugleich ist der Thurm in der Mitte ganz durchbohrt, so dass für alle physicalischen Versuche, welche eine grössere Höhe erfordern als die Zimmer darbieten, eine freie Fallhöhe von 80 Fuss zu Gebote steht.

Endlich ist auf dem höchsten Punkt des Schlossbergs in einer geradlinigen Entfernung von nicht ganz 160 Ruthen ein ringsum ganz freistehender Pulverthurm zum meteorologischen Thurm hergestellt, der jetzt auch im Bau vollendet, nächsten Sommer seine innere Einrichtung erhalten wird; somit also auch in dieser Hinsicht dem Institute eine grössere Wirksamkeit gesichert.

Bei dem bekannten, und namentlich schon gelegentlich der magnetischen Beobachtungen bewiesenen, Eifer der Marburger Studirenden, steht zu erwarten, dass diese neue wesentliche Verbesserung des Instituts von ihnen gründlich benutzt und somit der Zweck der Kurhessischen Staats-Regierung, welche dieselbe verfügte, recht vollständig werde erreicht werden.

---

**Bemerkungen und Aufgaben von Herrn Scherling, Lehrer am Gymnasium zu Lübeck.**

**Bezeichnet $\frac{1}{i}$ den Zinsfuss (d. h. die Zinsen vom Kapital $= 1$), $k$ das Kapital, $k_n$ den künftigen Werth desselben nach $n$ Jahren bei zusammengesetzten Zinsen, und setzen wir $1 + \frac{1}{i} = z$, so hat man, wenn jährlich die Summe $r$ zugelegt wird,**

$$\text{I.} \quad k_n = kz^n + \frac{r}{\frac{1}{i}}(z^n - 1)$$

**und, wenn jährlich die Summe $r$ weggenommen wird,**

$$\text{II.} \quad k_n = kz^n - \frac{r}{\frac{1}{i}}(z^n - 1).$$

Digitized by Google

Um I. zur ununterbrochenen logarithmischen Berechnung tauglich zu machen, nehme man

$$k_n = kz^n \left[1 + \frac{r}{ik}\left(1 - \frac{1}{z^n}\right)\right]$$

setze, da $z > 1$ ist, (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$; so erhält man

$$k_n = kz^n[1 + \frac{r}{ik}(\cos\varphi)^2].$$

Nun setze man ferner (2) $\operatorname{tg}\psi = \cos\varphi\sqrt{\frac{r}{ik}}$, so erhält man

$$k_n = kz^n(1 + (\operatorname{tg}\psi)^2) = kz^n(\sec\varphi)^2$$

$$\text{oder (3) } k_n = \frac{kz^n}{(\cos\psi)^2}.$$

II. lässt sich nur dann auf diese Weise zur ununterbrochenen logarithmischen Berechnung tauglich machen, wenn die jährliche Wegnahme die Zinsen des Kapitals nicht übersteigt. Unter dieser Voraussetzung nehme man wieder, wie vorhin,

$$(1)\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$$

so erhält man $k_n = kz^n[1 - \frac{r}{ik}(\cos\varphi)^2]$. Da nun unter der gemachten Voraussetzung ganz gewiss $\frac{r}{ik}(\cos\varphi)^2 < 1$ ist, so nehme man

$$(2)\ \sin\psi = \cos\varphi\sqrt{\frac{r}{ik}}$$

und erhält dann

$$(3)\ k_n = kz^n(\cos\psi)^2.$$

Nennt man ferner $k$ die Mise und $r$ die jährliche Rente, so hat man

zur Bestimmung der Mise III. $k = \frac{r(z^n - 1)}{iz^n}$.

zur Bestimmung der Rente IV. $r = \frac{kiz^n}{z^n - 1}$.

Um diese Ausdrücke zur logarithmischen Berechnung tauglich zu machen, nehme man

$$k = \frac{r}{i}\left(1 - \frac{1}{z^n}\right).$$

Setzt man nun (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$, so erhält man

$$(2)\quad k = \frac{r}{i}(\cos\varphi)^2.$$

Digitized by Google

Ferner forme man IV. so um:

$$r = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{z^n}}.$$

Nimmt man nun wieder (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$, so erhält man

$$(2) \qquad r = \frac{k_1}{(\cos\varphi)^2}.$$

**Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, durch Algebra lösbar.**

Die beiden Katheten sollen $a$, $b$, die Hypotenuse $c$, und das von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel soll $h$ heissen.

1) $b$ und $c$ zu bestimmen aus $a$, $h$.

Man bestimme die Projectionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse einzeln und addire die Resultate, so erhält man $c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$, und aus $ab = ch$ bestimmt sich $b$. Beide Ausdrücke sind bequem zu construiren.

2) $a$, $b$, $c$ zu bestimmen aus $h$ und $c : b = m : n$.

$b$ ist ein geometrisches Mittel; davon ausgehend, gelangt man zunächst zur Bestimmung von $b = \frac{mh}{\sqrt{m^2 - n^2}}$, worauf sich $c$ und $a$ bestimmen lassen.

3) Aehnlich ist die Aufgabe: aus $h$ und $b : h = m : n$ die andern Stücke zu bestimmen.

4) Aus $a \pm b = s$ und $h$ die andern Linien zu bestimmen.

Man quadrire $a \pm b = s$, so bekommt man $c$ in die Gleichung, worauf man zu beachten hat, dass $ab = ch$: das Resultat giebt $c = \mp h \pm \sqrt{s^2 + h^2}$. Es ist klar, dass in beiden Fällen nur das Zeichen + vor der Wurzel gebraucht werden kann.

5) Aus $a + b = s$ und $c$ die übrigen Linien zu bestimmen.

Man verfahre zunächst, wie vorhin, mache dann $a$ zur gesuchten Grösse, so findet man $a = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{3s^2 - 2c^2})$, woraus $b$ und $h$ zu bestimmen sind.

6) Aus $a - b = d$ und $c$ die übrigen Linien zu bestimmen.

7) Aus $c + a = s$ und $b$ die Linien zu bestimmen.

Man verfahre auf ähnliche Art wie in 5., eliminire $c$, so bestimmt sich $a = \frac{s^2 - h^2}{2s}$.

8) Aus $c - a = d$ und $b$ dieselbe Bestimmung zu machen.

---

**Kurze und einfache Ableitung der ganzen ebenen Trigonometrie aus den beiden Eigenschaften des ebenen Dreiecks, dass die Summe der drei Winkel 180° be-**

Digitized by Google

trägt, und dass sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten. Vom Herausgeber.

Weil nach den beiden genannten Sätzen

$$1.\quad \frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c},\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$$

und $\sin A=\sin(B+C)$ ist, so ist

$$2.\quad \frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{a}{c},\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

und folglich

$$3.\quad \frac{\sin(B+C)+\sin B}{\sin C}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{\sin(B+C)-\sin B}{\sin C}=\frac{a-b}{c}.$$

Zerlegt man nun die Zähler der beiden Brüche auf den linken Seiten der Gleichheitszeichen in Factoren, und setzt zugleich

$$\sin C=2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C,$$

so erhält man

$$4.\quad \frac{\sin(B+\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{\cos(B+\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{a-b}{c},$$

und folglich

$$5.\quad \frac{\sin(B+\frac{1}{2}C)+\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b+c}{c},$$

$$6.\quad \frac{\sin(B+\frac{1}{2}C)-\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b-c}{c},$$

$$7.\quad \frac{\cos(B+\frac{1}{2}C)+\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{a+c-b}{c},$$

$$8.\quad -\frac{\cos(B+\frac{1}{2}C)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{b+c-a}{c};$$

oder, weil

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C)=\cos\tfrac{1}{2}A,\quad \cos\tfrac{1}{2}(B+C)=\sin\tfrac{1}{2}A$$

ist,

$$9.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b+c}{2c},$$

$$10.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b-c}{2c},$$

$$11.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{a+c-b}{2c},$$

$$12.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{b+c-a}{2c}.$$

Durch Addition von 9. und 10. und durch Subtraction von 11. und 12. ergiebt sich

$$13.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{a-b}{c},$$

woraus ferner durch Division

Digitized by Google

$$14.\quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B) \text{ tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{a-b}{a+b}$$

oder

$$15.\quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}C$$

folgt.

Aus 10. und 11. und aus 9. und 12. folgt durch Multiplication

$$16.\quad \frac{\sin \tfrac{1}{2}A^2 \sin B}{\sin C} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4c^2},$$

$$17.\quad \frac{\cos \tfrac{1}{2}A^2 \sin B}{\sin C} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4c^2};$$

also, weil

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

ist,

$$18.\quad \sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}},$$

$$19.\quad \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}};$$

und folglich durch Division

$$20.\quad \text{tang } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}},$$

und durch Multiplication

$$21.\quad \sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b+c)}.$$

Ferner ergiebt sich aus 18. und 19. leicht

$$22.\quad \cos \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc},$$

$$23.\quad \sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc};$$

also, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, nach einer bekannten goniometrischen Formel,

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - 2a^2}{4bc},$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung sogleich

$$24.\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

erhält.

Aus 4. erhält man auch leicht die beiden Gleichungen

$$25.\quad (a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}C^2 + (a-b)^2 \cos \tfrac{1}{2}C^2 = c^2$$

und

Digitized by Google

26. $(\frac{c}{a+b})^2 \sin(B+\frac{1}{2}C)^2 + (\frac{c}{a-b})^2 \cos(B+\frac{1}{2}C)^2 = 1.$

Setzt man in der letzten Gleichung zuerst

$$\cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = 1 - \sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2,$$

dann

$$\sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = 1 - \cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2;$$

so erhält man

$$27.\quad \sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = \frac{1-(\frac{c}{a-b})^2}{(\frac{c}{a+b})^2-(\frac{c}{a-b})^2},$$

$$28.\quad \cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = -\frac{1-(\frac{c}{a+b})^2}{(\frac{c}{a+b})^2-(\frac{c}{a-b})^2};$$

und hieraus

$$29.\quad \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = -\frac{1-(\frac{c}{a-b})^2}{1-(\frac{c}{a+b})^2}.$$

Nach leichter Rechnung erhält man aber hieraus ferner

$$30.\quad \sin(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a+b}{2c}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{ab}},$$

$$31.\quad \cos(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a-b}{2c}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}},$$

wobei man zu bemerken hat, dass wegen der zweiten der beiden Gleichungen 4. die Grössen $a-b$ und $\cos(B+\frac{1}{2}C)$ immer gleiche Vorzeichen haben. Aus 30. und 31. folgt endlich durch Division

$$32.\quad \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}.$$

Wenn man den Winkel $C$ des Dreiecks $ABC$ durch eine gerade Linie halbirt, so wird man sogleich die geometrische Bedeutung des Winkels $B+\frac{1}{2}C$ erkennen.

Dass im Obigen eine vollständige Abhandlung der ebenen Trigonometrie enthalten ist, wird man sogleich übersehen. Von der gewöhnlichen Entwickelung der obigen Formeln unterscheidet sich dieselbe dadurch, dass man bei der ersteren von der Formel 24. ausgeht, und diese Formel mit Hülfe einer Construction, bei der bekanntlich mehrere Fälle zu unterscheiden sind, beweist. Bei der obigen Entwickelung gelangt man zu dieser und zu allen zur Auflösung der Dreiecke nöthigen Formeln, wenn man nur erst den Satz, dass sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten bewiesen hat, welches bekanntlich äusserst leicht ist, auf rein analytischem Wege und durch ganz allgemeine Schlüsse,

Digitized by Google

weshalb ich der obigen Methode vor der gewöhnlichen den Vorzug geben möchte, da dieselbe überdies sehr leicht und mit sehr geringem Zeitaufwande zum Zwecke führt.

---

Nouvelle batterie galvanique.

(Académie des sciences de Bruxelles. Séance du 6 Février 1841.*)

M. M. Crahay et Quetelet font un rapport favorable sur une nouvelle batterie galvanique, présentée dans une précédente séance par M. J. A. Van Nelsen de Maestricht. Cette pile revient pour le fond à la modification apportée par M. Faraday a la pile de Wollaston, si ce n'est que M. Van Nelsen emploie, pour séparer les cuivres des couples successifs, des carreaux de verre au lieu de papier verni dont M. Faraday fait usage dans le même but. En outre, M. Van Nelsen a adopté le zinc amalgamé. Comme les résultats qu'il en a obtenus, depuis deux ans qu'il en fait usage, sont très satisfaisants, et que cette pile produit, à égalité de nature et de grandeur des éléments, des effets plus énergiques que ceux que l'on obtient des piles ordinairement employées, il ne sera pas sans utilité d'en donner ici la description, et de faire connaitre quelques-uns de ses effets.

Les élements, cuivre et zinc, sont disposées ainsi que nous l'avons dits, comme dans la combinaison de Wollaston; c'est-à-dire que le cuivre, soudé au zinc dans chaque couple, va embrasser le zinc du couple suivant, de maniere à être en regard avec les deux faces de cette plaque, mais sans contact avec elle. Elle diffère de la pile de Wollaston en ce que les lames métalliques sont beaucoup plus rapprochées les unes des autres que dans cette dernière; elles ne s'y trouvent qu'à deux millimètres de distance, et sont maintenues ainsi par des morceaux de liège interposés entre les plaques de zinc et celles de cuivre, tandis que les plaques de cuivre des éléments consécutifs sont séparées par des carreaux de verre de même étendue que les plaques. Elle se distingue encore de la pile de Wollaston en ce que, au lieu de faire plonger chaque paire dans un vase particulier contenant de liquide acidulé, la pile entière est immergée dans une seule auge continue, sans cloisons. Tous les couples sont placés dans une espèce de cadre de bois, soigneusement verni, dans lequel ils sont facilement retenus, sans qu'il soit nécessaire de les attacher par des vis à une barre de bois, ainsi qu'on est obligé de le faire dans la combinaison à la Wollaston. Cette disposition présente encore l'avantage de faciliter beaucoup le désassemblage des éléments. Les couples, réunis dans le cadre, sont descendus tous à la fois dans le liquide acidulé renfermé dans l'auge; on ajoute encore que les lames de zinc sont amalgamées avec soin. La pile que l'auteur construisit, il y a deux ans, consiste en 19 couples, dont les lames de zinc ont 11½ centimètres de longueur sur 8 de largeur. Celles de cuivre ont la même largeur sur une longueur à peu près double, pour se replier autour des la-

*) L'Institut 1re Sect. No. 385. 13. Mai 1841.

Digitized by Google

mes de zinc. Elles sont soudées aux lames de zinc du couple précédent par un prolongement étroit.

Ce petit instrument, qui n'a qu'une section horizontale de 351 centimètres carrés, qui ne consomme que peu d'acide et une fort petite quantité de zinc, produit des effets très énergiques. Plongé dans un mélange de 60 parties en volume d'eau, une d'acide nitrique et autant sulfurique, il fait rougir le charbon de bois avec une lumière dont les yeux peuvent difficilement supporter l'éclat. Un fil de fer de $\frac{1}{2}$ millimètre d'épaisseur sur 35 centimètres de longueur rougit sur toute son étendue. Quand le fil n'a que 25 centimètres de longueur, il acquiert un haut degré d'incandescence, et ne tarde pas à être dispersé en globules. La décomposition de l'eau est opérée avec une très grande rapidité.

Les deux batteries galvaniques que l'auteur a construites pour l'Université Catholique, d'après le plan de celle ci-dessus décrite, mais sur une échelle plus grande, offrent des effets proportionnés à leurs dimensions. Celle du cabinet de physique consiste en 52 couples, dont les lames de zinc ont $16\frac{1}{2}$ centimètres de largeur sur 20 de hauteur. Par son moyen, un fil de platine de $\frac{45}{100}$ de millimètre d'épaisseur sur 45 centimètres de longueur, fut mis en incandescence avec un éclat extraordinaire, et tomba en sept morceaux aux extrémités desquels le métal fondu s'agglomera en boules. Un fil d'argent de $\frac{45}{100}$ d'épaisseur sur 40 centimètres de longueur, rougit fortement et tomba en fragments. Un fil de fer de $1^{mm}$, 22 d'épaisseur sur 40 centimètres de longueur fut porté rapidement à la plus vive ignition, et se réduisit en quatre morceaux dans lesquels, en plusieurs endroits, le fer fondu s'était ramassé en gros globules. Lors de cette dernière expérience la batterie avait déja travaillé depuis longtemps et était très affaiblie. Au début, on avait, afin d'exciter une étincelle, rapproché jusqu'au contact les deux lames de cuivre qui servent de conducteurs; les extremités rapprochées se soudèrent incontinent ensemble, au point qu'il fallut employer un certain effort pour les séparer.

---

In den Novis Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. XV. p. 107 findet man eine ziemlich weitläufige Abhandlung von Lexell, welche die folgende Ueberschrift führt: Solutio problematis algebraici de investigatione numerorum continue proportionalium, quorum datur summa *a* et summa quadratorum *b*. Im Eingange dieser Abhandlung meldet Lexell, dass in Saundersons Algebra sich Auflösungen von Moivre für die beiden Fälle, wenn vier oder fünf Glieder der geometrischen Reihe gesucht werden, befinden, und dass Maclaurin in seiner Algebra solutionis quoddam specimen pro illo tantum casu quo numerus terminorum est impar gegeben, dass er selbst aber die Auflösung des allgemeinen Problems: quo quaeruntur numeri quotcunque continue proportionales, datis eorum summa et summa quadratorum, nicht sowohl propter utilitatem ex hoc problemate redundantem, sondern vielmehr propter

Digitized by Google

egregia ista calculi subsidia, quae ad eius solutionem requiruntur, unternommen habe.

In einem in meinen Händen befindlichen Manuscript hat Johann Friedrich Pfaff sich die folgende noch weit allgemeinere Aufgabe vorgelegt:

Wenn die Summe $a$ von $\mu$ Gliedern einer geometrischen Reihe und die Summe $b$ der $r$ten Potenzen dieser Glieder gegeben ist: die Reihe zu bestimmen, d. h. ihr erstes Glied und ihren Exponenten zu finden;

und hat zugleich einige, wie es mir scheint, sehr bemerkenswerthe allgemeine Gesichtspunkte angegeben, welche zu einer zweckmässigen Auflösung dieses Problems führen können. Indem ich den Lesern des Archivs über die von Pfaff aufgezeichneten Bemerkungen im Folgenden einige Mittheilungen mache, möchte ich mir zugleich erlauben, dieselben zu dem Versuche einer vollständigen Auflösung des in Rede stehenden allgemeinen Problems auf dem von dem genannten, der Wissenschaft leider zu früh entrissenen grossen Mathematiker vorgezeichneten Wege, und zu der Mittheilung derselben in dem Archive aufzufordern.

Bezeichnen wir mit Pfaff das erste Glied der gesuchten Reihe mit $x$, ihren Exponenten mit $y$, so ist die gesuchte Reihe

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3,\ \ldots\ xy^{\mu-1};$$

und nach den Bedingungen der Aufgabe haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$x(1+y+y^2+y^3+\ldots+y^{\mu-1})=a,$$
$$x^r(1+y^r+y^{2r}+y^{3r}+\ldots+y^{(\mu-1)r})=b;$$

oder

$$x\cdot\frac{1-y^\mu}{1-y}=a,\ x^r\cdot\frac{1-y^{\mu r}}{1-y^r}=b.$$

Erhebt man die beiden Seiten der ersten Gleichung auf die $r$te Potenz, und dividirt dann die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man die folgende bloss noch die unbekannte Grösse $y$ enthaltende Gleichung:

$$\left(\frac{1-y^\mu}{1-y}\right)^r\cdot\frac{1-y^r}{1-y^{\mu r}}=\frac{a^r}{b},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a^r}{b}=c$ setzen,

$$\left(\frac{1-y^\mu}{1-y}\right)^{r-1}\cdot\frac{(1-y^r):(1-y)}{(1-y^{\mu r}):(1-y^\mu)}=c,$$

also nach einem bekannten Satze

$$(1+y+y^2+\ldots+y^{\mu-1})^{r-1}\,(1+y+y+y^2+\ldots+y^{r-1})$$
$$=c\{1+y^\mu+y^{2\mu}+\ldots+y^{(r-1)\mu}\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}c\{1+y^\mu+y^{2\mu}+\ldots+y^{(r-1)\mu}\}\\ -(1+y+y^2+\ldots+y^{\mu-1})^{r-1}\,(1+y+y^2+\ldots+y^{r-1})\end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung, mittelst welcher der gesuchte Exponent $y$ bestimmt werden muss, ist offenbar vom Grade $(r-1)\mu$, hat aber

Digitized by Google

eine Eigenschaft, welche es möglich macht, sie auf einen niedrigern Grad zu reduciren. Bezeichnet man nämlich die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens im Allgemeinen durch $f(y)$, so dass also die obige Gleichung die Form

$$f(y) = 0$$

erhält, und setzt nun $\frac{1}{y}$ für $y$, so wird diese Gleichung, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\frac{f(y)}{y^{(r-1)\mu}} = 0.$$

Wenn aber überhaupt die Function

$$F(z) = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{A}$$

einer Gleichung

$$F(z) = 0$$

des $n$ten Grades die Eigenschaft hat, dass sie, wenn man $\frac{1}{z}$ für $z$ setzt, in $\frac{F(z)}{z^n}$ übergeht, so ist jederzeit

$$A = \mathfrak{A},\ B = \mathfrak{B},\ C = \mathfrak{C},\ \text{u. s. w.};$$

d. h. die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Coefficienten der Gleichung sind einander gleich, welches auf folgende Art leicht im Allgemeinen bewiesen werden kann.

Nach der Voraussetzung ist für jedes $z$

$$\frac{A}{z^n} + \frac{B}{z^{n-1}} + \frac{C}{z^{n-2}} + \ldots + \frac{\mathfrak{C}}{z^2} + \frac{\mathfrak{B}}{z} + \mathfrak{A}$$
$$= \frac{Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{A}}{z^n},$$

und folglich für jedes $z$, wenn man mit $z^n$ auf beiden Seiten multiplicirt,

$$A + Bz + Cz^2 + \ldots + \mathfrak{C}z^{n-2} + \mathfrak{B}z^{n-1} + \mathfrak{A}z^n$$
$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + Cz^{n-2} + Bz^{n-1} + Az^n;$$

also nach einem bekannten Satze

$$A = \mathfrak{A},\ B = \mathfrak{B},\ C = \mathfrak{C},\ \text{u. s. w.}$$

wie behauptet wurde.

Daher hat auch unsere obige Gleichung, aus welcher der Exponent $y$ bestimmt werden muss, die Eigenschaft, dass die Coefficienten der vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder einander gleich sind.

Nun hat aber schon Euler in den Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. VI. (M. s. auch Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt von Joh. Andr. Christ. Michelsen. Thl. III. Berlin. 1791. S. 13) gezeigt, dass solche Gleichungen, in denen je zwei vom Anfange und Ende gleich weit abstehende Glieder gleiche Coefficienten haben, sich immer vom $(2n+1)$sten und vom $2n$ten Grade auf den $n$ten herabbringen lassen, worüber Folgendes zu bemerken ist.

Digitized by Google

Wenn die Gleichung zuerst vom $(2n+1)$sten Grade ist, und also im Allgemeinen die Form

$$Az^{2n+1} + Bz^{2n} + \ldots + Kz^{n+1} + Kz^n + \ldots + Bz + A = 0$$

hat, so kann man dieselbe auch auf folgende Art darstellen:

$$A(z^{2n+1}+1) + B(z^{2n-1}+1)z + \ldots + K(z+1)z^n = 0,$$

und man kann also, weil bekanntlich überhaupt

$$\frac{z^{2n+1}+1}{z+1} = z^{2n} - z^{2n-1} + z^{2n-2} - \ldots - z + 1$$

ist, in die Function auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit $z+1$ ohne Rest dividiren, wodurch man eine Gleichung des $2n$ten Grades erhält, in welcher, wie sich bei näherer Untersuchung zeigt, noch die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben. Wenn sich also zeigen lässt, dass jede Gleichung des $2n$ten Grades, in welcher die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben, auf den $n$ten Grad herabgebracht werden kann, so wird dies auch von jeder Gleichung des $(2n+1)$sten Grades von der in Rede stehenden Beschaffenheit bewiesen sein.

Um aber zu zeigen, dass jede Gleichung des $2n$ten Grades, in welcher die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben, auf den $n$ten Grad herabgebracht werden kann, verfährt **Euler** a. a. O. auf folgende Art.

Betrachten wir zuerst die Gleichung des vierten Grades

$$z^4 + Az^3 + Bz^2 + Az + 1 = 0,$$

und denken uns dieselbe auf die Form

$$(z^2 + \alpha z + 1)(z^2 + \beta z + 1) = 0$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, auf die Form

$$z^4 + (\alpha+\beta)z^3 + (\alpha\beta+2)z^2 + (\alpha+\beta)z + 1 = 0$$

gebracht, so haben wir zur Bestimmung von $\alpha$ und $\beta$ die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta = A,\ \alpha\beta + 2 = B \text{ oder } \alpha + \beta = A,\ \alpha\beta = B - 2;$$

und nach einer bekannten Eigenschaft der Gleichungen sind folglich $\alpha$ und $\beta$ die beiden Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades

$$u^2 - Au + B - 2 = 0,$$

können also durch Auflösung dieser Gleichung gefunden werden. Hat man aber auf diese Weise $\alpha$ und $\beta$ gefunden, so erhält man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades durch Auflösung der beiden Gleichungen des zweiten Grades

$$z^2 + \alpha z + 1 = 0,\ z^2 + \beta z + 1 = 0.$$

Betrachten wir ferner die Gleichung des sechsten Grades

$$z^6 + Az^5 + Bz^4 + Cz^3 + Bz^2 + Az + 1 = 0$$

und denken uns dieselbe auf die Form

$$(z^2 + \alpha z + 1)(z^2 + \beta z + 1)(z^2 + \gamma z + 1) = 0$$

oder auf die Form

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} z^6 + (\alpha+\beta+\gamma)z^5 \\ \quad + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3)z^4 \\ \quad + (2\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha\beta\gamma)z^3 \\ \quad + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3)z^2 \\ \quad + (\alpha+\beta+\gamma)z + 1 \end{array}\right\} = 0$$

gebracht, so haben wir zur Bestimmung von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die drei Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma = A,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3 = B,\ 2\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha\beta\gamma = C$$

oder

$$\alpha+\beta+\gamma = A,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = B-3,\ \alpha\beta\gamma = C-2A;$$

und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind also nach einem bekannten Satze von den Gleichungen die drei Wurzeln der Gleichung des dritten Grades

$$u^3 - Au^2 + (B-3)u - C + 2A = 0.$$

Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gefunden, so erhält man die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung des sechsten Grades durch Auflösung der drei folgenden quadratischen Gleichungen

$$z^2 + \alpha z + 1 = 0,\ z^2 + \beta z + 1 = 0,\ z^2 + \gamma z + 1 = 0.$$

Mehrere Mittheilungen zu machen, verbietet jetzt die Beschränktheit des Raums. Dass aber die vorhergehenden Andeutungen zu vielfachen fernern Entwickelungen Veranlassung geben können, liegt deutlich vor Augen. Vorzüglich würde es natürlich auf die Auffindung allgemeiner Gesetze ankommen, und zwar zunächst auf eine völlig allgemeine Entwickelung der Gleichung des $n$ten Grades, durch welche bei einer gegebenen Gleichung des $2n$ten Grades die Hülfsgrösse $u$ besimmt wird. Ohne Beweis giebt Euler a. a. O. die Coefficienten der neun ersten Glieder dieser Gleichung auf folgende Art an:

$$1;\ -A;\ B-n;\ -C+(n-1)A;\ D-(n-2)B+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2};$$

$$-E+(n-3)C-\frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}A;$$

$$F-(n-4)D+\frac{(n-2)(n-5)}{1\cdot 2}B-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$-G+(n-5)E-\frac{(n-3)(n-6)}{1\cdot 2}C+\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}A;$$

$$H-(n-6)F+\frac{(n-4)(n-7)}{1\cdot 2}D-\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}B$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Auf jeden Fall scheint eine neue Untersuchung dieses Gegenstandes und der obigen Aufgabe über die geometrischen Reihen wünschenswerth zu sein. G.

Digitized by Google

# XXIII.

## Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

§. 1.

Sind in einer Ebene vier beliebige Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ (Taf. III. Fig. 1.) gegeben, von denen nie mehr als zwei in derselben Geraden liegen, so wird der Inbegriff der sechs geraden Linien, welche durch diese Punkte gelegt werden können, ein vollständiges Viereck genannt, und die gegebenen Punkte Hauptecken desselben. Je zwei jener Geraden, welche keine Hauptecke gemein haben, heissen Gegenseiten des Viereckes, ihr von den Hauptecken verschiedener Durchschnittspunkt ein zugeordneter Punkt, und der in dem letzteren von den beiden Gegenseiten gebildete Winkel der charakteristische Winkel dieser Seiten. Es hat demnach jedes vollständige Viereck drei Paare von Gegenseiten: $AD$ und $BC$, $AB$ und $CD$, und $AC$ und $BD$; ferner drei zugeordnete Punkte $E$, $F$, $G$; und drei charakterische Winkel: $AED$, $AFB$, und $HGD$. Ferner sollen die drei Verbindungslinien je zweier der zugeordneten Punkte zugeordnete Seiten, das von ihnen gebildete Dreieck zugeordnetes Dreieck und die Winkel des letzteren zugeordnete Winkel genannt werden, während dagegen die durch die Hauptecken gehenden Geraden Hauptseiten und die von irgend zweien derselben gebildeten Winkel Hauptwinkel heissen mögen. Zwischen den Haupt- und zugeordneten Punkten oder Ecken findet übrigens der wesentliche Unterschied statt, dass in den ersteren sich immer drei Hauptseiten, in den letzteren dagegen nur zwei derselben schneiden.

Verbindet man die vier Hauptecken eines vollständigen Viereckes durch einen stetigen Zug, so dass keine derselben übergangen, aber auch keine zwei Mal berührt wird, so lassen sich dadurch, in welcher Ordnung auch diese Punkte auf einander folgen



Digitized by Google

mögen, doch immer nur zwei Paare von Gegenseiten beschreiben, während das dritte Paar stets ausfällt. Eine solche vierseitige Figur nennt man ein einfaches Viereck; die vier durch den stetigen Zug erhaltenen Hauptseiten werden nun speciell Viereckseiten, das nicht erhaltene Paar der Hauptseiten dagegen Diagonalen genannt. Endlich heissen die vier, von je zwei Seiten des einfachen Viereckes gebildeten, Winkel speciell Viereckswinkel; diejenigen acht Winkel hingegen, welche von einer Diagonale und einer Viereckseite gebildet werden, mögen die Benennung Diagonalwinkel erhalten.

## §. 2.

Die vollständigen Vierecke zerfallen nach Verschiedenheit der gegenseitigen Lage der Hauptecken in zwei wesentlich verschiedene Classen. Haben nämlich die Hauptecken eine solche Lage, dass jede derselben ausserhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreieckes liegt, (wie dies in Taf. III. Fig. 1. der Fall ist,) so wird der eine der zugeordneten Punkte, nämlich $E$, unmittelbar durch die zu ihm gehörigen Hauptseiten gebildet, die beiden andern dagegen, $F$ und $G$, entstehen erst durch die Verlängerung jeder von beiden zu ihnen gehörigen Hauptseiten, oder kürzer ausgedrückt: von den zugeordneten Punkten liegt nur einer innerhalb, jeder der beiden anderen ausserhalb der vier Hauptecken. Haben dagegen die letzteren eine solche gegenseitige Lage, dass eine von ihnen innerhalb des von den drei anderen gebildeten Dreieckes liegt, (wie dies in Taf. III. Fig. 2. der Fall ist.) so muss, um die zugeordneten Punkte zu erhalten, von jedem Paare Gegenseiten nur die eine verlängert werden, so dass jeder dieser drei Punkte innerhalb zweier Hauptecken, aber zugleich auch ausserhalb der beiden anderen Hauptecken liegt.

Sucht man jetzt die sämmtlichen einfachen Vierecke auf, welche in dem vollständigen Vierecke der ersten Classe enthalten sind, so bekommt man erstens das gewöhnliche einfache Viereck, $ABCDA$, mit vier hohlen Winkeln, sodann aber zwei sogenannte überschlagene Vierecke, $ADBCA$ und $ABDCA$, mit zwei hohlen und zwei erhabenen Winkeln. Diese einfachen Vierecke sollen im Folgenden durch die Benennung: einfache Vierecke der ersten, zweiten und dritten Form unterschieden werden. Es ist bekannt, dass die Winkelsumme in den Vierecken der ersten Form 4 Rechte, in denen der zweiten und dritten Form hingegen 8 Rechte beträgt.

Werden dagegen auf gleiche Weise die einfachen Vierecke bestimmt, welche in der zweiten Classe der vollständigen Vierecke enthalten sind, so werden zwar ebenfalls ihrer drei gefunden, $ABCDA$, $ADBCA$ und $ABDCA$; allein sie sind sämmtlich nur von einer und derselben Form, indem jedes von ihnen drei hohle und einen erhabenen Winkel enthält. Diese neue Form, deren Winkelsumme jederzeit 4 Rechte beträgt, soll künftig als einfaches Viereck der vierten Form bezeichnet werden.

Sollen endlich die einfachen Vierecke nach dem Betrage ihrer Winkelsummen von einander unterschieden werden, so kann man die der ersten und vierten Form als Vierecke erster Gattung, die der zweiten und dritten Form hingegen als Vierecke zweiter Gattung zusammenfassen.

Digitized by Google

Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich ausschliesslich auf die vollständigen Vierecke erster Classe gründen, und so weit sie ein einfaches Viereck in Betrachtung ziehen müssen, stets das erster Form zu Grunde legen. Die so entwickelten Formeln werden theils die Vierecke der drei übrigen Formen unmittelbar umfassen, theils, wo dies nicht der Fall sein sollte, auf dieselben leicht übergetragen werden können. Um endlich die Vorzeichen in den Formeln hinlänglich bestimmen zu können, soll in der zu Grunde gelegten Construktion (Taf. III. Fig. 1.) die Hauptecke $A$, auf deren vorwärts verlängerten Schenkeln die zugeordneten Punkte $F$ und $G$ liegen, als erste Ecke angenommen und dabei festgesetzt werden, dass die Summe der Hauptwinkel $BAD$ und $BCD$ kleiner als 2 Rechte sei.

## §. 3.

Man führe nunmehr folgende Bezeichnung ein: 1) für die Seiten und ihre Verlängerungen und Abschnitte:

$$AD=a,\quad FD=a_2,\quad AB=b,\quad GB=b_2$$
$$BC=a_1,\quad FC=a_3,\quad CD=b_1,\quad GC=b_3$$
$$AC=c,\quad AE=c_2$$
$$BD=c_1,\quad DE=c_3$$

2) für die charakteristischen Winkel:

$$A\hat{F}B=A,\quad H\hat{G}D=B,\quad A\hat{E}D=C;$$

3) für die Hauptwinkel:

$$B\hat{A}D=(ab),\quad A\hat{D}C=(ab_1),\quad C\hat{A}D=(ac)$$
$$B\hat{C}D=(a_1b_1),\quad A\hat{B}C=(a_1b),\quad C\hat{B}D=(a_1c_1)$$

u. s. w. so dass jeder Hauptwinkel durch die ihn einschliessenden Seiten angedeutet wird;

4) für die zugeordneten Seiten und Winkel:

$$GE=\alpha,\qquad FE=\beta,\qquad FG=\gamma$$
$$G\hat{F}E=(\beta\gamma),\ F\hat{G}E=(\alpha\gamma),\ F\hat{E}G=(\alpha\beta).$$

5) Ferner sollen die von drei Hauptecken gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke heissen und ihr Flächeninhalt in nachstehender Weise bezeichnet werden:

$$ABD=T_1,\ ACD=T_3$$
$$BCD=T_2,\ ACB=T_4;$$

dagegen mögen die von zwei Hauptecken und einem zugeordneten Punkte gebildeten Dreiecke Nebendreiecke heissen und, da es ihrer 12 sind, durch ein $T$ angedeutet werden, dem die Hauptseite, auf welcher das Dreieck steht, und die Nummer des zugeordneten Punktes in seiner Spitze beigesetzt ist; wobei man die Punkte $F$, $G$, $E$ beziehungsweise als ersten, zweiten und dritten Punkt betrachtet. Demnach wäre z. B.



Digitized by Google

$$AED = T_{3a},\ ABF = T_{1b},\ BDG = T_{2c_1}\ \text{u. s. w.}$$

6) Den Flächeninhalt des zugeordneten Dreieckes $EFG$ wollen wir mit $\Delta$ bezeichnen; dagegen sollen die Flächeninhalte der in Taf. III. Fig. 1. enthaltenen einfachen Vierecke

$$ABCDA = F,\ ADBCA = F',\ ABDCA = F''$$

gesetzt werden. Mit Hülfe dieser Bezeichnungen und Benennungen, deren Zweckmässigkeit sich durch das Nachfolgende rechtfertigen wird, können nunmehr die trigonometrischen Relationen des vollständigen Viereckes leicht und übersichtlich entwickelt werden.

## §. 4.

Jede Hauptseite gehört als Viereckseite zu zwei einfachen Vierecken, und als Dreieckseite zu zwei Hauptdreiecken. Nun ist aber aus den Elementen der ebenen Trigonometrie und Tetragonometrie bekannt, dass jede Seite eines geradlinigen Dreiecks gleich der Summe der auf sie bezogenen Projektionen der beiden anderen Dreieckseiten, und dass jede Viereckseite gleich der Summe der auf sie bezogenen Projektionen der drei übrigen Viereckseiten ist, gleichviel von welcher Form das Viereck ist; also wird zuvörderst:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
a &= b\cos(ab') + c\cos(ac') + a_1\cos(a,a_1) \\
&\quad + b_1\cos(ab_1') + c_1\cos(ac_1') + a_1\cos(a_1,a_1') \\
b &= a\cos(ab') + c\cos(bc') + b_1\cos(a_1b') + c_1\cos(bc_1') + b_1\cos(a_1,b_1') \\
c &= a\cos(ac') + b\cos(bc') + c_1\cos(a_1c') + c_1\cos(bc_1') + c_1\cos(a_1,c_1') \\
a_1 &= b\cos(ab_1') + c\cos(ac_1') + a\cos(a_1,a_1') \\
&\quad + b_1\cos(a_1b_1') + c_1\cos(a_1c_1') + a_1\cos(a_1,a_1') \\
b_1 &= a\cos(ab_1') + c\cos(bc_1') + b\cos(a_1,b_1') \\
&\quad + b_1\cos(a_1b_1') + c_1\cos(bc_1') + b_1\cos(a_1,b_1') \\
c_1 &= a\cos(ac_1') + b\cos(bc_1') + c\cos(a_1,c_1') \\
&\quad + b_1\cos(bc_1') + c_1\cos(a_1c_1') + c_1\cos(a_1,c_1')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(aa_1)\cos &+ (bb_1)\cos &+ (cc_1)\cos \\
(ab_1')\cos &+ (ac_1')\cos &+ a_1\cos A = b\cos B + c\cos C \\
(ab')\cos &+ (ac')\cos &+ a\cos A = b_1\cos B + c_1\cos C \\
(a_1b')\cos &+ (a_1c')\cos &+ a_1\cos A = b\cos B_1 + c\cos C_1 \\
(a_1b_1')\cos &+ (a_1c_1')\cos &+ a\cos A = b_1\cos B_1 + c_1\cos C_1 \\
(a,a_1')\cos &+ (b,b_1')\cos &+ (c,c_1')\cos \\
(a,b_1')\cos &+ (a,c_1')\cos &+ a_1\cos A_1 = b\cos B + c\cos C_1 \\
(a,b')\cos &+ (a,c')\cos &+ a\cos A_1 = b_1\cos B + c_1\cos C_1 \\
(a_1,b')\cos &+ (a_1,c')\cos &+ a_1\cos A_1 = b\cos B_1 + c\cos C \\
(a_1,b_1')\cos &+ (a_1,c_1')\cos &+ a\cos A_1 = b_1\cos B_1 + c_1\cos C \\
(a,a_1')\cos &+ (b,b_1')\cos &+ (c,c_1')\cos
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= b\cos(ab') + c\cos(ac') - a_1\cos A = b\cos B + c\cos C \\
b &= a\cos(ab') + c\cos(bc') - b_1\cos B = a\cos A + c\cos C \\
c &= a\cos(ac') + b\cos(bc') - c_1\cos C = a\cos A + b\cos B \\
a_1 &= b\cos(ab_1') + c\cos(ac_1') + a\cos A = b\cos B + c\cos C \\
b_1 &= a\cos(ab_1') + c\cos(bc_1') + b\cos B = a\cos A + c\cos C \\
c_1 &= a\cos(ac_1') + b\cos(bc_1') + c\cos C = a\cos A + b\cos B
\end{aligned}
$$

I.

Werden diese 6 Gleichungen beziehungsweise mit $aa_1, bb_1, cc_1$ multiplicirt, so erhält man linker Hand die Quadrate der Hauptseiten. Je zwei derselben addirt und mit einer entsprechenden dritten verglichen geben die Ausdrücke:

$$
\left.\begin{aligned}
a^2 &= bc\cos(bc) + b_1c_1\cos(b_1c_1) + bb_1\cos B - cc_1\cos C\\
&= b^2 + c_1^2 - 2bc_1\cos(bc_1) = b_1^2 + c^2 - 2b_1c\cos(b_1c)\\
a_1^2 &= bc_1\cos(bc_1) + b_1c\cos(b_1c) + bb_1\cos B - cc_1\cos C\\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(bc) = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos(b_1c_1)\\
b^2 &= ac\cos(ac) + a_1c_1\cos(a_1c_1) + cc_1\cos C - aa_1\cos A\\
&= a^2 + c_1^2 - 2ac_1\cos(ac_1) = a_1^2 + c^2 - 2a_1c\cos(a_1c)\\
b_1^2 &= ac_1\cos(ac_1) + a_1c\cos(a_1c) + cc_1\cos C - aa_1\cos A\\
&= a^2 + c^2 - 2ac\cos(ac) = a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos(a_1c_1)\\
c^2 &= ab\cos(ab) + a_1b_1\cos(a_1b_1) + aa_1\cos A - bb_1\cos B\\
&= a^2 + b_1^2 - 2ab_1\cos(ab_1) = a_1^2 + b^2 - 2a_1b\cos(a_1b)\\
c_1^2 &= ab_1\cos(ab_1) + a_1b\cos(a_1b) + aa_1\cos A - bb_1\cos B\\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab) = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos(a_1b_1)
\end{aligned}\right\} 2.
$$

Demnach können jede zwei Gegenseiten auf drei verschiedene Arten aus vier übrigen Hauptseiten und den 6 von ihnen gebildeten Hauptwinkeln gefunden werden. Führt man endlich noch drei Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ ein, so dass man

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_1^2 &= bc\cos(bc) + bc_1\cos(bc_1) + b_1c\cos(b_1c) + b_1c_1\cos(b_1c_1)\\
\delta_2^2 &= ac\cos(ac) + ac_1\cos(ac_1) + a_1c\cos(a_1c) + a_1c_1\cos(a_1c_1)\\
\delta_3^2 &= ab\cos(ab) + ab_1\cos(ab_1) + a_1b\cos(a_1b) + a_1b_1\cos(a_1b_1)
\end{aligned}\right\} 3.
$$

hat, so ergiebt sich auch noch:

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_1^2 &= b^2 + b_1^2 - 2bb_1\cos B = c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos C\\
\delta_2^2 &= c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos C = a^2 + a_1^2 + 2aa_1\cos A\\
\delta_3^2 &= a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos A = b^2 + b_1^2 + 2bb_1\cos B
\end{aligned}\right\} 4.
$$

## §. 5.

Die geometrische Bedeutung der Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ ergiebt sich sofort, wenn man die Ausdrücke Nr. 4. construirt. Man ziehe nämlich Taf. III. Fig. 3. aus der Hauptecke $B$ die Gerade $BN \parallel AC$ und verbinde $D$ und $N$ durch eine Gerade, so ist $DN = \delta_1$. Zieht man ferner aus $D$ die Gerade $DM \parallel AC$ und verbindet $B$ und $M$, so wird die Gerade $BM = \delta_2$; und macht man $BP \parallel AD$ und $DP \parallel AB$ und verbindet $C$ und $P$, so ist die Gerade $CP = \delta_3$. Diese Construktion zeigt erstens, dass die Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten sind, und zweitens, dass sie sich sämmtlich in einem und demselben Punkte schneiden und gegenseitig halbiren müssen. Bezeichnet man von den Winkeln, welche je zwei der Linien $\delta_1\delta_2\delta_3$ mit einander an ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte machen, diejenigen, die den Seiten $a\ b\ c$ gegenüberliegen, bezichungsweise mit $(\delta_{2,3})\ (\delta_{1,3})\ (\delta_{1,2})$, so hat man noch:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} 4a^2 &= \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\ 4b^2 &= \delta_1^2 + \delta_3^2 - 2\delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\ 4c^2 &= \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12}) \\ 4a_1^2 &= \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\ 4b_1^2 &= \delta_1^2 + \delta_3^2 + 2\delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\ 4c_1^2 &= \delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12}) \end{aligned}\right\} 5.$$

Aus den bisher gefundenen Formeln ergeben sich nun durch zweckmässige Verbindung derselben folgende neue Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1^2 + \delta_2^2 &= 2(c^2 + c_1^2) \\ \delta_1^2 + \delta_3^2 &= 2(b^2 + b_1^2) \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 &= 2(a^2 + a_1^2) \end{aligned}\right\} 6.$$

Demnach ist in jedem vollständigen Vierecke die doppelte Summe der Quadrate zweier Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der doppelten Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der beiden anderen Paare von Gegenseiten.

Unmittelbar ergiebt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1^2 &= -a^2 - a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 \\ \delta_2^2 &= a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2 + c^2 + c_1^2 \\ \delta_3^2 &= a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2 \\ 2(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2) &= 2\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \\ 2(c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2) &= \delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \delta_3^2 \\ 2(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2) &= \delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_3^2 \end{aligned}\right\} 7.$$

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2$$

welches die bekannten von Euler gefundenen Sätze sind. Für die verschiedenen hier vorkommenden Winkel ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \delta_2^2 - \delta_3^2 &= 4aa_1 \cos A, \quad a_1^2 - a^2 = \delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\ \delta_3^2 - \delta_1^2 &= 4bb_1 \cos B, \quad b_1^2 - b^2 = \delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\ \delta_1^2 - \delta_2^2 &= 4cc_1 \cos C, \quad c_1^2 - c^2 = \delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12}) \end{aligned}\right\} 8.$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a_1^2 &= b^2 + b_1^2 - 2cc_1 \cos C = c^2 + c_1^2 + 2bb_1 \cos B \\ b^2 + b_1^2 &= c^2 + c_1^2 - 2aa_1 \cos A = a^2 + a_1^2 + 2cc_1 \cos C \\ c^2 + c_1^2 &= a^2 + a_1^2 - 2bb_1 \cos B = b^2 + b_1^2 + 2aa_1 \cos A \\ 0 &= aa_1 \cos A + bb_1 \cos B + cc_1 \cos C \end{aligned}\right\} 9.$$

Ferner erhält man durch Addition von (2) und (4) und gehörige Substitution aus (1) die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
a^2 + \delta_1^2 &= b^2 + c^2 + 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) \\
&= b_1^2 + c_1^2 + 2bc \cos(bc) \\
a_1^2 + \delta_1^2 &= b^2 + c_1^2 + 2b_1c \cos(b_1c) \\
&= b_1^2 + c^2 + 2bc_1 \cos(bc_1) \\
b^2 + \delta_2^2 &= c^2 + a^2 + 2a_1c_1 \cos(a_1c_1) \\
&= c_1^2 + a_1^2 + 2ac \cos(ac) \\
b_1^2 + \delta_2^2 &= c_1^2 + a^2 + 2ca_1 \cos(a_1c) \\
&= c^2 + a_1^2 + 2ac_1 \cos(ac_1) \\
c^2 + \delta_3^2 &= a^2 + b^2 + 2a_1b_1 \cos(a_1b_1) \\
&= a_1^2 + b_1^2 + 2ab \cos(ab) \\
c_1^2 + \delta_3^2 &= a^2 + b_1^2 + 2a_1b \cos(a_1b) \\
&= a_1^2 + b^2 + 2ab_1 \cos(ab_1)
\end{aligned}\right\} 10.$$

Sind daher die 9 Geraden $aa_1bb_1cc_1\delta_1\delta_2\delta_3$ gegeben, so lassen sich aus je sechsen von ihnen immer zwei Hauptwinkel finden. Sind die Hauptseiten allein gegeben, so reichen diese hin, alle drei charakteristischen Winkel zu berechnen; sollen hingegen die 4 Viereckswinkel irgend eines einfachen Viereckes gefunden werden, so muss ausser den 6 Hauptseiten auch noch eine der Grössen $\delta$ und zwar diejenige gegeben sein, welche zu den Diagonalen dieses Viereckes gehört. Demnach ist also z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= \frac{c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2}{2aa_1} = \frac{\delta_2^2 - \delta_2^2}{4aa_1} \\
\cos B &= \frac{a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2}{2bb_1} = \frac{\delta_3^2 - \delta_1^2}{4bb_1} \\
\cos C &= \frac{b^2 + b_1^2 - a^2 - a_1^2}{2cc_1} = \frac{\delta_1^2 - \delta_3^2}{4cc_1}
\end{aligned}\right\} 11.$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\cos(ab) &= \frac{c^2 + \delta_3^2 - a_1^2 - b_1^2}{2ab}, \quad \cos(ab_1) = \frac{c_1^2 + \delta_3^2 - a_1^2 - b^2}{2ab_1} \\
\cos(a_1b_1) &= \frac{c^2 + \delta_3^2 - a^2 - b^2}{2a_1b_1}, \quad \cos(a_1b) = \frac{c_1^2 + \delta_3^2 - a^2 - b_1^2}{2a_1b}
\end{aligned}\right\} 12.$$

u. s. w.

## §. 6.

Neben den in §. 4. unter Nr. 1. zusammengestellten Fundamentalgleichungen giebt es aber bekanntlich noch eine zweite, in welcher die Sinusse der Winkel vorkommen, und die gewöhnlich unter der Form: $0 = m \sin P + n \sin Q + p \sin R$ für das Viereck, und $m \sin P = n \sin Q$ für das Dreieck, dargestellt wird. Der Kürze halber sollen im Folgenden beide gleich zusammengezogen werden; dies giebt die Ausdrücke:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{llll}
a\sin(ac_1)=b\sin(bc_1)=c\sin C-a_1\sin(a_1c_1)\\
\qquad\qquad\quad=c\sin C-b_1\sin(b_1c_1)\\
a\sin(ac)=b_1\sin(b_1c)=c_1\sin C-a_1\sin(a_1c)\\
\qquad\qquad\quad=c_1\sin C-b\sin(bc)\\
a\sin(ab_1)=c\sin(b_1c)=b\sin B+a_1\sin(a_1b_1)\\
\qquad\qquad\quad=b\sin B+c_1\sin(b_1c_1)\\
a\sin(ab)=c_1\sin(bc_1)=b_1\sin B+a_1\sin(a_1b)\\
\qquad\qquad\quad=b_1\sin B+c\sin(bc)\\
b\sin(a_1b)=c\sin(a_1c)=a\sin A+b_1\sin(a_1b_1)\\
\qquad\qquad\quad=a\sin A+c_1\sin(a_1c_1)\\
b\sin(ab)=c_1\sin(ac_1)=a_1\sin A+b_1\sin(ab_1)\\
\qquad\qquad\quad=a_1\sin A+c\sin(ac)
\end{array}\right\}\ 13.$$

Multiplicirt man diese sechs Gleichungen ihrer Ordnung nach mit den Grössen $c_1cb_1ba_1a$, so erhält man durchgängig die Produkte je zweier Hauptseiten in den Sinus des eingeschlossenen Haupt- oder charakteristischen Winkels. Werden daher statt dieser Produkte die entsprechenden Flächenräume gesetzt und zugleich die Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l}
aa_1\sin A=2F''\\
bb_1\sin B=2F'\\
cc_1\sin C=2F
\end{array}\right\}\ 14.$$

eingeführt, so ergiebt sich bei gehöriger Vergleichung:

$$\left.\begin{array}{l}
F=T_1+T_2=T_3+T_4\\
F'=T_1-T_4=T_3-T_2\\
F''=T_1-T_3=T_4-T_2
\end{array}\right\}\ 15.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Grössen $FF'F''$ die Flächeninhalte der einfachen Vierecke erster, zweiter und dritter Form sein müssen, und ein Blick auf Taf. III. Fig. 3. giebt unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Dreieck } BCP=F''=\frac{1}{2}aa_1\sin A=\frac{1}{4}\delta_2\delta_3\sin(\delta_2,_3)\\
\text{Dreieck } DCP=F'=\frac{1}{2}bb_1\sin B=\frac{1}{4}\delta_1\delta_3\sin(\delta_1,_3)\\
\text{Dreieck } DBM=F=\frac{1}{2}cc_1\sin C=\frac{1}{4}\delta_1\delta_2\sin(\delta_1,_2)
\end{array}\right\}\ 16.$$

Durch gehörige Verbindung der Ausdrücke in (14) und (15) findet man noch die Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll}
F+F'=T_1+T_3,\ F-F'=T_2+T_4\\
F+F''=T_1+T_4,\ F-F''=T_2+T_3\\
F'+F''=T_1-T_2,\ F'-F''=T_3-T_4
\end{array}\right\}\ 17.$$

ingleichen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} 2T_1 &= F + F' + F'' \\ 2T_2 &= F + F' - F'' \\ 2T_3 &= F - F' + F'' \\ 2T_4 &= F - F' - F'' \end{aligned}\right\} 18.$$

## §. 7.

Wie wir bisher Relationen zwischen den Seiten, ingleichen zwischen den verschiedenen Flächenräumen zusammengestellt haben, so lassen sich auch Relationen zwischen den verschiedenen Winkeln angeben. Zu dem Ende setze man:

$$\left.\begin{aligned} (ab) + (a_1b_1) &= \psi \\ (ac_1) - (a_1c) &= \psi' \\ (bc_1) - (b_1c) &= \psi'' \end{aligned}\right\} 19.$$

so ist zuvörderst klar, dass, wenn $\psi \lessgtr 180°$ wird, $\psi'$ und $\psi'' \gtrless 0°$ werden muss, weshalb denn unter allen Umständen

$$\psi + \psi' + \psi'' = 180° \quad (20)$$

ist. Auch zeigt ein Blick auf Taf. III. Fig. 1., dass $\psi$ die Summe zweier gegenüberliegender Hauptwinkel im einfachen Vierecke der ersten Form, $360° + \psi'$ und $360° + \psi''$ hingegen dasselbe für die einfachen Vierecke zweiter und dritter Form ist. Mit Hülfe dieser drei Winkel nun so wie der drei charakteristischen Winkel des Viereckes können alle 12 Hauptwinkel auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} (ab) &= \tfrac{1}{2}(\psi - A + B) - 90° \\ (a_1b_1) &= \tfrac{1}{2}(\psi + A - B) + 90° \\ (ab_1) &= 90° + \tfrac{1}{2}(-\psi + A + B) \\ (a_1b) &= 270° - \tfrac{1}{2}(\psi + A + B) \end{aligned}\right\} 21.$$

$$\left.\begin{aligned} (ac) &= 90° - \tfrac{1}{2}(A + C + \psi'), & (bc) &= \tfrac{1}{2}(B + C - \psi'') - 90° \\ (a_1c_1) &= 90° - \tfrac{1}{2}(A + C - \psi'), & (b_1c_1) &= \tfrac{1}{2}(B + C + \psi'') - 90° \\ (ac_1) &= 90° + \tfrac{1}{2}(A - C + \psi'), & (bc_1) &= 90° + \tfrac{1}{2}(-B + C + \psi'') \\ (a_1c) &= 90° - \tfrac{1}{2}(-A + C + \psi'), & (b_1c) &= 90° - \tfrac{1}{2}(B - C + \psi'') \end{aligned}\right\} 22.$$

Es sind daher allgemein in jedem einfachen Vierecke die vier Viereckswinkel bekannt, wenn die Summe zweier gegenüberliegender, und die beiden zu den Viereckssseiten gehörigen charakteristischen Winkel gegeben sind. Mit Hülfe dieser Ausdrücke lassen sich eine ungemein grosse Masse von Relationen zwischen den einzelnen Winkeln des vollständigen Viereckes bilden. Im Folgenden sollen einige derselben zusammengestellt werden, da wir sie späterhin in Anwendung bringen müssen.

$$\left.\begin{aligned} \cos(ab)\cos(a_1b_1) + \cos(ab_1)\cos(a_1b) &= +\cos\psi - \cos A\cos B \\ \cos(ab)\cos(a_1b) + \cos(a_1b_1)\cos(ab_1) &= -\cos A + \cos\psi\cos B \\ \cos(ab)\cos(ab_1) + \cos(a_1b_1)\cos(a_1b) &= +\cos B - \cos\psi\cos A \end{aligned}\right\} 23.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}\sin(ab)\sin(a_1b_1)+\sin(ab_1)\ \sin(a_1b)=-\cos\psi-\cos A\cos B\\ \sin(ab)\sin(a_1b)+\sin(a_1b_1)\sin(ab_1)=+\cos A+\cos\psi\cos B\\ \sin(ab)\sin(ab_1)+\sin(a_1b_1)\sin(a_1b)=-\cos B-\cos\psi\cos A\end{array}\right\}\ 24.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(ab)\cos(a_1b_1)-\cos(ab_1)\ \cos(a_1b)=-\sin A\sin B\\ \cos(ab)\cos(a_1b)\ -\cos(a_1b_1)\cos(ab_1)=-\sin\psi\sin B\\ \cos(ab)\cos(ab_1)\ -\cos(a_1b_1)\cos(a_1b)=-\sin\psi\sin A\end{array}\right\}\ 25.$$

u. s. w. Nimmt man hingegen linker Hand immer nur die Hälften der Hauptwinkel, so wird:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)-\cos\frac{1}{2}(ab_1)\ \cos\frac{1}{2}(a_1b)\\ \qquad=\cos\frac{1}{2}\psi-\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\\ \cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(a_1b)\ -\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)\cos\frac{1}{2}(ab_1)\\ \qquad=\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}B\\ \cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(ab_1)\ -\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)\cos\frac{1}{2}(a_1b)\\ \qquad=\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}A\end{array}\right\}\ 26.$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(ab)\sin\frac{1}{2}(a_1b_1)-\sin\frac{1}{2}(ab_1)\ \sin\frac{1}{2}(a_1b)\\ \qquad=\cos\frac{1}{2}\psi+\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\\ \sin\frac{1}{2}(ab)\sin\frac{1}{2}(a_1b)\ -\sin\frac{1}{2}(a_1b_1)\sin\frac{1}{2}(ab_1)\\ \qquad=\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}B\\ \sin\frac{1}{2}(ab)\sin\frac{1}{2}(ab_1)\ -\sin\frac{1}{2}(a_1b_1)\sin\frac{1}{2}(a_1b)\\ \qquad=\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}A\end{array}\right\}\ 27.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)+\cos\frac{1}{2}(ab_1)\ \cos\frac{1}{2}(a_1b)=\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\\ \cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(a_1b)\ +\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)\cos\frac{1}{2}(ab_1)=\sin\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}B\\ \cos\frac{1}{2}(ab)\cos\frac{1}{2}(ab_1)\ +\cos\frac{1}{2}(a_1b_1)\cos\frac{1}{2}(a_1b)=\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}A\end{array}\right\}\ 28.$$

u. s. w. Wollte man alle möglichen Combinationen der vorliegenden Gattung unter den 12 Hauptwinkeln entwickeln, so würde dies 72 verschiedene Systeme von Ausdrücken geben, deren jedes aus drei einzelnen Gleichungen bestände. Es lohnt jedoch nicht der Mühe, mehr von diesen Formeln hier aufzuführen, da sie, sobald man ihrer bedarf, aus den Gleichungen (21) und (22) unmittelbar gefunden werden können.

## §. 8.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun dazu übergehen, andere verstektere Relationen zwischen den Bestandtheilen des vollständigen Viereckes aufzusuchen, zu welchem Ende wir folgendes trigonometrische Theorem vorausschicken, das wir an einem anderen Orte (M. s. Nr. XIV. im 2. Hefte) näher entwickelt und begründet haben. Sind nämlich $klmn$ die drei Seiten, $KMN$ die ihnen gegenüberliegenden Winkel und $\Theta$ der Flächeninhalt irgend eines beliebigen Dreieckes, und werden für ein anderes, ebenfalls ganz beliebiges, Dreieck dieselben Grössen beziehungsweise mit $k_1, m_1, n_1$, $K_1 M_1 N_1 \Theta_1$ bezeichnet;

Digitized by Google

so finden für den Fall, dass $n = n_1$ ist, stets folgende Gleichungen statt:

$$\left.\begin{aligned} k^2 k_1^2 + m^2 m_1^2 - 2kk_1 mm_1 \cos(N \pm N_1) &= n^2(k_1^2 + m^2 - 2k_1 m \cos(K \pm M_1)) \\ &= n^2(k^2 + m_1^2 - 2km_1 \cos(M \pm K_1)) \\ k^2 m_1^2 + k_1^2 m^2 - 2kk_1 mm_1 \cos(N \pm N_1) &= n^2(k^2 + k_1^2 - 2kk_1 \cos(M \pm M_1)) \\ &= n^2(m^2 + m_1^2 - 2mm_1 \cos(K \pm K_1)) \end{aligned}\right\} 29.$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2{}_{km} &= (k + k_1 + m - m_1)(k + k_1 - m + m_1)(k - k_1 + m + m_1)(-k + k_1 + m + m_1) - 8kk_1 mm_1 \\ &= 16(\Theta \pm \Theta_1)^2 + 8kk_1 mm_1 \cos(N \pm N_1) \\ &= 16\left(\frac{\Theta(m_1^2 - k_1^2) \pm \Theta_1(m^2 - k^2)}{n^2}\right)^2 + 8kk_1 mm_1 \cos[(M - K) \pm (M_1 - K_1)] \end{aligned}\right\} 30.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} 2\Theta &= k_1 m \sin K \cos M_1 + km_1 \cos K_1 \sin M \\ &= kk_1 \sin M \cos M_1 + mm_1 \sin K \cos K_1 \\ 2\Theta_1 &= k_1 m \cos K \sin M_1 + km_1 \sin K_1 \cos M \\ &= kk_1 \cos M \sin M_1 + mm_1 \cos K \sin K_1 \end{aligned}\right\} 31.$$

## §. 9.

Die vorstehenden Ausdrücke gestatten nun eine unmittelbare Anwendung auf das Viereck, da in diesem jede Hauptseite auch zu zwei Hauptdreiecken gehört. Setzt man daher zuerst $c = n$ und dann $c_1 = n$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} c^2 c_1^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi \\ c^2 f_1^2 &= a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi \\ c_1^2 f_2^2 &= a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi \end{aligned}\right\} 32.$$

$$\left.\begin{aligned} c^2\delta_2^2 &= a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A+B) \\ c_1^2\delta_2^2 &= a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A-B) \\ c^2\eta_1^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A+B) \\ c_1^2\eta_2^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A-B) \end{aligned}\right\} 33.$$

die vier Grössen $f_1 f_2 \eta_1 \eta_2$ bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f_1^2 &= a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(C+\psi) = b^2 + b_1^2 - 2bb_1 \cos(C-\psi'') \\ f_2^2 &= a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(C-\psi') = b^2 + b_1^2 - 2bb_1 \cos(C+\psi'') \\ \eta_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos[(bc) - (ac)] \\ &= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos[(b_1 c) - (a_1 c)] \\ \eta_2^2 &= a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos[(ac_1) - (b_1 c_1)] \\ &= a_1^2 + b^2 - 2a_1 b \cos[(bc_1) - (a_1 c_1)] \end{aligned}\right\} 34.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Hülfsgrössen ist folgende. Denkt man sich (Taf. III. Fig. 4.) in dem einfachen Vierecke $aba_1b_1$ die beiden über der Diagonale $c$ stehenden Seiten $b$ und $a_1$ mit einander vertauscht, so erhält man ein neues Viereck von der Ordnung $aa_1bb_1$. In diesem ist die eine Diagonale $c$ unverändert geblieben; statt der anderen Diagonale $c_1$ aber des ursprünglichen Vierecks ist eine neue Diagonale entstanden, welche gleich $f_1$ ist. Die doppelte Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Diagonalen $c$ und $f_1$ ist dann gleich der Grösse $\eta_1$. Hätte man dagegen in Taf. III. Fig. 4. die beiden Seiten $a_1 b_1$ über der Diagonale $c_1$ mit einander vertauscht, so erhielte man ein neues Viereck von der Ordnung $abb_1a_1$ und in diesem würden $c_1$ und $f_2$ die beiden Diagonalen und $\eta_2$ die doppelte Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte sein. Uebrigens ist klar, dass in beiden abgeänderten Vierecken die Grössen $F$ und $\psi$ ihren Werth nicht ändern. — Endlich findet man mittelst des Theorems Nr. 30. noch die Formeln:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^2_{ab} &= (a+a_1+b-b_1)(a+a_1-b+b_1)(a-a_1+b+b_1)\times \\
&\qquad \times(-a+a_1+b+b_1)-8aa_1bb_1 \\
&= 16F^2+8aa_1bb_1\cos\psi \\
&= 16(F'\pm F'')^2-8aa_1bb_1\cos(A\mp B) \\
&= 16\left(\frac{T_1(b_1^2-a_1^2)-T_2(b^2-a^2)}{c_1^2}\right)^2-8aa_1bb_1\cos(A+B) \\
&= 16\left(\frac{T_2(b^2-a_1^2)-T_1(b_1^2-a^2)}{c^2}\right)-8aa_1bb_1\cos(A-B)
\end{aligned}\right\} 35.$$

## §. 10.

Wendet man das allgemeine Theorem auf diejenigen Hauptdreiecke an, welche über den Seiten $b$ und $b_1$ stehen, d. h. setzt man $b=s$ und dann $b_1=s$, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
b^2b_1^2 &= a^2a_1^2+c^2c_1^2-2aa_1cc_1\cos\psi' \\
b^2c_1^2 &= a^2c^2+a_1^2c_1^2-2aa_1cc_1\cos\psi' \\
b_1^2c_2^2 &= a^2c_1^2+a_1^2c^2-2aa_1cc_1\cos\psi'
\end{aligned}\right\} 36.$$

$$\left.\begin{aligned}
b^2\delta_2^2 &= a^2c^2+a_1^2c_1^2+2aa_1cc_1\cos(A-C) \\
b_1^2\delta_2^2 &= a^2c_1^2+a_1^2c^2+2aa_1cc_1\cos(A+C) \\
b^2\zeta_1^2 &= a^2a_1^2+c^2c_1^2+2aa_1cc_1\cos(A-C) \\
b_1^2\zeta_2^2 &= a^2a_1^2+c^2c_1^2+2aa_1cc_1\cos(A+C)
\end{aligned}\right\} 37.$$

$$\left.\begin{aligned}
e_1^2 &= a^2+a_1^2-2aa_1\cos(\psi+B)=c^2+c_1^2+2cc_1\cos(B-\psi'') \\
e_2^2 &= a^2+a_1^2-2aa_1\cos(\psi-B)=c^2+c_1^2+2cc_1\cos(B+\psi'') \\
\zeta_1^2 &= a^2+c^2-2ac\cos[(ab)+(bc)] \\
&= a_1^2+c_1^2-2a_1c_1\cos[(bc_1)+(a_1b)] \\
\zeta_2^2 &= a^2+c_1^2-2a_1c\cos[(ab_1)+(b_1c_1)] \\
&= a_1^2+c^2-2a_1c\cos[(a_1b_1)+(b_1c)]
\end{aligned}\right\} 38.$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^2_{ac} &= (a+a_1+c-c_1)(a+a_1-c+c_1)(a-a_1+c+c_1)\times \\
&\qquad \times(-a+a_1+c+c_1)-8aa_1cc_1 \\
&= 16F^2+8aa_1cc_1\cos\psi' \\
&= 16(F\pm F'')^2-8aa_1cc_1\cos(A\mp C) \\
&= 16\left(\frac{T_1(c^2-a_1^2)+T_2(c_1^2-a^2)}{b^2}\right)^2-8aa_1cc_1\cos(A+C) \\
&= 16\left(\frac{T_2(c_1^2-a_1^2)+T_2(c^2-a^2)}{b_1^2}\right)^2-8aa_1cc_1\cos(A-C)
\end{aligned}\right\} 39.$$

Vertauscht man (Taf. III. Fig. 5.) über der Diagonale $b$ die beiden Viereckseiten $a_1$ und $c$, so erhält man ein neues Viereck, in welchem $b$ und $e_1$ die Diagonalen und $\zeta_1$ die doppelte Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der letzteren sind; vertauscht man dagegen die beiden Seiten $a_1$ und $c_1$ über der Diagonale $b_1$, so werden $b_1$ und $e_2$ die neuen Diagonalen, und $\zeta_2$ die doppelte Verbindungslinie zwischen deren Mittelpunkten.

Digitized by Google

## §. 11.

Wendet man endlich das allgemeine Theorem auf die Hauptdreiecke über den Seiten $a$ und $a_1$ an, so ergeben sich für $a=n$ und $a_1=n$ die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a^2a_1{}^2 &= b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2bb_1cc_1\cos\psi'' \\ a^2d_1{}^2 &= b^2c^2 + b_1{}^2c_1{}^2 - 2bb_1cc_1\cos\psi'' \\ a^2d_2{}^2 &= b^2c_1{}^2 + b_1{}^2c^2 - 2bb_1cc_1\cos\psi'' \end{aligned}\right\} 40.$$

$$\left.\begin{aligned} a^2\delta_1{}^2 &= b^2c^2 + b_1{}^2c_1{}^2 + 2bb_1cc_1\cos(B-C) \\ a_1{}^2\delta_1{}^2 &= b^2c_1{}^2 + b_1{}^2c^2 + 2bb_1cc_1\cos(B+C) \\ a^2\varepsilon_1{}^2 &= b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 + 2bb_1cc_1\cos(B-C) \\ a_1{}^2\varepsilon_2{}^2 &= b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 + 2bb_1cc_1\cos(B+C) \end{aligned}\right\} 41.$$

$$\left.\begin{aligned} d_1{}^2 &= c^2+c_1{}^2-2cc_1\cos(A+\psi') = b^2+b_1{}^2+2bb_1\cos(\psi-A) \\ d_2{}^2 &= c^2+c_1{}^2-2cc_1\cos(A-\psi') = b^2+b_1{}^2+2bb_1\cos(\psi+A) \\ \varepsilon_1{}^2 &= b^2+c^2 - 2bc\cos[(ac)+(ab)] \\ &= b_1{}^2+c_1{}^2-2b_1c_1\cos[(ac_1)+(ab_1)] \\ \varepsilon_2{}^2 &= b^2+c_1{}^2-2bc_1\cos[(a_1b)+(a_1c_1)] \\ &= b_1{}^2+c^2-2b_1c\cos[(a_1c)+(a_1b)] \end{aligned}\right\} 42.$$

Hier entstehen $d_1$ und $\varepsilon_1$ auf die bekannte Weise, wenn über $a$ in Taf. III. Fig. 6. die Seiten $b$ und $c_1$ vertauscht werden; hingegen erhält man die Diagonale $d_2$ und die Verbindungslinie $\varepsilon_2$, wenn man über $b_1$ die Seiten $a_1$ und $c_1$ verwechselt. Endlich ist noch:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2{}_{bc} &= (b+b_1+c-c_1)(b+b_1-c+c_1)(b-b_1+c+c_1)\times \\ &\qquad \times(-b+b_1+c+c_1) - 8bb_1cc_1 \\ &= 16F''^2 + 8bb_1cc_1\cos\psi'' \\ &= 16(F\pm F')^2 - 8bb_1cc_1\cos(B\mp C) \\ &= 16\left(\frac{T_1(b^2-c_1{}^2)+T_1(b_1{}^2-c^2)}{a^2}\right)^2 - 8bb_1cc_1\cos(B+C) \\ &= 16\left(\frac{T_1(b^2-c^2)+T_2(b_1{}^2-c_1{}^2)}{a_1{}^2}\right)^2 - 8bb_1cc_1\cos(B-C) \end{aligned}\right\} 43.$$

## §. 12.

Von den gefundenen Ausdrücken wollen wir nun zuerst folgende zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned} a^2a_1{}^2 &= b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2bb_1cc_1\cos\psi'' \\ b^2b_1{}^2 &= a^2a_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2aa_1cc_1\cos\psi' \\ c^2c_1{}^2 &= a^2a_1{}^2 + b^2b_1{}^2 - 2aa_1bb_1\cos\psi \end{aligned}\right\} 44.$$

Es ist demnach in jedem einfachen Vierecke das Quadrat des Produktes beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Produkte je zweier Gegenseiten, vermindert um das doppelte Produkt sämmtlicher vier Seiten in den Cosinus der Summe zweier Gegenwinkel. Dieser

Digitized by Google

Satz bildet den Ptolemäischen Lehrsatz in seiner grössten Allgemeinheit; er geht in den letzteren über, wenn $\psi = 180°$ wird, wo dann $\psi' = \psi'' = 0°$ ist. Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} 16F^2 &= (a+a_1+b-b_1)\,(a+a_1-b+b_1)\,(a-a_1+b+b_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+b+b_1)-16aa_1bb_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi \\ 16F'^2 &= (a+a_1+c-c_1)\,(a+a_1-c+c_1)\,(a-a_1+c+c_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+c+c_1)-16aa_1cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi' \\ 16F''^2 &= (b+b_1+c-c_1)\,(b+b_1-c+c_1)\,(b-b_1+c+c_1)\times \\ &\quad \times(-b+b_1+c+c_1)-16bb_1cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi'' \end{aligned}\right\} 45.$$

Demnach ist der vierfache Flächeninhalt jedes einfachen Viereckes gleich der Quadratwurzel aus einem Unterschiede, dessen Minuendus aus dem Produkte der vier Ueberschüsse je dreier Seiten über die vierte besteht, und dessen Subtrahendus gleich ist dem 16fachen Produkte der vier Seiten in das Quadrat des Cosinus von der halben Summe zweier Gegenwinkel.

Sind daher vier Seiten gegeben, um daraus ein einfaches Viereck zu bilden, so wird dies den grössten oder kleinsten Flächenraum erhalten, wenn es beziehungsweise ein Sehnenviereck erster oder zweiter Form bildet.

## §. 13.

Die Gleichungen Nr. 44. zeigen ferner, dass, wenn man die Produkte je zweier Gegenseiten eines vollständigen Viereckes als die Werthe der Seiten eines geradlinigen Dreieckes betrachtet, alsdann die Winkel $\psi\ \psi'\ \psi''$ die Winkel dieses Dreieckes sein müssen. Wendet man daher auf diese Ausdrücke die bekannten Transformationen der ebenen Trigonometrie an, so erhält man sogleich, wenn zur Abkürzung $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 2ss_1$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} aa_1bb_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi &= ss_1\,(ss_1-cc_1) \\ aa_1cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi' &= ss_1\,(ss_1-bb_1) \\ bb_1cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}\psi'' &= ss_1\,(ss_1-aa_1) \end{aligned}\right\} 46.$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\psi &= \frac{(ss_1-aa_1)\,(ss_1-bb_1)}{ss_1\,(ss_1-cc_1)} \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\psi' &= \frac{(ss_1-aa_1)\,(ss_1-cc_1)}{ss_1\,(ss_1-bb_1)} \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\psi'' &= \frac{(ss_1-bb_1)\,(ss_1-cc_1)}{ss_1\,(ss_1-aa_1)} \end{aligned}\right\} 47.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\psi''-\psi')}{\sin\tfrac{1}{2}\psi} &= \frac{aa_1+bb_1}{cc_1} \\ \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\psi''-\psi')}{\cos\tfrac{1}{2}\psi} &= \frac{aa_1-bb_1}{cc_1} \end{aligned}\right\} 48.$$

Die Gleichung (46) zeigt übrigens, dass so lange nicht $\psi = 180°$ ist, immer

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} aa_1 + bb_1 &> cc_1 \\ aa_1 + cc_1 &> bb_1 \\ bb_1 + cc_1 &> aa_1 \end{aligned}\right\} 49.$$

sein muss, d. h. in jedem vollständigen Vierecke ist die Summe der Rechtecke aus je zwei Paaren von Gegenseiten grösser als das Rechteck aus dem dritten Paare derselben. — Wir wollen ferner den Flächeninhalt des Dreieckes, welches die Grössen $aa_1$ $bb_1$ $cc_1$ zu Seiten hat, mit $E^2$ bezeichnen und $E$ die excentrische Fläche des Viereckes nennen, so findet man für dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} E^4 &= \tfrac{1}{16}(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1)(aa_1-bb_1+cc_1) \\ &\qquad \times(-aa_1+bb_1+cc_1) \\ \pm E^2 &= \tfrac{1}{2}aa_1bb_1 \sin\psi = \tfrac{1}{2}aa_1cc_1 \sin\psi' = \tfrac{1}{2}bb_1cc_1 \sin\psi'' \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2}{\cot\psi+\cot\psi'+\cot\psi''} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2+b^2b_1^2-c^2c_1^2}{\cot\psi} \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2-b^2b_1^2+c^2c_1^2}{\cot\psi'} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{-a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2}{\cot\psi''} \end{aligned}\right\} 50.$$

Diese Fläche ist positiv, Null, oder negativ, je nachdem $\psi$ kleiner, gleich oder grösser als 180° ist. Sie drückt demnach gewissermaassen die Grösse der Abweichung des Viereckes von einem Sehnenviereck aus, weshalb der oben für sie gewählte Name nicht ganz unpassend sein möchte. Uebrigens lässt sich $E$ noch auf mehrere andere Arten ausdrücken. So erhält man z. B.

$$8E^2 = \frac{aa_1(d_1^2-d_2^2)}{\sin A} = \frac{bb_1(e_1^2-e_2^2)}{\sin B} = \frac{cc_1(f_2^2-f_1^2)}{\sin C} \quad 51.$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= \tfrac{1}{16}(ab+a_1b_1+cf_1)\ (ab+a_1b_1-cf_1) \\ &\qquad \times(ab-a_1b_1+cf_1)\ (-ab+a_1b_1+cf_1) \\ &= \tfrac{1}{16}(ab_1+a_1b+c_1f_2)\ (ab_1+a_1b-c_1f_2) \\ &\qquad \times(ab_1-a_1b+c_1f_2)\ (-ab_1+a_1b+c_1f_2) \\ &= \tfrac{1}{16}(ac+a_1c_1+be_1)\ (ac+a_1c_1-be_1) \\ &\qquad \times(ac-a_1c_1+be_1)\ (-ac+a_1c_1+be_1) \\ &= \tfrac{1}{16}(ac_1+a_1c+b_1e_2)\ (ac_1+a_1c-b_1e_2) \\ &\qquad \times(ac_1-a_1c+b_1e_2)\ (-ac_1+a_1c+b_1e_2) \\ &= \tfrac{1}{16}(bc+b_1c_1+ad_1)\ (bc+b_1c_1-ad_1) \\ &\qquad \times(bc-b_1c_1+ad_1)\ (-bc+b_1c_1+ad_1) \\ &= \tfrac{1}{16}(bc_1+b_1c+a_1d_2)\ (bc_1+b_1c-a_1d_2) \\ &\qquad \times(bc_1-b_1c+a_1d_2)\ (-bc_1+b_1c+a_1d_2) \end{aligned}\right\} 52.$$

Die letztern Gleichungen zeigen, dass das Maass der Abweichung des Viereckes vom Sehnenviereck stets dasselbe bleibt, wenn man auch über irgend einer beliebigen Hauptseite zwei andere Hauptseiten verwechselt; so dass hiernach eine und dieselbe excentrische Fläche zu neun verschiedenen Vierecken gehört.



Digitized by Google

## §. 14.

Aus den in den vorletzten drei Paragraphen gefundenen Ausdrücken können nun eine ziemliche Zahl anderer abgeleitet werden, von denen indessen nur einige beispielsweise hier Platz finden sollen.

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1^2 &= \frac{(b^2c^2+b_1{}^2c_1{}^2+2bb_1cc_1\cos(B-C))(b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2+2bb_1cc_1\cos(B+C))}{b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi''}\\
a'^2 &= \frac{(b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2-2bb_1cc_1\cos(B+C))(b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi'')}{b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2+2bb_1cc_1\cos(B-C)}\\
a_1'^2 &= \frac{(b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2-2bb_1cc_1\cos(B+C))(b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi'')}{b^2c^2+b_1{}^2c_1{}^2+2bb_1cc_1\cos(B-C)}\\
b'^2c'^2 &= \frac{(b^2c^2+b_1{}^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi'')(b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2-2bb_1cc_1\cos\psi'')}{b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi''}\\
\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2 &= \frac{(b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2+2bb_1cc_1\cos(B+C))(b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2+2bb_1cc_1\cos(B-C))}{b^2b_1{}^2+c^2c_1{}^2-2bb_1cc_1\cos\psi''}
\end{aligned}\right\}\ 54.$$

$$\frac{a^2}{a_1{}^2}=\frac{b^2c^2+b_1{}^2c_1{}^2+2bb_1cc_1\cos(B-C)}{b^2c_1{}^2+b_1{}^2c^2+2bb_1cc_1\cos(B+C)}=\frac{d_2{}^2+\varepsilon_2{}^2-\delta_1{}^2}{d_1{}^2+\varepsilon_1{}^2-\delta_1{}^2}\quad(55)$$

u. s. w. Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
a^2+\delta_1{}^2&=d_2{}^2+\varepsilon_2{}^2,\quad a_1{}^2+\delta_1{}^2=d_1{}^2+\varepsilon_1{}^2\\
b^2+\delta_2{}^2&=e_2{}^2+\zeta_2{}^2,\quad b_1{}^2+\delta_2{}^2=e_1{}^2+\zeta_1{}^2\\
c^2+\delta_3{}^2&=f_2{}^2+\eta_2{}^2,\quad c_1{}^2+\delta_3{}^2=f_1{}^2+\eta_1{}^2
\end{aligned}\right\}\ 56.$$

Digitized by Google

so wie:

$$\left.\begin{aligned}
a^2+\varepsilon_1^2 &= b^2+b_1^2+2cc_1\cos(A+\psi') \\
&= c^2+c_1^2-2bb_1\cos(\psi-A) \\
a_1^2+\varepsilon_2^2 &= b^2+b_1^2+2cc_1\cos(A-\psi') \\
&= c^2+c_1^2-2bb_1\cos(\psi+A) \\
b^2+\zeta_1^2 &= c^2+c_1^2+2aa_1\cos(\psi+B) \\
&= a^2+a_1^2-2cc_1\cos(B-\psi'') \\
b_1^2+\zeta_2^2 &= c^2+c_1^2+2aa_1\cos(\psi-B) \\
&= a^2+a_1^2-2cc_1\cos(B+\psi'') \\
c^2+\eta_1^2 &= a^2+a_1^2+2bb_1\cos(C-\psi'') \\
&= b^2+b_1^2-2aa_1\cos(C+\psi') \\
c_1^2+\eta_2^2 &= a^2+a_1^2+2bb_1\cos(C+\psi'') \\
&= b^2+b_1^2-2aa_1\cos(C-\psi')
\end{aligned}\right\} 57.$$

Endlich ist auch noch:

$$\left.\begin{aligned}
16F^2 &= 4c^2c_1^2-(-a^2-a_1^2+b^2+b_1^2)^2 \\
16F'^2 &= 4b^2b_1^2-(\ a^2+a_1^2-c^2-c_1^2)^2 \\
16F''^2 &= 4a^2a_1^2-(-b^2-b_1^2+c^2+c_1^2)^2
\end{aligned}\right\} 58.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
4F &= (-a^2-a_1^2+b^2+b_1^2)\ \text{tang}\ C \\
4F' &= (\ a^2+a_1^2-c^2-c_1^2)\ \text{tang}\ B \\
4F'' &= (-b^2-b_1^2+c^2+c_1^2)\ \text{tang}\ A
\end{aligned}\right\} 59.$$

Andere Ausdrücke wie z. B.

$$\left.\begin{aligned}
16F'F'' &= c_1^2\eta_2^2-c^2\eta_1^2 \\
16FF'' &= b^2\zeta_1^2\ -b_1^2\zeta_2^2 \\
16FF' &= a^2\eta_1^2\ -a_1^2\eta_2^2
\end{aligned}\right\} 60.$$

sind zwar nicht ohne Interesse, führen jedoch auf zu specielle Betrachtungen, als dass wir sie hier näher erörtern könnten.

## §. 15.

Es ist nun zunächst noch übrig, das zugeordnete Dreieck mit seinen Seiten und Winkeln zu betrachten, was mit Hülfe des allgemeinen Ptolemäischen Lehrsatzes auf sehr einfache Weise geschehen kann. Zuvörderst erhält man durch Anwendung des bekannten Satzes, dass Dreiecke von gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien verhalten, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a+a_2 &= a\,.\,\frac{T_4}{F''},\quad a_1+a_3 = a_1\,.\,\frac{T_1}{F''} \\
b+b_2 &= b\,.\,\frac{T_3}{F'},\quad b_1+b_3 = b_1\,.\,\frac{T_2}{F'} \\
c-c_2 &= c\,.\,\frac{T_2}{F},\quad c_1-c_3 = c_1\,.\,\frac{T_4}{F}
\end{aligned}\right\} 61.$$



Digitized by Google

und

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a \cdot \frac{T_2}{F''},\ b_2 = b \cdot \frac{T_2}{F},\ c_2 = c \cdot \frac{T_1}{F} \\ a_3 &= a_1 \cdot \frac{T_3}{F''},\ b_3 = b \cdot \frac{T_4}{F},\ c_3 = c_1 \cdot \frac{T_3}{F} \end{aligned}\right\} 62.$$

Bemerkt man sodann, dass jede zugeordnete Seite als Diagonale eines einfachen Viereckes angesehen werden kann, in welchem die von ihr, oder ihrer Verlängerung geschnittene Hauptseite die andere Diagonale bildet, so giebt das Theorem Nr. 44. augenblicklich folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} &F^2 F''^2 a_1^2 \alpha^2 \\ &= b^2 c^2\ T_2^4 + b_1^2 c_1^2 T_4^4 + 2bb_1 cc_1 T_2^2 T_4^2 \cos(B-C) \\ &F^2 F''^2 a^2\ \alpha^2 \\ &= b^2 c_1^2 T_3^4 + b_1^2 c^2\ T_1^4 + 2bb_1 cc_1 T_1^2 T_3^2 \cos(B+C) \\ &F^2 F''^2 b_1^2 \beta^2 \\ &= a^2 c^2\ T_2^4 + a_1^2 c_1^2 T_3^4 + 2aa_1 cc_1 T_2^2 T_3^2 \cos(C-A) \\ &F^2 F''^2 b^2\ \beta^2 \\ &= a^2 c_1^2 T_4^4 + a_1^2 c^2\ T_1^4 + 2aa_1 cc_1 T_1^2 T_4^2 \cos(C+A) \\ &F''^2 F''^2 c_1^2 \gamma^2 \\ &= a^2 b^2\ T_2^4 + a_1^2 b_1^2 T_1^4 + 2aa_1 bb_1 T_1^2 T_2^2 \cos(A+B) \\ &F''^2 F''^2 c^2\ \gamma^2 \\ &= a^2 b_1^2 T_4^4 + a_1^2 b^2\ T_3^4 + 2aa_1 bb_1 T_3^2 T_4^2 \cos(A-B) \end{aligned}\right\} 63.$$

Diese Gleichungen gestatten nun eine grosse Masse von Umformungen. Setzt man z. B. in den beiden obersten $2T_2 = b_1 c_1 \sin(b_1 c_1)$ und $2T_4 = bc \sin(bc)$, und lösst $F$ und $F''$ nach Nr. 16. auf, so fällt der gemeinschaftliche Faktor $b^2 b_1^2 c^2 c_1^2$ ganz heraus und man bekommt:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\sin^2 B \sin^2 C\, a_1^2 \alpha^2 &= \sin^2(b_1 c_1) T_2^2 + \sin^2(bc)\ T_4^2 \\ &\quad + 2\sin(b_1 c_1) \sin(bc)\ T_2 T_4 \cos(B-C) \\ \tfrac{1}{4}\sin^2 B \sin^2 C\, a^2\ \alpha^2 &= \sin^2(b_1 c)\ T_3^2 + \sin^2(bc_1) T_1^2 \\ &\quad + 2\sin(b_1 c)\ \sin(bc_1) T_1 T_3 \cos(B+C) \end{aligned}\right\} 64.$$

u. s. w. Dann könnte man auch rechter Hand in der oberen Gleichung den Faktor $a_1^2$ und in der unteren den Faktor $a^2$ ausscheiden; indessen würde die weitere Verfolgung dieser Umformungen hier zu viel Platz einnehmen, und muss daher wegbleiben.

Jede zugeordnete Seite gehört ferner zu 4 Dreiecken, welche ihre Endpunkte und eine der vier Hauptecken zu Spitzen haben. Dies giebt für die zugeordneten Seiten Ausdrücke von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &F^2 F''^2 a^2 \\ &= b^2\ F^2 T_2^2 + c_1^2 F''^2 T_4^2 - 2bc_1\ FF'' T_2 T_4 \sin\tfrac{1}{2}(-B+C+\psi'') \\ &= b_1^2 F^2 T_4^2 + c^2\ F''^2 T_2^2 + 2b_1 c\ FF'' T_2 T_4 \sin\tfrac{1}{2}(B-C+\psi'') \\ &= b^2\ F^2 T_3^2 + c^2\ F''^2 T_1^2 - 2bc\ FF'' T_1 T_3 \sin\tfrac{1}{2}(B+C-\psi'') \\ &= b_1^2 F^2 T_1^2 + c_1^2 F''^2 T_3^2 - 2b_1 c_1 FF'' T_1 T_3 \sin\tfrac{1}{2}(B+C+\psi'') \end{aligned}\right\} 65.$$

Digitized by Google

u. s. w. Auch diese Gleichungen lassen bemerkenswerthe Umformungen zu. Setzt man z. B. in der ersten derselben $2T_2 = a_1 b_1 \sin(a_1 b_1)$ und $2T_4 = a_1 c \sin(a_1 c)$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2\left(\frac{\sin^2(a_1 b_1)}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2(a_1 c)}{\sin^2 C} + \frac{2\sin(a_1 b_1)\sin(a_1 c)\cos(bc_1)}{\sin B \sin C}\right) \\ &= a_1^2\left(\frac{\sin^2(a_1 b)}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2(a_1 c_1)}{\sin^2 C} + \frac{2\sin(a_1 b)\sin(a_1 c_1)\cos(b_1 c)}{\sin B \sin C}\right) \end{aligned}\right\} 66.$$

Diese Ausdrücke würden wichtig sein, wenn es gelänge, die in den Parenthesen stehenden Winkelaggregate auf irgend eine Weise bequem zusammenzuziehen. Mit den bis jetzt gefundenen Formeln scheint dies jedoch nicht gelingen zu wollen. — Wichtiger sind dagegen die Werthe, welche sich durch Anwendung dieses Verfahrens für die Hauptseiten ergeben. Für diese ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} F^2 a^2 &= c^2 T_1^2 + c_1^2 T_3^2 - 2cc_1 T_1 T_3 \cos C \\ F'^2 a^2 &= b^2 T_3^2 + b_1^2 T_1^2 + 2bb_1 T_1 T_3 \cos B \\ F^2 a_1^2 &= c^2 T_2^2 + c_1^2 T_4^2 - 2cc_1 T_2 T_4 \cos C \\ F'^2 a_1^2 &= b^2 T_2^2 + b_1^2 T_4^2 + 2bb_1 T_2 T_4 \cos B \end{aligned}\right\} 67.$$

u. s. w. Demnach ist jede Hauptseite des vollständigen Viereckes durch ein Paar Gegenseiten, ihren charakteristischen Winkel und die zwei über der gesuchten Hauptseite stehenden Hauptdreiecke bestimmt. — Sucht man endlich den Flächenraum des zugeordneten Dreieckes, so hat man zuvörderst:

$$\left.\begin{aligned} \text{Dreieck } CGE &= \Delta_\alpha = \frac{T_2 T_3 T_4}{FF'} \\ \text{Dreieck } CFE &= \Delta_\beta = \frac{T_2 T_3 T_4}{FF''} \\ \text{Dreieck } CFG &= \Delta_\gamma = \frac{T_2 T_3 T_4}{F'F''} \end{aligned}\right\} 68.$$

und hieraus sogleich:

Digitized by Google

$$\Delta = \Delta_\alpha + \Delta_\beta + \Delta_\gamma = \frac{2T_1T_2T_3T_4}{EE'E''}$$

$$= \frac{(E+F+F')(E+F-F')(E-F+F')(E-F-F')}{8EE'E''}$$

$$= \frac{aa_1bb_1}{cc_1} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi+A-B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)\cos\frac{1}{2}(-\psi+A+B)}{\sin A \sin B \sin C} \quad (9.)$$

Ausdrücke, welche hinsichtlich ihrer Eleganz wohl nichts zu wünschen übrig lassen. Was endlich die Winkel des zugeordneten Dreieckes betrifft, so würden sich zwar dieselben aus den drei Seiten desselben in Verbindung mit dem Flächeninhalte $\Delta$ ableiten lassen; indessen sind die so erhaltenen Ausdrücke sehr weitläufig und unbehülflich. Da wir die Werthe dieser Winkel im Folgenden auf eine andere Weise bestimmen werden, so mögen dieselben vor der Hand ausfallen.

## §. 16.

Es bleibt nur noch übrig, die Aufgabe zu lösen: aus irgend fünf von einander unabhängigen Stücken des vollstän-

Digitized by Google

digen Vierecks alle in dieser Figur vorkommenden Seiten und Winkel zu bestimmen. Die Lösung dieses Problems wird uns eine allgemeine Tafel von Werthen verschaffen, wie sie Carnot in seiner Geometrie der Stellung zu entwickeln verlangt, um durch Combination der in ihr enthaltenen Ausdrücke jeden beliebigen Bestandtheil der Construktion in seinen Beziehungen zu den übrigen Bestandtheilen übersehen zu können. Als die fünf gegebenen Bestimmungsstücke mögen im Folgenden die vier Abschnitte der Hauptseiten $c$ und $c_1$ zwischen ihrem zugeordneten Punkte $E$ (Taf. III. Fig. 1.) und den vier Hauptpunkten $ABCD$, und der zugehörige charakteristische Winkel $C$ angenommen werden. Um die Bezeichnung ganz unabhängig zu halten, sollen folgende Benennungen eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} AE &= p_1, \quad DE = q_1, \\ CE &= p_2, \quad BE = q_2, \end{aligned}\right\} \quad A\hat{E}D = C \qquad 70.$$

Hiermit wird nun sofort erhalten:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1 \cos C, \quad b^2 = p_1^2 + q_2^2 + 2p_1q_2 \cos C \\ a_1^2 &= p_2^2 + q_2^2 - 2p_2q_2 \cos C, \quad b_1^2 = p_2^2 + q_1^2 + 2p_2q_1 \cos C \end{aligned}\right\} \qquad 71.$$

$$\left.\begin{aligned} 2T_1 &= p_1(q_1 + q_2) \sin C, & 2F &= (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \sin C \\ 2T_2 &= p_2(q_1 + q_2) \sin C, & 2F' &= (p_1q_1 - p_2q_2) \sin C \\ 2T_3 &= q_1(p_1 + p_2) \sin C, & 2F'' &= (p_1q_2 - p_2q_1) \sin C \\ 2T_4 &= q_2(p_1 + p_2) \sin C, \end{aligned}\right\} \qquad 72.$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 &= (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) \\ &\quad - 2(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) \cos C \\ -a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 &= 2(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \cos C \end{aligned}\right\} \qquad 73.$$

$$\left.\begin{aligned} a^2a_1^2 &= (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)^2 - 4p_1p_2q_1q_2 \sin^2 C \\ &\quad - 2(p_1p_2 + q_1q_2)(p_1q_2 + p_2q_1) \cos C \\ b^2b_1^2 &= (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_1 + p_2q_2)^2 - 4p_1p_2q_1q_2 \sin^2 C \\ &\quad + 2(p_1p_2 + q_1q_2)(p_1q_1 + p_2q_2) \cos C \end{aligned}\right\} \qquad 74.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a \cos(ac) + q_1 \cos C = b \cos(bc) - q_2 \cos C \\ p_2 &= a_1 \cos(a_1c) + q_2 \cos C = b_1 \cos(b_1c) - q_1 \cos C \\ q_1 &= a \cos(ac_1) + p_1 \cos C = b_1 \cos(b_1c_1) - p_2 \cos C \\ q_2 &= a_1 \cos(a_1c_1) + p_2 \cos C = b \cos(bc_1) - p_1 \cos C \end{aligned}\right\} \qquad 75.$$

Durch gehörige Verbindung und mit Hülfe von Nr. 72. findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} ab \cos(ab) &= (p_1^2 - q_1q_2) - p_1(q_1 - q_2) \cos C \\ a_1b_1 \cos(a_1b_1) &= (p_2^2 - q_1q_2) + p_2(q_1 - q_2) \cos C \\ ab_1 \cos(ab_1) &= (q_1^2 - p_1p_2) - q_1(p_1 - p_2) \cos C \\ a_1b \cos(a_1b) &= (q_2^2 - p_1p_2) + q_2(p_1 - p_2) \cos C \end{aligned}\right\} \qquad 76.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} aa_1 \sin A &= (p_1q_2 - p_2q_1) \sin C \\ bb_1 \sin B &= (p_1q_1 - p_2q_2) \sin C \\ aa_1 \cos A &= (p_1p_2 + q_1q_2) - (p_1q_2 + p_2q_1) \cos C \\ -bb_1 \cos B &= (p_1p_2 + q_1q_2) + (p_1q_1 + p_2q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 77.$$

$$\left.\begin{aligned} aa_1bb_1 \sin\psi &= (p_1 + p_2)\,(q_1 + q_2)\,(p_1p_2 - q_1q_2) \sin C \\ aa_1bb_1 \cos\psi &= (p_1p_2+q_1q_2)^2 - p_1p_2(q_1+q_2)^2 - q_1q_2(p_1+p_2)^2 \\ &\quad + 4p_1p_2q_1q_2 \cos^2 C \\ &\quad + (p_1p_2 + q_1q_2)\,(p_1 - p_2)\,(q_1 - q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 78.$$

$$\left.\begin{aligned} aa_1 \sin\psi' &= (p_1p_2 - q_1q_2) \sin C \\ bb_1 \sin\psi'' &= (p_1p_2 - q_1q_2) \sin C \\ aa_1 \cos\psi' &= (p_1q_2 + p_1q_2) - (p_1p_2 + q_1q_2) \cos C \\ bb_1 \cos\psi'' &= (p_1q_1 + p_2q_2) + (p_1p_2 + q_1q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 79.$$

Da man ferner

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a \cdot \frac{p_2(q_1 + q_2)}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad b_2 = b \cdot \frac{p_2(q_1 + q_2)}{p_1q_1 - p_2q_2} \\ a_2 &= a_1 \cdot \frac{q_2(p_1 + p_2)}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad b_2 = b_1 \cdot \frac{q_2(p_1 + p_2)}{p_1q_1 - p_2q_2} \end{aligned}\right\} 80.$$

findet, so ergiebt sich nunmehr aus den Gleichungen $a^2 = b_2^2 + p_2^2 + 2b_2p_2 \cos(b_2c)$ u. s. w. nach einigen allerdings ziemlich weitläufigen Reduktionen, für die zugeordneten Seiten:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{p_1^2 p_2^2 (q_1+q_2)^2 + q_1^2 q_2^2 (p_1+p_2)^2 + 2p_1 p_2 q_1 q_2 (p_1+p_2)(q_1+q_2)\cos C}{(p_1 q_1 - p_2 q_2)^2} \\
\beta^2 &= \frac{p_1^2 p_2^2 (q_1+q_2)^2 + q_1^2 q_2^2 (p_1+p_2)^2 - 2p_1 p_2 q_1 q_2 (p_1+p_2)(q_1+q_2)\cos C}{(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2} \\
\gamma^2 &= \frac{(p_1+p_2)^2 (q_1+q_2)^2 \{p_1^2 p_2^2 (q_1-q_2)^2 + q_1^2 q_2^2 (p_1-p_2)^2 - 2p_1 p_2 q_1 q_2 (p_1-p_2)(q_1-q_2)\cos C\}}{(p_1 q_1 - p_2 q_2)^2 (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}
\end{aligned}\right\} 81.$$

Ausdrücke, welche durch ihren symmetrischen Bau sehr bemerkenswerth sind. Führt man die Flächenräume $T$ und $F$ ein, so gehen dieselben in folgende über:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
F^2F'^2\alpha^2 &= c^2T_1^2T_2^2 + c_1^2T_3^2T_4^2 + 2cc_1T_1T_2T_3T_4\cos C\\
F^2F''^2\beta^2 &= c^2T_1^2T_2^2 + c_1^2T_3^2T_4^2 - 2cc_1T_1T_2T_3T_4\cos C\\
F^2F'^2F''^2\gamma^2 &= c^2T_1^2T_2^2(F'-F'')^2 + c_1^2T_3^2T_4^2(F'+F'')^2\\
&\quad - 2cc_1T_1T_2T_3T_4(F'^2-F''^2)\cos C
\end{aligned}\right\} 82.$$

In dieser Form bilden die vorstehenden Gleichungen eine höchst wesentliche Ergänzung der unter Nr. 63. und 65. zusammengestellten Ausdrücke. Denn die letzteren lassen die zugeordneten Seiten aus zwei Paaren von Gegenseiten und ihren beiden charakteristischen Winkeln finden, während die vorstehenden Formeln dieselben Grössen durch ein Paar Gegenseiten und dessen charakteristischen Winkel geben (die Dreieckflächen $T$ natürlich unberücksichtigt gelassen).

Uebrigens führt der Gebrauch der Flächen $T$ und $F$ statt der Grössen $p$ und $q$ immer zu bemerkenswerthen Umformungen; so geben z. B. die Gleichungen (72)

$$\left.\begin{aligned}
FF' &= T_1T_3 - T_2T_4\\
FF'' &= T_1T_4 - T_2T_3\\
F'F'' &= T_3T_4 - T_1T_2
\end{aligned}\right\} 82.^*$$

Für die Winkel des zugeordneten Dreieckes findet man nun, wenn gleich die Flächen $T$ und $F$ eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned}
F^2F'F''\,\alpha\beta\cos(\alpha\beta) &= c^2T_1^2T_2^2 - c_1^2T_3^2T_4^2\\
F^2F'^2F''\,\alpha\gamma\cos(\alpha\gamma) &= c_1^2T_3^2T_4^2(F+F'')\\
&\quad - c^2T_1^2T_2^2(F'-F'') + 2cc_1T_1T_2T_3T_4F''\cos C\\
F^2F'F''^2\beta\gamma\cos(\beta\gamma) &= c_1^2T_3^2T_4^2(F+F')\\
&\quad + c^2T_1^2T_2^2(F'-F'') - 2cc_1T_1T_2T_3T_4F'\cos C
\end{aligned}\right\} 83.$$

Ferner ergiebt sich für die Winkel, welche die Geraden $a$, $\beta$ und $\gamma$ mit einer Hauptseite machen, wenn man in Taf. III. Fig. 7.:

$$\left.\begin{aligned}
CEG &= (ac) & CEF &= (\beta c) & AFG &= (\gamma a)\\
BEG &= (ac_1) & DEF &= (\beta c_1) & BFG &= (\gamma a_1)\\
AGE &= (ab) & AFE &= (\beta a) & AGF &= (\gamma b)\\
DGE &= (ab_1) & BFE &= (\beta a_1) & DGF &= (\gamma b_1)
\end{aligned}\right\} 84.$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned}
FF'a\cos(ac) &= cT_1T_2 + c_1T_3T_4\cos C\\
FF'a\cos(ac_1) &= c_1T_3T_4 + cT_1T_2\cos C\\
F^2F'ab\cos(ab) &= c^2T_1^2T_2 + c_1^2T_3T_4^2\\
&\quad + cc_1T_1T_4(T_2+T_3)\cos C\\
F^2F'ab_1\cos(ab_1) &= c^2T_1T_2^2 + c_1^2T_3^2T_4\\
&\quad + cc_1T_2T_3(T_1+T_4)\cos C
\end{aligned}\right\} 85.$$

Digitized by Google

$$
\left.\begin{aligned}
FF''\beta \cos(\beta c) &= c\,T_1T_2 - c_1T_3T_4 \cos C\\
FF''\beta \cos(\beta c_1) &= c_1T_3T_4 - c\,T_1T_2 \cos C\\
F^2F''\beta a \cos(\beta a) &= c^2T_1{}^2T_2 + c_1{}^2T_3{}^2T_4\\
&\quad - cc_1T_1T_3(T_2+T_4)\cos C\\
F^2F''\beta a_1 \cos(\beta a_1) &= c^2T_1T_2{}^2 + c_1{}^2T_3T_4{}^2\\
&\quad - cc_1T_2T_4(T_1+T_3)\cos C
\end{aligned}\right\} 86.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
F_4^2F'F''\gamma a \cos(\gamma a) &= c_1{}^2T_3{}^2T_4(T_1-T_2)+c^2T_1{}^2T_2(T_3-T_4)\\
&\quad -cc_1T_1T_3\{T_4(T_1-T_2)+T_2(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^2F'F''\gamma a_1 \cos(\gamma a_1) &= c_1{}^2T_3T_4{}^2(T_1-T_2)+c^2T_1T_2{}^2(T_3-T_4)\\
&\quad -cc_1T_2T_4\{T_3(T_1-T_2)+T_1(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^2F'F''\gamma b \cos(\gamma b) &= c_1{}^2T_3T_4{}^2(T_1-T_2)-c^2T_1{}^2T_2(T_3-T_4)\\
&\quad -cc_1T_1T_4\{T_3(T_1-T_2)-T_2(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^2F'F''\gamma b_1 \cos(\gamma b_1) &= c_1{}^2T_3{}^2T_4{}^2(T_1-T_2)-cT_1T_2{}^2(T_3-T_4)\\
&\quad -cc_1T_2T_3\{T_4(T_1-T_2)-T_1(T_3-T_4)\}\cos C
\end{aligned}\right\} 87.
$$

Ferner setze man

$$
\left.\begin{aligned}
GMF &= (\alpha a) \quad GPF = (\beta b) \quad ERS = (\gamma c)\\
GNF &= (\alpha a_1) \quad GQF = (\beta b_1) \quad ESR = (\gamma c_1)
\end{aligned}\right\} 88.
$$

so wird noch:

$$
\left.\begin{aligned}
F^2F'\alpha a \cos(\alpha a) &= c^2T_1{}^2T_2 - c_1{}^2T_3{}^2T_4 + cc_1T_1T_2F'' \cos C\\
F^2F'\alpha a_1 \cos(\alpha a_1) &= c^2T_1T_2{}^2 - c_1{}^2T_3T_4{}^2 - cc_1T_2T_4F'' \cos C\\
F^2F''\beta b \cos(\beta b) &= c^2T_1{}^2T_2 - c_1{}^2T_3T_4{}^2 - cc_1T_1T_4F' \cos C\\
F^2F''\beta b_1 \cos(\beta b_1) &= c^2T_1T_2{}^2 - c_1{}^2T_3{}^2T_4 + cc_1T_2T_3F' \cos C
\end{aligned}\right\} 89.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
FF'F''\gamma \cos(\gamma c) &= c\,T_1T_2(T_3-T_4) - c_1T_3T_4(T_1-T_2)\cos C\\
FF'F''\gamma \cos(\gamma c_1) &= c_1T_3T_4(T_1-T_2) - c\,T_1T_2(T_3-T_4)\cos C
\end{aligned}\right\} 90.
$$

Setzt man endlich

$$
\left.\begin{aligned}
ME &= \alpha_3 \quad PE = \beta_3 \quad SG = \gamma_3\\
NE &= \alpha_2 \quad QE = \beta_2 \quad GR = \gamma_2\\
NG &= \alpha_1 \quad QF = \beta_1 \quad FR = \gamma_1
\end{aligned}\right\} 91.
$$

so ergiebt sich alsbald noch:

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{\alpha F'}{F-F'}, \quad \beta_3 = \frac{\beta F''}{F-F''}, \quad \gamma_3 = \frac{\gamma F''}{F-F''}\\
\alpha_2 &= \frac{\alpha F'}{F+F'}, \quad \beta_2 = \frac{\beta F''}{F+F''}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma F''}{F+F''}\\
\alpha_1 &= \frac{\alpha F}{F+F'}, \quad \beta_1 = \frac{\beta F}{F+F''}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma F}{F+F''}
\end{aligned}\right\} 92.
$$

Digitized by Google

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\alpha_1 &= \frac{aF}{F-F'} \text{ also } \alpha : \alpha_2 = \alpha+\alpha_1 : \alpha_2 \\ \beta+\beta_1 &= \frac{\beta F}{F-F'} \quad - \quad \beta : \beta_2 = \beta+\beta_1 : \beta_2 \\ \gamma+\gamma_1 &= \frac{\gamma F}{F-F'} \quad - \quad \gamma : \gamma_2 = \gamma+\gamma_1 : \gamma_2 \end{aligned}\right\} 93.$$

mithin wird im vollständigen Vierecke jede durch zwei zugeordnete Punkte gezogene Gerade von diesen Punkten und ihren Durchschnittspunkten mit dem dritten Paare der Hauptseiten harmonisch getheilt. Auf ganz gleiche Weise findet man:

$$\left.\begin{aligned} AM &= \frac{aT_4}{F-F'}, \quad AP = \frac{bT_1}{F-F'} \\ MD &= \frac{aT_2}{F-F'}, \quad BP = \frac{bT_2}{F-F'}, \quad BS = \frac{c_1T_4}{F-F'} \\ BN &= \frac{a_1T_1}{F+F'}, \quad QD = \frac{b_1T_1}{F+F'}, \quad CR = \frac{cT_2}{F+F'} \\ CN &= \frac{a_1T_2}{F+F'}, \quad QC = \frac{b_1T_4}{F+F'} \end{aligned}\right\} 94.$$

woraus sich sofort mit Hülfe von Nr. 61. und 62. ergiebt, dass im vollständigen Viereck ebenfalls die sechs Hauptseiten von einander selbst und den drei zugeordneten Seiten harmonisch getheilt werden. — Mit diesen Ausdrücken ist nun die im Eingange des Paragraphen gestellte Aufgabe vollständig gelösst. Es versteht sich übrigens von selbst, dass wenn die hier entwickelten Formeln auf die Abschnitte eines anderen Paares von Gegenseiten übertragen worden sollen, von diesen Abschnitten nur das eine Paar positiv, das andere hingegen negativ genommen werden muss.

## §. 17.

Von den Combinationen, welche die Formeln des vorigen Paragraphen zulassen, soll nur eine einzige hier erwähnt werden, die sich auf das Verhalten der excentrischen Fläche des Viereckes bezieht. Es ist nämlich in Nr. 78. der Ausdruck:

$$aa_1bb_1 \sin\psi = (p_1+p_2)(q_1+q_2)(p_1p_2-q_1q_2) \sin C \text{ d. h.}$$
$$E^2 = (p_1p_2-q_1q_2)F$$

gefunden worden. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass wenn in einem einfachen Vierecke die Summe zweier Gegenwinkel kleiner, gleich oder grösser als 180° ist, der Ueberschuss des Rechteckes aus den Abschnitten der durch die Winkel gehenden Diagonale über das Rechteck aus den Abschnitten der anderen Diagonale beziehungsweise positiv, Null oder negativ sein muss. — Bildet man zu dem vorstehenden Ausdrucke die analogen, so erhält man:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} p_1p_2 - q_1q_2 &= \frac{E^2}{F} \\ a_2(a+a_2) - a_3(a_1+a_3) &= \frac{E^2}{F'} \\ b_2(b+b_2) - b_3(b+b_3) &= \frac{E^2}{F''} \end{aligned}\right\} 95.$$

Demnach verhalten sich in jedem vollständigen Viereck die Unterschiede der Rechtecke aus den Abschnitten je zweier Gegenseiten umgekehrt wie die Flächeninhalte derjenigen einfachen Vierecke, zu denen jene Gegenseiten als Diagonalen gehören. Endlich folgt auch aus Vorstehendem noch der einfache Satz: dass in jedem einfachen Vierecke die excentrische Fläche die mittlere Proportionalfläche zwischen der Fläche des Viereckes und dem Unterschiede der Rechtecke aus den Abschnitten beider Diagonalen ist.

## §. 18.

Wir gehen nun dazu über, einige der bemerkenswertheren Fälle zusammenzustellen, in welchen ein Viereck durch 5 Stücke vollständig bestimmt ist. Zuerst zeigen die Formeln des §. 16. unmittelbar:

1) dass ein Viereck durch die vier Abschnitte eines Paares Gegenseiten und deren charakteristischen Winkel vollständig und unzweideutig bestimmt ist.

Die blosse Ansicht der gedachten Formeln zeigt aber auch ferner, dass es zur vollständigen Bestimmung ebenfalls hinreicht, wenn die ganzen Seiten $c$ und $c_1$ mit ihrem charakteristischen Winkel $C$ und ausserdem noch ein Dreieck aus jeder der beiden Complexionen $T_1T_2$ und $T_3T_4$ gegeben ist. Denn man würde zuerst $2F = cc_1 \sin C$ und dann aus den Gleichungen $F = T_1 + T_2 = T_3 + T_4$ die beiden anderen nicht gegebenen Hauptdreiecke berechnen, aus diesen dann nach Nr. 15. $F'$ upd $F''$ suchen und hieraus sodann die übrigen Stücke des Viereckes nach den Formeln des §. 16. bestimmen. Demnach ist

2) ein Viereck durch ein Paar Gegenseiten, deren charakteristischen Winkel und ein über jeder der gegebenen Seiten liegendes Hauptdreieck vollständig bestimmt.

Da übrigens nach Nr. 18. jedes der Hauptdreiecke $T$ durch die drei Vierecksflächen $FF'F''$ bestimmt ist, so kann man auch diese als gegeben betrachten, und dann eine der Grössen $c$ und $c_1$ wegfallen lassen, indem die weggelassene sich aus der Gleichung $2F = cc_1 \sin C$ sofort finden lässt. Demnach ist ferner

3) ein Viereck durch die Flächenräume der drei in ihm enthaltenen einfachen Vierecke, eine Hauptseite und deren charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.

Wollte man im vorliegenden Falle statt der einen Hauptseite lieber den charakteristischen Winkel $C$ weglassen, so würde die Auflösung zweideutig sein, da $C$ aus der Gleichung $2F = cc_1 \sin C$ bestimmt werden müsste. Ferner ist

Digitized by Google

4) ein Viereck durch zwei Paare von Gegenseiten und den charakteristischen Winkel des dritten Paares vollständig bestimmt. Wären gegeben $aa_1bb_1$ und $C$, so hat man zuvörderst aus Nr. 11. und 47.:

$$cc_1 = \frac{b^2 + b_1^2 - a^2 - a_1^2}{2\cos C}, \quad \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi = \frac{(ss_1 - aa_1)(ss_1 - bb_1)}{ss_1(ss_1 - cc_1)} \text{ u. s. w.}$$

Sind hiermit $\psi$, $\psi'$ und $\psi''$ gefunden, so erhält man durch Division von (32) durch (34) den Werth:

$$c^2 = \frac{a^2b^2 + a_1^2b_1^2 - 2aa_1bb_1\cos\psi}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1\cos(C+\psi)},$$

wodurch sofort auch $c_1$ gegeben ist. Wenn aber alle 6 Seiten des vollständigen Viereckes bekannt sind, so findet man nach Nr. 10. sofort die Winkel $A$ und $B$, wodurch wegen Nr. 14. auch die Flächen $FF'F''$ bestimmt sind, mithin die Aufgabe gelöst ist.

Wären dagegen die Grössen $aa_1bb_1$ und $A$ gegeben, so giebt die Gleichung Nr. 4. zuerst

$$\delta_2^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos A \text{ und}$$

$$\cos B = \frac{\delta_2^2 - b^2 - b_1^2}{2bb_1}$$

worauf man aus Nr. 34. augenblicklich:

$$c^2\delta_2^2 = a^2b^2 + a_1^2b_1^2 + 2aa_1bb_1\cos(A+B)$$

$$c_1^2\delta_2^2 = a^2b_1^2 + a_1^2b^2 + 2aa_1bb_1\cos(A-B)$$

findet. Es ist daher ganz allgemein

5) ein Viereck aus zwei Paaren von Gegenseiten und einem ihrer charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.

Die vorstehenden Gleichungen zeigen übrigens, dass statt $A$ auch die Grösse $\delta_2$ gegeben sein kann. Es ist nämlich ganz allgemein auch

6) ein Viereck durch zwei Paare von Gegenseiten und die Verbindungslinie der Mittelpunkte eines der drei Paare vollständig bestimmt.

Sind $aa_1bb_1\ \delta_2$ gegeben, so ist nach der vorigen Auflösung $A$ unmittelbar durch die Gleichung $2aa_1\cos A = a^2 + a_1^2 - \delta_2^2$ bestimmt und die Aufgabe daher auf die vorige reducirt.

Ist hingegen statt $\delta_2$ eine der Grössen $\delta_1$ oder $\delta_3$ gegeben, z. B. $\delta_1$, so wird nach Nr. 4.:

$$\cos B = \frac{b^2 + b_1^2 - \delta_1^2}{2bb_1}$$

mithin die Aufgabe gleichfalls auf die vorhergehende zurückgebracht.

7) Ein Viereck ist durch zwei Paare von Gegenseiten vollständig bestimmt, wenn zugleich in dem von ihnen gebildeten einfachen Vierecke die Summe zweier Gegenwinkel bekannt ist.

Ist $aa_1bb_1$ und $\psi$ bekannt, so hat man zuerst aus Nr. 48.:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(\psi'' - \psi) = \frac{aa_1 - bb_1}{aa_1 + bb_1}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\psi$$

Digitized by Google

woraus wegen $\frac{1}{2}(\psi''+\psi)=90-\frac{1}{2}\psi$ die beiden Winkel $\psi''$ und $\psi'$ gefunden werden; dann erhält man $cc_1$ durch eine der Gleichungen:

$$cc_1=(aa_1-bb_1)\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}(\psi''-\psi')}=(aa_1+bb_1)\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}(\psi''-\psi')},$$

und nun aus Nr. 11. den Winkel $C$ aus der Gleichung $2cc_1\cos C=b^2+b_1{}^2-a^2-a_1{}^2$. Ist aber einmal $C$ gefunden, so lässt sich das Andere durch die Formeln der Aufgabe 4) finden.

8) Sind von den 6 Stücken, nämlich den drei Rechtecken je zweier Gegenseiten und den drei charakteristischen Winkeln, 5 gegeben, so ist das Viereck dadurch vollständig bestimmt.

Welches von den genannten 6 Stücken auch fehlen mag, doch wird es immer aus der Gleichung Nr. 9.

$$0=aa_1\cos A+bb_1\cos B+cc_1\cos C$$

ohne Zweideutigkeit gefunden werden können. Alsdann geben zuvörderst die Gleichungen (47) die Werthe:

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\psi=\frac{(ss_1-aa_1)(ss_1-bb_1)}{ss_1(ss_1-cc_1)}\text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen Nr. 14.:

$$2F''=aa_1\sin A,\quad 2F'=bb_1\sin B,\quad 2F=cc_1\sin C,$$

woraus man endlich mit Hülfe von (18) und (22) die Formeln

$$a^2=\frac{-(F+F'+F'')(F+F'-F'')}{bb_1\cos\frac{1}{2}(-\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)}$$

$$b^2=\frac{(F+F'+F'')(F-F'+F'')}{aa_1\cos\frac{1}{2}(\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)}$$

$$c^2=\frac{(F+F'+F'')(F-F'+F'')}{aa_1\cos\frac{1}{2}(A+C+\psi')\cos\frac{1}{2}(-A+C+\psi')}$$

entwickelt, aus denen $abc$ und folglich auch $a_1b_1c_1$ gefunden werden können.

9) Ein Viereck ist durch die drei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten je zweier Gegenseiten und zwei der Winkel, unter denen sich diese Linien schneiden, vollständig bestimmt.

Sind $\delta_1\delta_2\delta_3$ und zwei von den drei Winkeln $(\delta_{1,2})(\delta_{1,3})(\delta_{2,3})$ gegeben, so findet man zuvörderst den dritten Winkel aus der Gleichung $(\delta_{1,2})+(\delta_{2,3})=180°+(\delta_{1,3})$, und sodann aus Nr. 5. die 6 Hauptseiten, womit die Aufgabe als gelöst anzusehen ist.

10) Ein Viereck ist durch die drei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten je zweier Gegenseiten und zwei der charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.

Wären also $\delta_1\delta_2\delta_3$ und z. B. $A$ und $B$ gegeben, so suche man aus Nr. 6. und Nr. 11.

$$\tfrac{1}{2}(\delta_2{}^2+\delta_3{}^2)=a^2+a_1{}^2,\quad \tfrac{1}{2}(\delta_1{}^2+\delta_3{}^2)=b^2+b_1{}^2$$

$$\frac{\delta_3{}^2-\delta_2{}^2}{2\cos A}=2aa_1,\quad \frac{\delta_3{}^2-\delta_1{}^2}{2\cos B}=2bb_1;$$

dann wird:

Digitized by Google

$$(a+a_1)^2 \cos A = \delta_2^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}A - \delta_3^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}A$$
$$(a-a_1)^2 \cos A = \delta_3^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}A - \delta_2^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}A$$
$$(b+b_1)^2 \cos B = \delta_3^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B - \delta_1^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B$$
$$(b-b_1)^2 \cos B = \delta_1^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B - \delta_3^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B$$

woraus sich sofort die Werthe von $aa_1bb_1$ ergeben und die Aufgabe demnach als gelöst zu betrachten ist.

11) **Ein Viereck ist durch die vier Seiten eines seiner einfachen Vierecke und durch einen in dem letzteren liegenden Viereckswinkel vollständig bestimmt.**

Sollte man z. B. aus $aa_1bb_1$ und dem Winkel $(ab)$ das Viereck bestimmen, so hätte man aus Nr. 10. und Nr. 2.:

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (ab)$$
$$2a_1b_1 \cos (a_1b_1) = a_1^2 + b_1^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos (ab)$$

fände hieraus $\psi = (ab) + (a_1b_1)$ und mit diesem Werthe aus (44)

$$c^2 = \frac{a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos \psi}{a^2 + b^2 - ab \cos (ab)}$$

12) **Ein Viereck ist durch drei an einander liegende Hauptseiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Hauptwinkel bestimmt.**

Wären also z. B. die drei Seiten $bab_1$ und die Hauptwinkel $(ab)$ und $(ab_1)$ gegeben, so fände man aus Nr. 2.:

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (ab)$$
$$c^2 = a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos (ab_1);$$

alsdann wäre $B = (ab) + (ab_1)$ und aus Nr. 9.:

$$a_1^2 = c^2 + c_1^2 - a^2 + 2bb_1 \cos B,$$

womit die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

Es mag an diesen Aufgaben genügen, da aus ihnen zur Genüge erhellt, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren haben wird. Immer wird es möglich sein, eine solche Combination der gefundenen Formeln anzugeben, dass das Viereck aus fünf unabhängigen Stücken sich bestimmen lässt, dafern nur eine solche Bestimmung überhaupt stattfinden kann. — Uebrigens ist jedoch zu bemerken, dass in allen den Fällen, in welchen die Grösse $\psi$ durch eine trigonometrische Funktion gefunden wird, wie dies z. B. in der 4ten und 8ten Aufgabe der Fall war, die Auflösung nur dann wirklich bestimmt ist, wenn sich anderswoher entscheiden lässt, ob $\psi \lessgtr 180°$ ist. Kann eine solche Entscheidung nicht erhalten werden, so thun in der That immer zwei Vierecke der Aufgabe Genüge.

## §. 19.

Zum Schlusse wollen wir die gefundenen allgemeinen Formeln noch auf das Sehnenviereck anwenden. Da in diesem bekanntlich $\psi = 180°$, $\psi' = \psi'' = 0°$ ist, so ergiebt sich sofort, dass:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(ac)=(a_1c_1)&=90°-\tfrac{1}{2}(A+C)\\(ac_1)=(a_1c)&=90°-\tfrac{1}{2}(-A+C)\\(bc)=(b_1c_1)&=\tfrac{1}{2}(B+C)-90°\\(bc_1)=(b_1c)&=90°-\tfrac{1}{2}(B-C)\\(ab)=180°-(a_1b_1)&=\tfrac{1}{2}(B-A)\\(ab_1)=180°-(a_1b)&=\tfrac{1}{2}(B+A)\end{aligned}\right\}\ 96.$$

wird; folglich geben die Gleichungen 34, 38 und 42, wenn man statt der jetzt gleich werdenden Grössen $f_1$ und $f_2$, $e_1$ und $e_2$, $d_1$ und $d_2$ bloss die Zeichen *fed* ohne Index schreibt:

$$\left.\begin{aligned}f^2&=a^2+a_1{}^2+2aa_1\cos C=b^2+b_1{}^2-2bb_1\cos C\\e^2&=c^2+c_1{}^2+2cc_1\cos B=a^2+a_1{}^2+2aa_1\cos B\\d^2&=b^2+b_1{}^2-2bb_1\cos A=c^2+c_1{}^2-2cc_1\cos A\end{aligned}\right\}\ 97.$$

Demnach gehören zu jedem einfachen Sehnenvierecke drei Diagonalen, von denen zwei unmittelbar durch die Figur, die dritte hingegen dann gefunden werden, wenn man irgend zwei beliebige neben einander liegende Seiten des Viereckes mit einander vertauscht. Ferner wird aus (32) erhalten:

$$\left.\begin{aligned}cc_1&=aa_1+bb_1\\cf&=ab+a_1b_1\\c_1f&=ab_1+a_1b\end{aligned}\right\}\ 98.$$

d. h. in jedem einfachen Sehnenviereck erster Form ist das Rechteck aus beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus je zweien der Gegenseiten. Eben so findet man aus Nr. 36. und 40., unter der Voraussetzung dass $a>a_1$ und $b>b_1$:

$$\left.\begin{aligned}bb_1&=cc_1-aa_1,\quad aa_1=cc_1-bb_1\\be&=ac-a_1c_1,\quad ad=bc-b_1c_1\\b_1e&=ac_1-a_1c,\quad a_1d=bc_1-b_1c\end{aligned}\right\}\ 99.$$

d. h. in jedem Sehnenviereck zweiter oder dritter Form ist das Rechteck aus beiden Diagonalen gleich dem Ueberschusse des Rechteckes aus beiden sich schneidenden Seiten über das Rechteck aus beiden sich nicht schneidenden Seiten. Endlich wird, wenn man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}2s&=a+a_1+b+b_1\\2s'&=a+a_1+c+c_1\\2s''&=b+b_1+c+c_1\end{aligned}\right\}\ 100.$$

schreibt; nach Nr. 45.

$$\left.\begin{aligned}F^2&=(s-a)(s-a_1)(s-b)(s-b_1)\\F'^2&=(s'-a)(s'-a_1)(s'-c)(s'-c_1)-aa_1cc_1\\F''^2&=(s''-b)(s''-b_1)(s''-c)(s''-c_1)-bb_1cc_1\end{aligned}\right\}\ 101.$$



Digitized by Google

Durch schickliche Verbindungen der Gleichungen (98) findet man ferner:

$$aa_1 + bb_1 + ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1 = cc_1 + cf + c_1f \quad . \quad 102.$$

d. h. die Summe der sechs Rechtecke aus je zweien Seiten eines einfachen Sehnenviereckes erster Form ist gleich der Summe der drei Rechtecke aus je zweien seiner drei Diagonalen.

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= \frac{(aa_1+bb_1)\,(ab+a_1b_1)}{ab_1+a_1b}, & \frac{c}{c_1} &= \frac{ab+a_1b_1}{ab_1+a_1b} \\ c_1{}^2 &= \frac{(aa_1+bb_1)\,(ab_1+a_1b)}{ab+a_1b_1}, & \frac{c}{f} &= \frac{aa_1+bb_1}{ab_1+a_1b} \\ f^2 &= \frac{(ab+a_1b_1)\,(ab_1+a_1b)}{aa_1+bb_1}, & \frac{c_1}{f} &= \frac{aa_1+bb_1}{ab+a_1b_1} \end{aligned}\right\} 103.$$

$$\left.\begin{aligned} c^2c_1{}^2f^2 &= (aa_1+bb_1)\,(ab+a_1b_1)\,(ab_1+a_1b) \\ f\,(c \pm c_1) &= (a \pm a_1)\,(b \pm b_1) \\ c_1(c \pm f) &= (a \pm b)\;\;(a_1 \pm b_1) \\ c\,(c_1 \pm f) &= (a \pm b_1)\,(a_1 \pm b) \end{aligned}\right\} 104.$$

Die Gleichungen (103) lassen sich auch als unmittelbares Ergebniss der Formeln (53) und (54) betrachten. Auf die nehmlige Weise kann nun auch jede Seite des Vierecks bestimmt werden. Denn nach (99.) ist:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{(cc_1-bb_1)\,(bc-b_1c_1)}{bc_1-b_1c}, & b^2 &= \frac{(cc_1-aa_1)\,(ac-a_1c_1)}{ac_1-a_1c} \\ a_1{}^2 &= \frac{(cc_1-bb_1)\,(bc_1-b_1c)}{bc-b_1c_1}, & b_1{}^2 &= \frac{(cc_1-aa_1)\,(ac_1-a_1c)}{ac-a_1c_1} \end{aligned}\right\} 105.$$

ingleichen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bc-b_1c_1}{bc_1-b_1c}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{ac-a_1c_1}{ac_1-a_1c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 106.$$

u. s. w. Ferner ist nach Nr. 2. auch

$$\left.\begin{aligned} -a^2+a_1{}^2-b^2+b_1{}^2 &= 2(ab+a_1b_1)\cos(a_1b_1) \\ &= 2cf\cos(a_1b_1) \\ -a^2+a_1{}^2+b^2-b_1{}^2 &= 2(ab_1+a_1b)\cos(a_1b) \\ &= 2c_1f\cos(a_1b) \end{aligned}\right\} 107.$$

und hieraus folgt durch Vergleichung mit Nr. 11. sofort, dass die Durchschnittswinkel der Diagonalen $cf$ und $c_1f$ nothwendig resp. gleich $(a_1b_1)$ und $(a_1b)$ sein müssen. Es ergiebt sich demnach auch wegen Nr. 96. und Nr. 11.:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2-a_1{}^2+b^2-b_1{}^2}{2(ab+a_1b_1)} &= \cos\tfrac{1}{2}(B-A) \\ \frac{a^2-a_1{}^2-b^2+b_1{}^2}{2(ab_1+a_1b)} &= \cos\tfrac{1}{2}(B+A) \\ \frac{b^2+b_1{}^2-a^2-a_1{}^2}{2(aa_1+bb_1)} &= \cos C \end{aligned}\right\} 108.$$

Digitized by Google

und hieraus auf bekannte Weise die Formeln:

$$\left.\begin{array}{llll} \sin^2\tfrac{1}{4}(B-A)=\dfrac{(s-a)\,(s-b)}{cf}, & \cos^2\tfrac{1}{4}(B-A)=\dfrac{(s-a_1)\,(s-b_1)}{cf} \\ \sin^2\tfrac{1}{4}(B+A)=\dfrac{(s-a)\,(s-b_1)}{c_1 f}, & \cos^2\tfrac{1}{4}(B+A)=\dfrac{(s-a_1)\,(s-b)}{c_1 f} \\ \sin^2\tfrac{1}{2}C=\dfrac{(s-b)\,(s-b_1)}{cc_1}, & \cos^2\tfrac{1}{2}C=\dfrac{(s-a)\,(s-a_1)}{cc_1} \end{array}\right\} 109.$$

ingleichen:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{4}(B-A)=\dfrac{(s-a)\,(s-b)}{(s-a_1)\,(s-b_1)} \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{4}(B+A)=\dfrac{(s-a)\,(s-b_1)}{(s-a_1)\,(s-b)} \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}C=\dfrac{(s-b)\,(s-b_1)}{(s-a)\,(s-a_1)} \end{array}\right\} 110.$$

Zugleich aber ist auch, wenn man den Halbmesser des dem Viereck umgeschriebenen Kreises $R$ nennt,

$$\left.\begin{array}{l} 2F=cc_1\sin C=cf\sin\tfrac{1}{2}(B-A)=c_1 f\sin\tfrac{1}{2}(B+A) \\ R=\dfrac{f}{2\sin C}=\dfrac{c_1}{2\sin\frac{1}{2}(B-A)}=\dfrac{c}{2\sin\frac{1}{2}(B+A)}=\dfrac{cc_1 f}{4F} \\ =\tfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(aa_1+bb_1)\,(ab+a_1b_1)\,(ab_1+a_1b)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-a_1)\,(s-b_1)}} \end{array}\right\} 111.$$

Es verhalten sich demnach die drei Diagonalen des einfachen Sehnenviereckes, wie die Sinus der in den zugehörigen Kreisabschnitten liegenden Peripheriewinkel, oder wie die Sinus der Winkel, unter denen sich die beiden anderen Diagonalen schneiden. — Zugleich ist auch das rechtwinkliche Prisma, das den Flächeninhalt des Viereckes zur Grundfläche und den Radius des umschriebenen Kreises zur Höhe hat, gleich dem vierten Theile des rechtwinklichen Parallelepipedums aus den drei Diagonalen desselben.

Durch einfache Multiplication findet man aus 109.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{1}{4}(B-A)\sin\frac{1}{4}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{s-a}{f} \\ \dfrac{\cos\frac{1}{4}(B-A)\cos\frac{1}{4}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{s-a_1}{f} \\ \dfrac{\sin\frac{1}{4}(B+A)\cos\frac{1}{4}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{s-b_1}{f} \\ \dfrac{\cos\frac{1}{4}(B+A)\sin\frac{1}{4}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{s-b}{f} \end{array}\right\} 112.$$

u. s. w. woraus unmittelbar auch:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{a+a_1}{f}, & \dfrac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{a-a_1}{f} \\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{b-b_1}{f}, & \dfrac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{b+b_1}{f} \end{array}\right\} 113.$$



Digitized by Google

und:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang } \tfrac{1}{2}B \text{ tang } \tfrac{1}{2}C &= \frac{a+a_1}{a-a_1}\\ \text{tang } \tfrac{1}{2}A \text{ tang } \tfrac{1}{2}C &= \frac{b-b_1}{b+b_1}\end{aligned}\right\} 114.$$

folgt. Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}R &= \frac{s-a}{4\sin\tfrac{1}{4}(B+A)\sin\tfrac{1}{4}(B-A)\cos\tfrac{1}{4}C}\\ &= \frac{s-a_1}{4\cos\tfrac{1}{4}(B+A)\cos\tfrac{1}{4}(B-A)\cos\tfrac{1}{4}C}\\ &= \frac{s-b}{4\cos\tfrac{1}{4}(B+A)\sin\tfrac{1}{4}(B-A)\sin\tfrac{1}{4}C}\\ &= \frac{s-b_1}{4\sin\tfrac{1}{4}(B+A)\cos\tfrac{1}{4}(B-A)\sin\tfrac{1}{4}C}\end{aligned}\right\} 115.$$

Es ist ganz unverkennbar, dass die Formeln von Nr. 108. bis 115. das Analogon zu den Formeln für das geradlinige Dreieck bilden. Trotz ihrer grossen Einfachheit und Eleganz scheinen sie doch bis jetzt noch gar nicht gekannt zu sein, weshalb die ausführliche Mittheilung derselben hier nicht am unrechten Platze sein möchte. Die Untersuchung über die Eigenschaften der Sehnenvierecke aber noch weiter zu treiben dürfte kaum der Mühe lohnen; die gehörige Verbindung der hier entwickelten Formeln wird fast immer hinreichen, jede verlangte Untersuchung zu Ende zu führen. Nur folgende Ausdrücke mögen hier noch Platz finden, da sie bei vorzunehmenden Transformationen gute Dienste leisten:

$$\left.\begin{aligned}0 &= aa_1\cos^2\tfrac{1}{2}(A+C)\cos^2\tfrac{1}{2}(A-C)+bb_1\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)\cos^2\tfrac{1}{2}(B-C)\\ 0 &= aa_1\sin^2\tfrac{1}{2}(B+A)\sin^2\tfrac{1}{2}(B-A)+cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)\cos^2\tfrac{1}{2}(B-C)\\ 0 &= bb_1\sin^2\tfrac{1}{2}(B+A)\sin^2\tfrac{1}{2}(B-A)-cc_1\cos^2\tfrac{1}{2}(A+C)\cos^2\tfrac{1}{2}(A-C)\end{aligned}\right\} 116$$

Mit ihrer Hülfe findet man für den Flächenraum $D$ des von den drei Diagonalen gebildeten Dreieckes die merkwürdige Gleichung

$$D^2-F^2=R^4\sin(A+C)\sin(B+C)\sin(C-A)\sin(B-C) \quad 117.$$

## §. 20.

Endlich sind noch die Werthe zu bemerken, welche beim Sehnenviereck für die einzelnen Bestandtheile des zugeordneten Dreieckes erhalten werden. Man findet zuvörderst aus Nr. 64.:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \delta_1\cdot\frac{a\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)}{a_1\sin B\sin C} = \delta_1\frac{a_1\cos^2\tfrac{1}{2}(B-C)}{a\sin B\sin C}\\ \beta &= \delta_2\cdot\frac{b\cos^2\tfrac{1}{2}(C+A)}{b_1\sin A\sin C} = \delta_2\frac{b_1\cos^2\tfrac{1}{2}(C-A)}{b\sin A\sin C}\\ \gamma &= \delta_3\cdot\frac{c\sin^2\tfrac{1}{2}(B-A)}{c_1\sin A\sin B} = \delta_3\cdot\frac{c_1\sin^2\tfrac{1}{2}(B+A)}{c\sin A\sin B}\end{aligned}\right\} 118.$$

also auch:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \delta_1 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)\,\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin B\,\sin C} \\ \beta &= \delta_2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(C+A)\,\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\sin A\,\sin C} \\ \gamma &= \delta_3 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)\,\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin A\,\sin B} \end{aligned}\right\} 119.$$

Ferner wird nach Nr. 69.:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{aa_1bb_1}{cc_1} \cdot \frac{\sin^2\frac{1}{2}(A+B)\,\sin^2\frac{1}{2}(B-A)}{\sin A\,\sin B\,\mathrm{sn}\,C} \\ &= \frac{bb_1cc_1}{aa_1} \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{2}(B+C)\,\cos^2\frac{1}{2}(B-C)}{\sin A\,\sin B\,\sin C} \\ &= \frac{aa_1cc_1}{bb_1} \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{2}(C+A)\,\cos^2\frac{1}{2}(C-A)}{\sin A\,\sin B\,\sin C} \end{aligned}\right\} 120.$$

woraus denn mit Hülfe von 116. sogleich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \delta_1^2 \cdot \frac{\Delta F''}{2FF'} = \frac{\Delta\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}{32FF'F''} \cdot \sin^2(\delta_{23}) \\ \beta^2 &= \delta_2^2 \cdot \frac{\Delta F'}{2FF''} = \frac{\Delta\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}{32FF'F''} \cdot \sin^2(\delta_{13}) \\ \gamma^2 &= \delta_3^2 \cdot \frac{\Delta F}{2F'F''} = \frac{\Delta\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}{32FF'F''} \cdot \sin^2(\delta_{12}) \end{aligned}\right\} 121.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha\beta) &= \frac{\Delta F}{\delta_1\delta_2} = \sin(\delta_{12}) \\ \sin(\alpha\gamma) &= \frac{\Delta F''}{\delta_1\delta_3} = \sin(\delta_{13}) \\ \sin(\beta\gamma) &= \frac{\Delta F''}{\delta_2\delta_3} = \sin(\delta_{23}) \end{aligned}\right\} 122.$$

folgt. Man erhält dadurch unmittelbar den merkwürdigen Satz:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha\beta) &= (\delta_{12}) \\ (\alpha\gamma) &= 180 - (\delta_{13}) \\ (\beta\gamma) &= 180 - (\delta_{23}) \end{aligned}\right\} 123.$$

so dass im Sehnenviereckе die zugeordneten Winkel unmittelbar aus den Winkeln gefunden werden können, unter denen sich je zwei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der Gegenseiten schneiden.

Wie nun im Vorstehenden die allgemeinen Formeln auf das Sehnenviereck angewendet worden sind, so könnte das auch in Bezug auf das Tangentenviereck geschehen. Indessen würde dadurch theils die gegenwärtige Untersuchung allzuweit ausgedehnt werden, theils erfordert das Tangentenviereck noch eigenthümliche, von den bisher geführten, ziemlich abweichende Erörterungen. Ich spare daher diesen Gegenstand für eine andere Zeit auf, wo ich dann zugleich auch die Eigenschaften der vier merkwürdigen Punkte der Haupt- und Nebendreiecke näher betrachten werde.

Digitized by Google

# XXIV.

## Beweis eines geometrischen Satzes.

Von

Herrn Thomas Clausen

zu Altona.

Beschreibt man in einem Kreise ein Dreieck, dessen zwei Seiten mit gegebenen Linien parallel sind; so ist die dritte Seite eine Tangente eines andern concentrischen Kreises. Durch die orthographische Projection auf eine gegen die Ebene der beiden Kreise geneigte Ebene werden die sämmtlichen Parallelen wieder parallel, und die Kreise ähnliche und ähnlichliegende concentrische Ellipsen. Man sieht hieraus, dass die dritte Seite jedes in eine Ellipse eingeschriebenen Dreiecks, dessen zwei Seiten mit zweien beliebigen gegebenen Durchmessern parallel sind, eine ähnliche, ähnlichliegende concentrische Ellipse berührt.

Da die Parabel und Hyperbel aus dem Kreise nur durch Centralprojection entstehen, wodurch die Parallelen im Allgemeinen nicht wieder parallel werden; so lässt sich auf diese Art nicht die Curve finden, die von der dritten Seite jedes in jene beiden eingeschriebenen Dreiecks, deren zwei Seiten mit gegebenen Linien parallel sind, berührt wird. Ich habe daher diese Curve auf folgende Art für alle Kegelschnitte analytisch bestimmt.

1. Statt der rechtwinklichten Coordinaten $x_1 = AN$, $y_1 = MN$ des Punkts $M$ (Taf. IV. Fig. 1.), nehme ich, wenn $AN$ und $MO$ mit den beiden gegebenen Linien parallel sind, und also einen constanten Winkel $MON = \Theta$ einschliessen, schiefwinklichte $x = AO$, $y = MO$. Auf diese Weise wird

$$x_1 = x + y \cos \Theta, \quad y_1 = y \sin \Theta.$$

Der Kegelschnitt sei eine Ellipse oder Hyperbel, und die rechtwinklichten Coordinaten $x_1$, $y_1$ auf den Mittelpunkt der Curve als Anfangspunkt bezogen, die Axe der $x_1$ sei mit einer der gegebenen Linien parallel. Die Gleichung der Curve ist demnach von der Form:

$$Ax_1x_1 + 2Bx_1y_1 + Cy_1y_1 + F = 0.$$

Substituirt man hierin die obigen Werthe von $x_1$ und $y_1$, so findet man ebenfalls die Gleichung mit schiefwinklichten Coordinaten von der Form

$$axx + 2bxy + cyy + f = 0. \quad (1)$$

Digitized by Google

Es sei also $M$ der Mittelpunkt der Curve (Taf. IV. Fig. 2.); $MQ$ und $MP$ die Axen der $x$ und $y$; $ABC$ ein in der Curve eingeschriebenes Dreieck; die Seite $AB$ mit $MP$, und die Seite $AC$ mit $MQ$ parallel. Die Coordinaten des Punkts $A$ seien $\xi$, $v$; die Coordinaten des Punkts $B$ seien $\xi'$, $v'$; die Coordinaten des Punkts $C$ seien; $\xi''$, $v''$; so ist offenbar $v = v'' = AD$, und $\xi = \xi' = -DM$.

Ich nehme an dass keiner der Punkte $A$, $B$, $C$ unendlich weit entfernt liege, oder dass weder $AB$ noch $AC$ mit einer Asymptote der Hyperbel parallel sei; in welchem Falle $BC$ mit derselben Asymptote parallel wäre, oder unendlich weit entfernt läge. Die Linie $AC$, deren Gleichung $y = v = AD$ ist, schneidet also die Curve in zwei Punkten; eben so $AB$, deren Gleichung $x = \xi = -DM$. Demnach können weder $a$ noch $c$ der Gleichung (1) verschwinden. Es sei nun die erste willkührliche mit $MQ$ parallele Seite des Dreiecks $AC$ gezogen und $AD = v$, so werden die beiden Werthe von $x$, die diesem Werthe von $y$ entsprechen, $\xi = -MD$, und $\xi'' = ME$ die Wurzeln der Gleichung

$$axx + 2bxv + cvv + f = 0$$

$$\xi = -\frac{bv}{a} - \frac{1}{a}\,Y$$

$$\xi'' = -\frac{bv}{a} + \frac{1}{a}\,Y$$

wenn man $Y$ positiv nimmt und $YY = (bb - ac)vv - af$ setzt.

Die beiden Werthe $v = DA$ und $v' = DB$ sind die Wurzeln $y$ der Gleichung $cyy + 2b\xi y + a\xi\xi + f = 0$, also ist

$$v + v' = -\frac{2b\xi}{c}; \text{ oder}$$

$$v' = (\frac{2bb}{ac} - 1)\,v + \frac{2b}{ac}\,Y.$$

Die Gleichung der durch $B$ und $C$ gelegten Linie ist:

$$(v'' - v')x + (\xi' - \xi'')y + \xi''v' - \xi'v'' = 0$$

der offenbar durch Substitution der Coordinaten von $B$: $x = \xi'$, $y = v'$; und von $C$: $x = \xi''$, $y = v''$ Genüge geleistet wird. Substituirt man in diese die für $\xi' = \xi$, $\xi''$, $v'$ und $v'' = v$ gefundenen Werthe, so findet man die allgemeine Gleichung für die Linie $BC$:

$$\{(bb - ac)v + bY\}x + c\,.\,Y\,.\,y + bf = 0. \quad (2)$$

Der Berührungspunkt mit der Curve, die alle diese Linien berühren, ist der Durchschnitt von einer beliebigen mit einer unendlich wenig verschiedenen derselben. Es sei die Gleichung einer Tangente

$$Ax + By + C = 0$$

so ist die Gleichung der unendlich wenig verschiedenen Tangente:

$$\{A + (\frac{dA}{dv})dv\}x + \{B + (\frac{dB}{dv})dv\}\,y + C + (\frac{dC}{dv})dv = 0$$

deren Durchschnittspunkt mit dem Durchschnittspunkte der beiden

$$Ax + By + C = 0$$

Digitized by Google

$$(\frac{dA}{dv}).x + (\frac{dB}{dv})y + (\frac{dC}{dv}) = 0$$

identisch ist. Die Coordinaten desselben seien $x=x'$, $y=y'$; so ist

$$x' = \frac{B(\frac{dC}{dv}) - C(\frac{dB}{dv})}{A(\frac{dB}{dv}) - B(\frac{dA}{dv})}$$

$$y' = \frac{C(\frac{dA}{dv}) - A(\frac{dC}{dv})}{A(\frac{dB}{dv}) - B(\frac{dA}{dv})}.$$

Nach der Gleichung (2) hat man:

$$A = (bb - ac)v + bY;\ B = cY;\ C = bf;$$

folglich da $\frac{dY}{dv} = \frac{(bb-ac)v}{Y}$ ist:

$$\frac{Y}{bb-ac} \cdot (\frac{dA}{dv}) = b \,.\, v + Y;\ \frac{Y}{bb-ac} \cdot (\frac{dB}{dv}) = cv;\ (\frac{dC}{dv}) = 0$$

also

$$x' = -\frac{bv}{a};\ y' = \frac{bb \,.\, v}{ac} + \frac{bY}{ac}$$

und

$$ax'x' + 2bx'y' + cy'y' + \frac{b^2 f}{ac} = 0. \quad (3)$$

Beide Curven (1) und (3) sind also zugleich concentrische, ähnliche und ähnlichliegende Ellipsen, oder Hyperbeln zwischen denselben Asymptoten.

2. Ist die gegebene Curve eine Parabel und der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel derselben, so wird die Gleichung für die Curve auf die mit den beiden Seiten des Dreiecks parallelen Axen bezogen:

$$(ax + by)^2 + 2cx + 2dy = 0$$

und wenn man wie oben verfährt, und $YY = c^2 + 2av(bc - ad)$ setzt:

$$\xi = -\frac{abv + c}{a^2} - \frac{Y}{a^2}$$

$$\xi'' = -\frac{abv + c}{a^2} + \frac{Y}{a^2}$$

$v$ und $v'$ sind die beiden Wurzeln $y$ der Gleichung:

$b^2y^2 + 2y(ab\xi + d) + a^2\xi^2 + 2c\xi$; also ist

$$v + v' = -2\frac{ab\xi + d}{b^2}$$

$$v' = v + \frac{2(bc - ad)}{ab^2} + \frac{2Y}{ab}$$

und die Gleichung für alle dritte Seiten des Dreiecks:

Digitized by Google

$$a\{bc-ad+bY\}x+b^2Y.\ y-bv(bc-ad)-cd+dY.$$

Es ist also

$$A=a(bc-ad+bY);\ B=b^2Y;\ C=-bv(bc-ad)-cd+dY,$$

und da

$$\frac{dY}{dy}=\frac{a(bc-ad)}{Y}\text{ ist:}$$

$$\frac{Y}{bc-ad}\cdot\left(\frac{dA}{dv}\right)=a^2b;\ \frac{Y}{bc-ad}\left(\frac{dB}{dv}\right)=ab^2;\ \frac{Y}{bc-ad}\cdot\left(\frac{dC}{dv}\right)=ad-bY;$$

also

$$x'=-\frac{c}{a^2}-\frac{bv}{a}$$

$$y'=\frac{bc-ad}{ab^2}+v+\frac{Y}{ab}$$

$$(ax'+by')^2+2cx'+2dy'=-\left(\frac{bc-ad}{ab}\right)^2.$$

Beide Curven sind demnach auch zugleich Parabeln mit gleichem Parameter, deren Hauptaxen zusammenfallen.

3. Hiernach ist es leicht in jedem Kegelschnitte, wenn es möglich ist, ein Dreieck zu beschreiben, dessen zwei Seiten mit gegebenen Linien parallel sind, und dessen dritte Seite durch einen gegebenen Punkt geht. Man beschreibe nemlich ein willkürliches Dreieck $A,BC$, dessen Seiten $A,B$ und $A,C$ mit den gegebenen Graden parallel sind, und dessen Spitzen $A,BC$ auf dem Umfange der gegebenen Curve liegen. Mit $BC$ parallel (Taf. IV. Fig. 3.) ziehe man, wenn es möglich ist, die Tangente $B'C'$ an die gegebene Curve. Vom Mittelpunkte $M$ der Curve ziehe man eine Linie an den Berührungspunkt $T'$, die die Linie $BC$ in $T$ schneidet; so ist $T$ der Berührungspunkt der zweiten Curve, die mit der gegebenen ähnlich, ähnlichliegend und concentrisch ist. Es ist $MT:MT'=\frac{b}{\sqrt{ac}}:1$ für alle eingeschriebene Dreiecke constant. Es sei $A$ der Punkt, der auf der gesuchten Tangente $AU$ an die zweite Curve liegen soll; zieht man mit dieser parallel $A'U'$, die die gegebene Curve in $U'$ tangirt, und die Linie $MA$ in $A'$ schneidet; so ist ebenfalls $MU:MU'=MA:MA'=MT:MT'$. Folglich müssen $AT$ und $A'T'$ auch parallel sein. Man ziehe demnach, nachdem $T$ und $T'$ bestimmt sind, $TA$ und die Parallele $T'A'$, die die Linie $MA$ in $A'$ schneidet, und von $A'$, wenn er nicht innerhalb der gegebenen Curve liegt, in welchem Falle die Construction unmöglich ist, eine Tangente an die gegebene Curve, so ist die durch $A$ gezogene mit ihr parallele die gesuchte Linie.

In der Hyperbel ist keine mit $BC$ parallele Tangente möglich, wenn $BC$ beide Aeste schneidet. Die Hyperbel, die alle Linien $BC$ berührt, liegt in diesem Falle in den Nebenwinkeln der Asymptoten. Es sei die Gleichung der gegebenen Hyperbel auf ihre Asymptoten

$$x_2y_2=f_2 \quad (4)$$

so ist in diesem Falle die Gleichung der von $BC$ berührten Curve

$$x_2y_2=-mf_2 \quad (5)$$

wo $m$ positiv ist. Beschreibt man die zu dieser Hyperbel supple-

Digitized by Google

mentaire, in der jedem Punkte dessen Coordinaten in der einen $x_2$, $y_2$, in der zweiten ein Punkt, dessen Coordinaten $\xi_1 = x_2$, $v_1 = -y_2$ sind, entspricht; so wird die Gleichung für dieselbe

$$\xi_1 v_1 = mf_2 \quad (6)$$

Diese Hyperbel ist mit der gegebenen ähnlich, ähnlichliegend und concentrisch. Ebenfalls wenn eine Tangente an die Curve (5) durch einen Punkt geht, dessen Coordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, auf die Asymptoten bezogen, so geht die Tangente an den entsprechenden Punkt der Curve (6) durch einen Punkt dessen Coordinaten $\alpha$, $-\beta$ sind. Es seien Taf. IV. Fig. 4. die Asymptoten der beiden Hyperbeln $AB$ und $CD$, $ab$ die dritte Seite eines Dreiecks, das in der gegebenen Hyperbel eingeschrieben, und dessen zwei Seiten mit gegebenen Graden parallel sind, welche Linie also die Curve (5) berührt. Es soll nun durch $F$ eine Berührende an dieselbe Curve gelegt werden. Die entsprechende Tangente der Hyperbel (6) geht durch den Punkt $F'$, wenn man $FG = GF'$ macht und $FF'$ mit der Asymptote $AB$ parallel zieht. Die der Tangente $ab$ entsprechende Tangente der Curve (6) ist $ba'$, wenn man $aM = Ma'$ macht. Man construire also wie oben eine grade durch $F'$ gehende Linie, die mit $ba'$ zugleich eine mit der gegebenen ähnliche, ähnlichliegende, concentrische Hyperbel berührt; so geht die gesuchte Linie durch $F$ und den Durchschnittspunkt der eben gefundenen mit der Asymptote $CD$.

Sind die beiden Curven Parabeln, so schneiden alle parallele Tangenten $BC$ und $B'C'$ von der grossen Axe gleiche Stücke ab. Zieht man also durch den gegebenen Punkt $A$ (Taf. IV. Fig. 3.) mit der Hauptaxe eine Linie parallel und macht $AA'$ dem auf dieser Axe von $BC$ und $B'C'$ abgeschnittenen Stücke gleich, zieht darauf aus $A'$ eine Tangente an die Parabel, so ist die mit ihr durch $A$ gezogene Parallele die gesuchte Linie. Ausser den angegebenen Fällen sind keine vorhanden.

# XXV.

## Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

### Erste Abhandlung.

Diese Abhandlung eröffnet eine Reihe von Abhandlungen, in denen wir nach und nach von den neuesten wichtigern Erfindungen

Digitized by Google

in der Theorie der bestimmten Integrale ausführlich Nachricht ertheilen, überhaupt mit der Zeit eine vollständige Theorie der bestimmten Integrale zu liefern suchen werden. Dem Zwecke dieser Zeitschrift gemäss beginnen wir mit einer kurzen Darstellung der wichtigsten allgemeinen Hauptsätze von den bestimmten Integralen, auf welchen alle folgenden Untersuchungen vorzüglich beruhen, und einer kurzen Entwickelung einiger sonst schon bekannten bestimmten Integrale, die bei andern Untersuchungen besonders häufig in Anwendung gebracht werden.

## I.

## Die wichtigsten allgemeinen Hauptsätze von den bestimmten Integralen.

### §. 1.

Wenn überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

gesetzt wird, wo, wie wir offenbar anzunehmen berechtigt sind, die willkührliche Constante in der Function $\varphi(x)$ schon eingeschlossen sein soll; so nennt man die Differenz

$$\varphi(b) - \varphi(a)$$

das von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral $\int f(x)dx$, und bezeichnet diese Differenz am besten und einfachsten durch

$$\int_a^b f(x)dx,$$

so dass also

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

ist. Auch nennt man

$$\int_a^b f(x)dx$$

das zwischen den Gränzen $a$ und $b$, für $a$ als untere und $b$ als obere Gränze, genommene Integral $\int f(x)dx$. Ein jedes solches zwischen bestimmten Gränzen genommenes Integral wird aber überhaupt ein bestimmtes Integral genannt.

### §. 2.

1. Weil, indem wir immer wie vorher überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

setzen, nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\int_b^a f(x)dx = \varphi(a) - \varphi(b)$$

Digitized by Google

ist; so ist offenbar jederzeit

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

oder

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

2. Weil ferner nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^\alpha f(x)dx = \varphi(\alpha) - \varphi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

$$\int_\beta^\gamma f(x)dx = \varphi(\gamma) - \varphi(\beta),$$

u. s. w.

$$\int_\lambda^\mu f(x)dx = \varphi(\mu) - \varphi(\lambda),$$

$$\int_\mu^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(\mu)$$

ist; so ist jederzeit, wie man sogleich findet, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt,

$$\int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx$$
$$= \varphi(b) - \varphi(a),$$

und folglich, weil nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist, jederzeit

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$= \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx,$$

wie gross auch die Anzahl der durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\ldots$ $\lambda$, $\mu$ bezeichneten Grössen sein mag.

3. Wenn $A$ eine constante Grösse bezeichnet, so ist bekanntlich jederzeit

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx = A\varphi(x).$$

und folglich

$$\int_a^b Af(x)dx = A\varphi(b) - A\varphi(a) = A\{\varphi(b) - \varphi(a)\},$$

Digitized by Google

also, weil nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist, immer

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

4. Wenn, indem $A$, $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ lauter constante Grössen bezeichnen,

$$F(x) = Af(x) + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)$$

ist; so ist bekanntlich jederzeit

$$\int F(x)dx = A\int f(x)dx + A_1\int f_1(x)dx + A_2\int f_2(x)dx + \ldots + A_n\int f_n(x)dx,$$

und folglich, wenn wir überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x),$$
$$\int f_1(x)dx = \varphi_1(x),$$
$$\int f_2(x)dx = \varphi_2(x),$$
u. s. w.
$$\int f_n(x)dx = \varphi_n(x)$$

setzen,

$$\int F(x)dx = A\varphi(x) + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x),$$

also nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)dx = \quad & A\{\varphi(b) - \varphi(a)\} \\ & + A_1\{\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\} \\ & + A_2\{\varphi_2(b) - \varphi_2(a)\} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + A_n\{\varphi_n(b) - \varphi_n(a)\},\end{aligned}$$

d. i. nach dem vorigen Paragraphen offenbar

$$\int_a^b F(x)dx$$
$$= A\int_a^b f(x)dx + A_1\int_a^b f_1(x)dx + A_2\int_a^b f_2(x)dx + \ldots + A_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

## §. 3.

Wenn wir wieder überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

setzen, so ist nach dem allgemeinen Begriffe des Integrals bekanntlich

Digitized by Google

$$\varphi'(x) = f(x).$$

wo $\varphi'(x)$ wie gewöhnlich den ersten Differentialquotienten der Function $\varphi(x)$ bezeichnet. Setzen wir nun, indem $n$ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{b-a}{n} = i;$$

so ist nach einem bekannten Satze *)

$$\varphi(a+i) = \varphi(a) + if(a+\Theta i),$$
$$\varphi(a+2i) = \varphi(a+i) + if(a+i+\Theta_1 i),$$
$$\varphi(a+3i) = \varphi(a+2i) + if(a+2i+\Theta_2 i),$$

u. s. w.

$$\varphi(a+(n-1)i) = \varphi(a+(n-2)i) + if(a+(n-2)i+\Theta_{n-2}i),$$
$$\varphi(a+ni) = \varphi(a+(n-1)i) + if(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i);$$

wo $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, ... $\Theta_{n-2}$, $\Theta_{n-1}$ lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Addirt man jetzt auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, und bemerkt, dass

$$b = a + ni$$

ist; so erhält man sogleich die Gleichung

$$\varphi(b) - \varphi(a)$$
$$= i\{f(a+\Theta i) + f(a+i+\Theta_1 i) + \ldots + f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\},$$

also, weil bekanntlich

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist,

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$= i\{f(a+\Theta i) + f(a+i+\Theta_1 i) + \ldots + f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}.$$

Wenn $i$ positiv ist und die Function $f(x)$ fortwährend wächst, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, ... $\Theta_{n-1}$ lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, offenbar ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$f(a+\Theta i) \gtreqless f(a),$$
$$f(a+i+\Theta_1 i) \gtreqless f(a+i),$$
$$f(a+2i+\Theta_2 i) \gtreqless f(a+2i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i) \gtreqless f(a+(n-1)i)$$

*) Theil I. XLVIII. §. 6.

Digitized by Google

und

$$f(a+\Theta i) \gtreqless f(a+i),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \gtreqless f(a+2i),$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \gtreqless f(a+3i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \gtreqless f(a+ni);$$

also *)

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$
$$\gtreqless f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$
$$\lesseqgtr f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni);$$

folglich, weil nach der Voraussetzung $i$ positiv ist **),

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$
$$\gtreqless i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$
$$\lesseqgtr i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\}.$$

Setzen wir also hier und im Folgenden der Kürze wegen

$$\Sigma = i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\},$$
$$\Sigma' = i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \gtreqless \int_a^b f(x)dx \gtreqless \Sigma',$$

d. h. es ist $\int_a^b f(x)dx$ eine Mittelgrösse zwischen $\Sigma$ und $\Sigma'$, oder in der aus Theil I. XL. §. 33. bekannten Bezeichnung der Mittelgrössen:

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Wenn wieder $i$ positiv ist, die Function $f(x)$ aber fortwährend abnimmt, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, ... $\Theta_{n-1}$ lauter positive die Einheit

*) Theil I. XL. §. 2. §. 3.
**) Theil I. XL. §. 12. §. 13.

Digitized by Google

nicht übersteigende Grössen sind, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$f(a+\Theta i) \gtreqless f(a).$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \gtreqless f(a+i)$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \gtreqless f(a+2i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \gtreqless f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i) \lesseqgtr f(a+i),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \lesseqgtr f(a+2i),$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \lesseqgtr f(a+3i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \lesseqgtr f(a+ni);$$

also

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \gtreqless f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \lesseqgtr f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni);$$

folglich, weil nach der Voraussetzung $i$ positiv ist,

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\} \gtreqless i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\} \lesseqgtr i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \lesseqgtr \int_a^b f(x)dx \lesseqgtr \Sigma',$$

und folglich wieder

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Wenn $i$ negativ ist, und die Function $f(x)$ fortwährend wächst, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, ... $\Theta_{n-1}$ lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, wieder ganz wie vorher

Digitized by Google

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$
$$\gtreqless f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$
$$\lesseqgtr f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni).$$

Weil aber jetzt nach der Voraussetzung $i$ negativ ist; so ist

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$
$$\lesseqgtr i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$
$$\gtreqless i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \gtreqless \int_a^b f(x)dx \gtreqless \Sigma',$$

und folglich wieder

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Wenn $i$ negativ ist, und die Function $f(x)$ fortwährend abnimmt, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_{n-1}$ lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, ganz wie oben

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$
$$\lesseqgtr f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$
$$\gtreqless f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni).$$

Weil aber jetzt nach der Voraussetzung $i$ negativ ist, so ist

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$
$$\gtreqless i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$
$$\lesseqgtr i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma \lesseqgtr \int_a^b f(x)dx \lesseqgtr \Sigma',$$



Digitized by Google

und folglich auch jetzt

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Als allgemeines Resultat ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden, dass, wenn die Function $f(x)$ entweder stets wächst oder stets abnimmt, wenn man sich $x$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen $\Sigma$ und $\Sigma'$ ist, was auch die positive ganze Zahl $n$ sein mag. Da

$$\Sigma' - \Sigma = i\{f(a+ni) - f(a)\}$$

oder

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{(b-a)\{f(b) - f(a)\}}{n}$$

ist, so ist klar, dass die Differenz $\Sigma' - \Sigma$ sich, wenn $n$ wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur $n$ gross genug nimmt. Also nähert sich nach dem Vorhergehenden die Grösse $\Sigma$, wenn $n$ wächst, offenbar dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $n$ gross genug nimmt. Setzt man

$$S = i\{f(a) + f(a+i) + f(a+2i) + \ldots + f(a+ni)\},$$

so ist

$$S - \Sigma = if(a+ni)$$

oder

$$S - \Sigma = \frac{(b-a)f(b)}{n},$$

und diese Differenz nähert sich folglich, wenn $n$ wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $n$ gross genug nimmt. Also nähert sich nach dem Obigen auch die Grösse

$$S = i\{f(a) + f(a+i) + f(a+2i) + \ldots + f(a+ni)\},$$

wenn $n$ wächst, dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $n$ gross genug nimmt, wobei man immer zu beachten hat, dass

$$\frac{b-a}{n} = i$$

gesetzt worden ist.

Wenn die Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, wenn man sich $x$

Digitized by Google

von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt, nicht erfüllt ist; so wird man sich das Intervall $ab$ doch immer in eine gewisse Anzahl anderer Intervalle $a\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ..., $\lambda\mu$, $\mu b$ getheilt denken können, in deren jedem die Function $f(x)$ entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt. Und weil nun nach §. 2. 2.

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$= \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx$$

ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass das oben Bewiesene auch dann noch gilt, wenn die Function $f(x)$ nicht fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, wenn man sich $x$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verändern lässt. Daher ergiebt sich jetzt der folgende allgemeine für die Theorie der bestimmten Integrale in jeder Beziehung höchst wichtige Satz:

Wenn man, indem $n$ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{b-a}{n} = i$$

setzt, so nähert sich die Grösse

$$i\{f(a) + f(a+i) + f(a+2i) + \ldots + f(a+ni)\}$$

oder

$$if(a) + if(a+i) + if(a+2i) + \ldots + if(a+ni),$$

wenn $n$ wächst, jederzeit dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $n$ gross genug nimmt.

§. 4.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x, y)$ eine Function der zwei veränderlichen Grössen $x$ und $y$ sei. Wenn man nun aber bloss $x$ als veränderlich betrachtet, so ist das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

offenbar eine bloss von der veränderlichen Grösse $y$ abhängende Function, und es kann also

$$\int_a^b f(x, y)dx = \varphi(y)$$

gesetzt werden.

Lässt man $y$ sich um $\Delta y$ verändern, so ergiebt sich aus dieser Gleichung auf der Stelle die Gleichung

$$\Delta \int_a^b f(x, y)dx = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$



Digitized by Google

Weil ferner, wenn man sich $y$ um $\Delta y$ verändern lässt,

$$\Delta f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

also auch

$$\Delta f(x, y) \,.\, dx = f(x, y + \Delta y)dx - f(x, y)dx$$

ist; so ist nach §. 2. 4.

$$\int_a^b \Delta f(x, y) \,.\, dx = \int_a^b f(x, y + \Delta y)dx - \int_a^b f(x, y)dx.$$

So wie aber nach der Voraussetzung

$$\int_a^b f(x, y)dx = \varphi(y)$$

ist, so ist, da diese Gleichung für jedes $y$ gilt, natürlich auch

$$\int_a^b f(x, y + \Delta y)dx = \varphi(y + \Delta y),$$

und nach dem Vorhergehenden ist also

$$\int_a^b \Delta f(x, y) \,.\, dx = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der oben gefundenen Gleichung

$$\Delta \int_a^b f(x, y)dx = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\Delta \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \Delta f(x, y) \,.\, dx,$$

aus der sich ferner

$$\frac{\Delta \int_a^b f(x, y)dx}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \Delta f(x, y) \,.\, dx,$$

also nach §. 2. 3.

$$\frac{\Delta \int_a^b f(x, y)dx}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} dx$$

ergiebt. Lassen wir nun $\Delta y$ sich der Null nähern, und gehen zu den Gränzen über, so erhalten wir unmittelbar die merkwürdige und wichtige Gleichung

$$\frac{d \int_a^b f(x, y)dx}{dy} = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy} dx,$$

welche man auch unter der Form

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy} dx$$

zu schreiben pflegt.

Differentiirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung nach $y$ von Neuem, so erhält man

Digitized by Google

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_a^b f(x,\ y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{df(x,\ y)}{dy}dx = \int_a^b \frac{d^2f(x,\ y)}{dy^2}dx;$$

und folglich, wenn man wieder nach $y$ differentiirt,

$$\frac{d^3}{dy^3}\int_a^b f(x,\ y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{d^2f(x,\ y)}{dy^2}dx = \int_a^b \frac{d^3f(x,\ y)}{dy^3}dx;$$

also, wenn man wieder nach $y$ differentiirt,

$$\frac{d^4}{dy^4}\int_a^b f(x,\ y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{d^3f(x,\ y)}{dy^3}dx = \int_a^b \frac{d^4f(x,\ y)}{dy^4}dx.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist daher in völliger Allgemeinheit

$$\frac{d^n}{dy^n}\int_a^b f(x,\ y)dx = \int_a^b \frac{d^nf(x,\ y)}{dy^n}dx.$$

Man nennt die durch diese Gleichung vorgeschriebene Operation die **Differentiation unter dem Integralzeichen**, und bedient sich derselben häufig bei der Entwickelung bestimmter Integrale. Hat man nämlich ein von mehreren allgemeinen Grössen abhängendes bestimmtes Integral gefunden, so kann man offenbar jede dieser Grössen als veränderlich betrachten, und nach derselben das in Rede stehende Integral auf der einen, die Function unter dem Integralzeichen auf der andern Seite des Gleichheitszeichens willkührlich oft differentiiren, wodurch man jederzeit eben so viele neue bestimmte Integrale findet, als man Differentiationen verrichtet hat.

## §. 5.

Wir wollen jetzt auch den Fall betrachten, wenn die beiden Gränzen des Integrals selbst veränderlich, nämlich zwei beliebige Functionen von $y$ sind, die wir durch $Y$ und $Y'$ bezeichnen wollen, so dass $Y$ die untere, $Y'$ die obere Gränze des Integrals ist. Setzen wir nun wieder der Kürze wegen

$$\int_Y^{Y'} f(x,\ y)dx = \varphi(y),$$

und lassen sich $y$ um $\Delta y$ verändern, so wird

$$\Delta\int_Y^{Y'} f(x,\ y)dx = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y).$$

Ferner ist, unter der Voraussetzung, dass $Y$ und $Y'$ in $Y+\Delta Y$ und $Y'+\Delta Y'$ übergehen, wenn $y$ in $y+\Delta y$ übergeht, offenbar

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx = \varphi(y+\Delta y),$$

und folglich

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_Y^{Y'} f(x,\ y)dx = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Delta\int_Y^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_Y^{Y'} f(x,\ y)dx.$$

Digitized by Google

Nach §. 2. 2. ist

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx = \int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx$$

und

$$\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx = \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx + \int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx,$$

also

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx = \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx;$$

folglich ist

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx = \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx;$$

also nach dem Obigen

$$\Delta \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx,$$

d. i., weil nach §. 2. 4.

$$\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{Y}^{Y'} \{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)\}dx,$$

und folglich

$$\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{Y}^{Y'} \Delta f(x,\ y)\,.\,dx$$

ist,

$$\Delta \int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{Y}^{Y'} \Delta f(x,\ y)\,.\,dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx,$$

Digitized by Google

also auch offenbar

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_Y^{Y} f(x,\ y)dx$$
$$=\int_Y^{Y}\frac{\Delta f(x,\ y)}{\Delta y}dx-\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int f(x,\ y)dx=\psi(x,\ y),$$

so ist

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y)dx=\psi(Y+\Delta Y,\ y)-\psi(Y,\ y),$$

und folglich offenbar

$$\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx=\frac{\psi(Y+\Delta Y,\ y+\Delta y)-\psi(Y,\ y+\Delta y)}{\Delta y},$$

also auch

$$\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx=\frac{\psi(Y+\Delta Y,\ y+\Delta y)-\psi(Y,\ y+\Delta y)}{\Delta Y}\cdot\frac{\Delta Y}{\Delta y}.$$

Lässt man jetzt $\Delta y$, also natürlich auch $\Delta Y$, sich der Null nähern, und geht zu den Gränzen über, so ist

$$\text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx$$
$$=\text{Lim}\ \frac{\psi(Y+\Delta Y,\ y+\Delta y)-\psi(Y,\ y+\Delta y)}{\Delta Y}\cdot\text{Lim}\ \frac{\Delta Y}{\Delta y};$$

und weil nun offenbar

$$\text{Lim}\ \frac{\psi(Y+\Delta Y,\ y+\Delta y)-\psi(Y,\ y+\Delta y)}{\Delta Y}=\frac{d\psi(Y,\ y)}{dY}$$

und

$$\text{Lim}\ \frac{\Delta Y}{\Delta y}=\frac{dY}{dy}$$

ist, so ist

$$\text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx=\frac{d\psi(Y,\ y)}{dY}\cdot\frac{dY}{dy}$$

Weil aber bekanntlich

$$\psi(x,\ y)=\int f(x,\ y)dx$$

ist, so ist

$$\frac{d\psi(x,\ y)}{dx}=f(x,\ y),\ \text{also}\ \frac{d\psi(Y,\ y)}{dY}=f(Y,\ y),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

Digitized by Google

$$\text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx = f(Y,\ y)\,.\,\frac{dY}{dy}.$$

Ganz eben so ist aber natürlich

$$\text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx = f(Y',\ y)\,.\,\frac{dY'}{dy}.$$

Aus der oben bewiesenen Gleichung

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx$$
$$= \int_{Y}^{Y'}\frac{\Delta f(x,\ y)}{\Delta y}dx - \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx$$

folgt nun, wenn man, immer unter der Voraussetzung, dass $\Delta y$ sich der Null nähert, zu den Gränzen übergeht:

$$\text{Lim}\ \frac{\Delta}{\Delta y}\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx$$
$$= \text{Lim}\int_{Y}^{Y'}\frac{\Delta f(x,\ y)}{\Delta y}dx - \text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x,\ y+\Delta y)dx$$
$$+\text{Lim}\ \frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x,\ y+\Delta y)dx,$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y'} f(x,\ y)dx$$
$$= \int_{Y}^{Y'}\frac{df(x,\ y)}{dy}dx - f(Y,\ y)\,.\,\frac{dY}{dy} + f(Y',\ y)\,.\,\frac{dY'}{dy}.$$

Für $Y=a$, d. h. in dem Falle, wo die untere Gränze $Y$ eine constante Grösse ist, geht diese Gleichung, weil

$$\frac{dY}{dy}=0$$

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{Y'} f(x,\ y)dx = \int_{a}^{Y'}\frac{df(x,\ y)}{dy}dx + f(Y',\ y)\,.\,\frac{dY'}{dy}$$

über. Für $Y'=b$, d. h. in dem Falle, wo die obere Gränze $Y'$ eine constante Grösse ist, geht die obige Gleichung, weil

$$\frac{dY'}{dy}=0$$

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{b} f(x,\ y)dx = \int_{Y}^{b}\frac{df(x,\ y)}{dy}dx - f(Y,\ y)\,.\,\frac{dY}{dy}.$$

über. Wenn $Y=a$ und $Y'=b$ ist, d. h. wenn beide Gränzen constant sind, geht die obige Gleichung, weil

$$\frac{dY}{dy}=0 \text{ und } \frac{dY'}{dy}=0$$

Digitized by Google

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy}dx$$

über, welche ganz mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung übereinstimmt.

§. 6.

Wir wollen jetzt überhaupt

$$\int f(x, y)dy = \varphi(x, y),$$

also

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} = f(x, y)$$

setzen. Nach der zuletzt im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung ist

$$\frac{d}{dy}\int_a^b \varphi(x, y)dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x, y)}{dy}dx$$

oder

$$d\int_a^b \varphi(x, y)dx = dy\int_a^b \frac{d\varphi(x, y)}{dy}dx,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$d\int_a^b \varphi(x, y)dx = dy\int_a^b f(x, y)dx,$$

also

$$\int_a^b \varphi(x, y)dx = \int dy\int_a^b f(x, y)dx + \text{Const.}$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int \varphi(x, y)dx = \psi(x, y),$$

so ist

$$\int_a^b \varphi(x, y)dx = \psi(b, y) - \psi(a, y),$$

und folglich

$$\int dy\int_a^b f(x, y)dx + \text{Const} = \psi(b, y) - \psi(a, y),$$

also

$$\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)dx$$
$$= \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta) - \psi(b, \alpha) + \psi(a, \alpha).$$

Nach dem Obigen ist

$$\int f(x, y)dy = \varphi(x, y),$$

Digitized by Google

und folglich

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha),$$

also

$$dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \varphi(x, \beta)dx - \varphi(x, \alpha)dx,$$

woraus nach §. 2. 4.

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \int_a^b \varphi(x, \beta)dx - \int_a^b \varphi(x, \alpha)dx$$

folgt. Weil nun

$$\int \varphi(x, y)dx = \psi(x, y)$$

gesetzt worden ist, so ist

$$\int \varphi(x, \beta)dx = \psi(x, \beta), \int \varphi(x, \alpha)dx = \psi(x, \alpha),$$

also

$$\int_a^b \varphi(x, \beta)dx = \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta),$$

$$\int_a^b \varphi(x, \alpha)dx = \psi(b, \alpha) - \psi(a, \alpha);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

$$= \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta) - \psi(b, \alpha) + \psi(a, \alpha).$$

Vergleicht man die beiden gefundenen Ausdrücke von

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)dx \text{ und } \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

mit einander, so findet man, dass sie gleich sind, woraus sich die wichtige Gleichung

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

ergiebt, welche man kürzer auch auf folgende Art zu schreiben pflegt:

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, y)dx\, dy = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)dy\, dx.$$

Hieraus kann man ohne Schwierigkeit ableiten, dass es bei mehrfachen Integrationen zwischen gegebenen Gränzen nach eben so vielen veränderlichen Grössen ganz gleichgültig ist, in welcher Ordnung man die Integrationen verrichtet, wenn nur in Bezug auf jede veränderliche Grösse immer dieselben Gränzen beibehalten werden. So überzeugt man sich z. B. durch sehr einfache Schlüsse mittelst des Vorhergehenden sogleich, dass immer

Digitized by Google

$$\int_a^b dz \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y, z)dx$$
$$= \int_a^b dz \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y, z)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta dy \int_a^b dz \int_a^b f(x, y, z)dx$$
$$= \int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx \int_a^b f(x, y, z)dz$$
$$= \int_a^b dx \int_a^b dz \int_\alpha^\beta f(x, y, z)dy$$
$$= \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y, z)dz$$

ist.

## II.

## Ueber die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x} \text{ und } \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}.$$

### §. 7.

Zuerst wollen wir in der Kürze die beiden Integrale

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

entwickeln.

Für $x-\alpha = u$ wird

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{udu}{u^2+\beta^2},$$

und folglich, wenn man $u^2 = v$ setzt;

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dv}{v+\beta^2}.$$

Setzt man nun endlich $v+\beta^2 = w$, so wird

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \tfrac{1}{2}lw,$$

und folglich, weil

$$w = v+\beta^2 = u^2+\beta^2 = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

ist,

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.$$

Ferner ist, wenn man wieder $x-\alpha = u$ setzt,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{du}{u^2+\beta^2},$$

also, wenn $u = \beta z$ gesetzt wird,

Digitized by Google

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{dz}{1+z^2},$$

d. i. nach einer bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{Arctang } z,$$

und folglich, weil

$$z = \frac{u}{\beta} = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

ist,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Ohne Schwierigkeit ergiebt sich nun aus dem Obigen

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\ell\left\{(\tfrac{\mu}{\nu})^2 \cdot \frac{(1-\alpha\varepsilon\nu)^2+(\beta\varepsilon\nu)^2}{(1+\alpha\varepsilon\mu)^2+(\beta\varepsilon\mu)^2}\right\}.$$

Ist also $\varepsilon$ eine der Null unendlich nahe kommende Grösse, so ist

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\ell\,.\,(\tfrac{\mu}{\nu})^2,$$

woraus sich, wenn man, was offenbar verstattet ist, $\mu = \nu$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 0$$

ergiebt.

Bezeichnen wir den der trigonometrischen Tangente $\frac{x-\alpha}{\beta}$ zugehörenden Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, durch

$$(\text{Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}),$$

so ist nach dem Obigen, wenn $k$ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,(\text{Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}) + \frac{k\pi}{\beta},$$

und folglich offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\{(\text{Arctang } +\infty) - (\text{Arctang } -\infty)\},$$

also, weil

$$(\text{Arctang } +\infty) = \tfrac{1}{2}\pi,\ (\text{Arctang } -\infty) = -\tfrac{1}{2}\pi$$

ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}.$$

Digitized by Google

Weil, wie man leicht findet,

$$\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=2\,\frac{A(x-\alpha)+B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx$$
$$=2A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+2B\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=2\pi B,$$

ein Resultat, welches für die folgenden Betrachtungen von grosser Wichtigkeit ist.

Für $B=0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=0,$$

und folglich, wenn man $\beta=0$ setzt, auch immer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adx}{x-\alpha}=0.$$

Also ist jederzeit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adx}{x\pm a}=0,$$

welches auch eine in mehrfacher Beziehung wichtige Gleichung ist.

Setzt man in der obigen Hauptgleichung $-B$ für $B$, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=-2\pi B.$$

## §. 8.

Es sei jetzt

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

wo $f(x)$ und $F(x)$ ganze rationale algebraische Functionen bezeichnen, deren erste von einem niedrigern Grade als die zweite ist, eine beliebige echte gebrochene rationale algebraische Function; der Coefficient des höchsten Gliedes der Function $F(x)$ sei die Einheit, und die Gleichung $F(x)=0$ habe lauter ungleiche Wurzeln. Die reellen Wurzeln dieser Gleichung seien

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,$$

und ihre imaginären Wurzeln seien

$$\alpha\pm\beta\sqrt{-1},\ \alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1},\ \alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1},\ \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Unter der Voraussetzung, dass $F'(x)$ wie gewöhnlich den ersten Differentialquotienten von $F(x)$ bezeichnet, seien die Werthe, welche die gebrochene Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

für

$$x=a,\ x=a_1,\ x=a_2,\ x=a_3,\ \ldots\ldots$$

und für

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1},\ x=\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1},\ x=\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1},\ \ldots\ldots$$

erhält, respective

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \ldots\ldots$$

und

$$A\pm B\sqrt{-1},\ A_1\pm B_1\sqrt{-1},\ A_2\pm B_2\sqrt{-1},\ \ldots\ldots;$$

so ist nach der Theorie der Zerlegung der echten gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche bekanntlich

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=&\frac{\mathfrak{A}}{x-a}+\frac{\mathfrak{A}_1}{x-a_1}+\frac{\mathfrak{A}_2}{x-a_2}+\frac{\mathfrak{A}_3}{x-a_3}+\ldots\ldots\\&+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\\&+\frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}}+\frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\\&+\frac{A_2+B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}}+\frac{A_2-B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}}\\&+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

und folglich nach §. 2. 4.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}dx}{x-a}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}_1dx}{x-a_1}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}_2dx}{x-a_2}+\ldots\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}}+\frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A_2+B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}}+\frac{A_2-B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

also nach §. 7.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx=-2\pi(B+B_1+B_2+B_3+\ldots).$$

## §. 9.

Wir wollen nun das Differential

$$\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

betrachten, wo $m$ und $n$ positive ganze Zahlen bezeichnen, und

$$m-1<n, \text{ also } m<n+1$$

sein soll.

Die Wurzeln der Gleichung

$$1+x^n=0 \text{ oder } x^n=-1$$

sind alle in der Formel

$$x=(-1)^{\frac{1}{n}}$$

enthalten. Setzen wir nun in Theil I. XI. §. 57.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=-1,$$

so ist $\alpha=-1$, $\beta=0$, und folglich nach Theil I. XI. §. 52., wenn

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gesetzt wird, in dem vorliegenden Falle $\varrho=1$ und

$$\varphi=\text{Arctang}0+k\pi,$$

wo Arctang0 den, absolut genommen, kleinsten Bogen, dessen trigonometrische Tangente 0 ist, und $k$, weil $\alpha$ negativ ist, eine beliebige ungerade ganze Zahl bezeichnet. Weil nun Arctang 0=0 ist, und offenbar $k=1$ gesetzt werden kann, so ist es verstattet, $\varphi=\pi$ zu setzen.

Daher hat nach Theil I. XI. §. 57., wenn $n$ eine gerade Zahl ist, $(-1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden $n$ sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1+x^n=0$ die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad -\cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1};$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{(n-3)\pi}{n}-\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Weil nun aber

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}=\cos(\pi-\frac{\pi}{n})-\sin(\pi-\frac{\pi}{n})\sqrt{-1}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$

Digitized by Google

ist; so kann man die obigen $n$ ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenn dagegen $n$ eine ungerade Zahl ist, so hat nach Theil I. XL. §. 57. die Grösse $(-1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden $n$ sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1+x^n=0$ die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{3\pi}{n} - \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1};$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\frac{n\pi}{n} + \sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Weil aber

$$\cos\frac{n\pi}{n} + \sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1} = \cos\pi + \sin\pi\sqrt{-1} = -1$$

ist; so kann man diese $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Digitized by Google

Wenden wir jetzt den im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satz an, so ist

$$f(x) = x^{m-1},\ F(x) = 1 + x^n,\ F'(x) = nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{1}{n}x^{m-n}$$

zu setzen.

Ist nun zuerst $n$ eine gerade Zahl, so ist, wenn alle im vorigen Paragraphen gebrauchte Symbole ihre dortige Bedeutung auch jetzt beibehalten, nach dem Obigen

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos\frac{3\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-2)} = \cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin\frac{\pi}{n},\ \beta_1 = \sin\frac{3\pi}{n},\ \beta_2 = \sin\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-2)} = \sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und folglich

$$A \pm B\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1 \pm B_1\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2 \pm B_2\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)} \pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A \pm B\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1 \pm B_1\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{3(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{3(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_2 \pm B_2\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{5(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{5(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)} \pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B = \frac{1}{n}\sin\frac{(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1 = \frac{1}{n}\sin\frac{3(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sin\frac{5(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.



Digitized by Google

$$B_{\frac{1}{2}(n-2)} = \frac{1}{n} \sin \frac{(n-1)\,(m-n)\pi}{n};$$

und daher nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satze für ein gerades $n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$
$$= -\frac{2\pi}{n}\{\sin\frac{(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \sin\frac{(n-1)\,(m-n)\pi}{n}\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass $m-1<n$ oder $m<n+1$ ist.

Wenn $n$ ungerade ist, so ist nach dem Obigen

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos\frac{3\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-3)} = \cos\frac{(n-2)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin\frac{\pi}{n},\ \beta_1 = \sin\frac{3\pi}{n},\ \beta_2 = \sin\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-3)} = \sin\frac{(n-2)\pi}{n};$$

und durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher erhält man also offenbar in diesem Falle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$
$$= -\frac{2\pi}{n}\{\sin\frac{(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \sin\frac{(n-2)\,(m-n)\pi}{n}\}.$$

Sind nun überhaupt

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y,\ \ldots\ x+ny$$

Winkel in arithmetischer Progression, so ist nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin x = \sin x,$$
$$\sin(x+y) = 2\sin x\cos y - \sin(x-y),$$
$$\sin(x+2y) = 2\sin(x+y)\cos y - \sin x,$$
$$\sin(x+3y) = 2\sin(x+2y)\cos y - \sin(x+y),$$
u. s. w.
$$\sin(x+ny) = 2\sin(x+(n-1)y)\cos y - \sin(x+(n-2)y);$$

und folglich, wenn man

$$S = \sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + \ldots + \sin(x+ny)$$

setzt, wie man leicht durch Addition der obigen Gleichungen findet:

$$S = \sin x + 2\{S - \sin(x+ny)\}\cos y - \sin(x-y)$$
$$- \{S - \sin(x+(n-1)y) - \sin(x+ny)\},$$

Digitized by Google

$$2S(1-\cos y) = \sin x - 2\sin(x+ny)\cos y - \sin(x-y) + \sin(x+ny)\cos y - \cos(x+ny)\sin y + \sin(x+ny) = \sin x(1-\cos y) + \cos x \sin y + \sin(x+ny)(1-\cos y) - \cos(x+ny)\sin y,$$

also, weil

$$1-\cos y = 2\sin\tfrac{1}{2}y^2, \quad \sin y = 2\sin\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}y$$

ist, wenn man auf beiden Seiten mit $2\sin\frac{1}{2}y$ dividirt,

$$2S\sin\tfrac{1}{2}y = \sin x \sin\tfrac{1}{2}y + \cos x\cos\tfrac{1}{2}y + \sin(x+ny)\sin\tfrac{1}{2}y - \cos(x+ny)\cos\tfrac{1}{2}y = \cos(x-\tfrac{1}{2}y) - \cos(x+(n+\tfrac{1}{2})y).$$

Folglich ist

$$S = \frac{\cos(x-\frac{1}{2}y) - \cos(x+(n+\frac{1}{2})y)}{2\sin\frac{1}{2}y}$$

oder

$$S = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)y\,\sin(x+\frac{1}{2}ny)}{\sin\frac{1}{2}y}.$$

Aus dem ersten dieser beiden Ausdrücke erhalten wir unter der Voraussetzung, dass $n$ eine gerade Zahl ist, leicht

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n} = \frac{1-\cos(m-n)\pi}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

und folglich, weil

$$\cos(m-n)\pi = \cos m\pi, \quad \sin\frac{(m-n)\pi}{n} = -\sin\frac{m\pi}{n}$$

ist,

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n} = -\frac{1-\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist also $m$ eine ungerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}$$



Digitized by Google

$$= -\frac{1}{\sin\frac{mn}{n}},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{2n}{n\sin\frac{mn}{n}},$$

wo, da $n$ gerade, $m$ ungerade ist, und nach dem Vorhergehenden $m<n+1$ sein muss, offenbar $m<n$ ist.

Aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale erhellet auf der Stelle, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn nämlich $n$ gerade und $m$ ungerade, also $m-1$ gerade ist, jederzeit

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} + \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

oder

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

folglich nach dem Obigen

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{n}{n\sin\frac{mn}{n}}$$

ist.

Ist $m$ eine gerade, also $m-1$ eine ungerade Zahl, so erhellet aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit für ein gerades $n$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = -\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} + \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = 0,$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = 0$$

ist.

Für ein ungerades $n$ erhält man aus dem Obigen

Digitized by Google

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)\,(m-n)\pi}{n}$$
$$=\frac{1-\cos\frac{(n-1)\,(m-n)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil $n$ eine ungerade Zahl ist,

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)\,(m-n)\pi}{n}$$
$$=-\frac{1-\cos m\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist nun $m$ eine gerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)\,(m-n)\pi}{n}$$
$$=-\frac{1-\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n};$$

für ein ungerades $m$ ist dagegen

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)\,(m-n)\pi}{n}$$
$$=-\frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Folglich ist nach dem Obigen für ein ungerades $n$ und ein gerades $m$, wenn $m<n$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}.$$

Dagegen ist nach dem Obigen für ein ungerades $n$ und ein ungerades $m$, wenn $m<n+1$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Digitized by Google

§. 10.

Wir wollen nun ferner auch das Differential

$$\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$

betrachten, wo wieder $m$ und $n$ positive ganze Zahlen bezeichnen, und

$$m-1<n, \text{ also } m<n+1$$

sein soll.

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n-1=0 \text{ oder } x^n=1$$

sind alle in der Formel

$$x=(+1)^{\frac{1}{n}}$$

enthalten. Setzen wir nun in Theil I. XL. §. 57.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=+1,$$

so ist $\alpha=+1$, $\beta=0$, und folglich nach Theil I. XL. §. 52., wenn

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gesetzt wird, in dem vorliegenden Falle $\varrho=1$ und

$$\varphi=\text{Arctang}0+k\pi,$$

wo Arctang0 den, absolut genommen, kleinsten Bogen, dessen trigonometrische Tangente 0 ist, und $k$, weil $\alpha$ positiv ist, eine beliebige gerade ganze Zahl bezeichnet. Weil nun Arctang $0=0$ ist, und offenbar $k=0$ gesetzt werden kann, so ist es verstattet, $\varphi=0$ zu setzen.

Daher hat nach Theil I. XL. §. 57., wenn $n$ eine gerade Zahl ist, $(+1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden $n$ sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $x^n-1=0$ die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\pm 1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenn dagegen $n$ eine ungerade Zahl ist, so hat nach Theil I. XL. §. 57. die Grösse $(+1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden $n$ sämmtlich von ein-

Digitized by Google

ander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1 - x^n = 0$ die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Um nun wieder den in §. 8. bewiesenen allgemeinen Satz anzuwenden, müssen wir

$$f(x) = x^{m-1},\ F(x) = x^n - 1,\ F'(x) = nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{1}{n}\,x^{m-n}$$

setzen.

Ist nun zuerst $n$ eine gerade Zahl, so ist in Bezug auf §. 8.

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos\frac{4\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-4)} = \cos\frac{(n-2)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin\frac{2\pi}{n},\ \beta_1 = \sin\frac{4\pi}{n},\ \beta_2 = \sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-4)} = \sin\frac{(n-2)\pi}{n};$$

und folglich

$$A \pm B\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1 \pm B_1\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2 \pm B_2\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-4)} \pm B_{\frac{1}{2}(n-4)}\sqrt{-1} = \frac{1}{n}(\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A \pm B\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{2(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{2(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1 \pm B_1\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{4(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{4(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

Digitized by Google

$$A_2 \pm B_2\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{6(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{6(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-4)} \pm B_{\frac{1}{2}(n-4)}\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-2)\ (m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\ (m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B = \frac{1}{n}\sin\frac{2(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1 = \frac{1}{n}\sin\frac{4(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sin\frac{6(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.

$$B_{\frac{1}{2}(n-4)} = \frac{1}{n}\sin\frac{(n-2)\ (m-n)\pi}{n},$$

und daher nach §. 8. für ein gerades $n$, weil

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{x^n-1}$$

ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{2\pi}{n}\left\{\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-2)\ (m-n)\pi}{n}\right\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass $m-1 < n$ oder $m < n+1$ ist.

Wenn $n$ ungerade ist, so ist nach dem Obigen

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos\frac{4\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-3)} = \cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin\frac{2\pi}{n},\ \beta_1 = \sin\frac{4\pi}{n},\ \beta_2 = \sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-3)} = \sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher erhält man also offenbar in diesem Falle

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{2\pi}{n}\left\{\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\ (m-n)\pi}{n}\right\}.$$

Digitized by Google

Für ein gerades $n$ ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$
$$=\frac{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil $n$ eine gerade Zahl ist, wie man leicht findet,

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1-\cos m\pi)\cot\frac{mn\pi}{n}.$$

Ist also $m$ eine ungerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$
$$=\cot\frac{mn\pi}{n},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{2\pi}{n}\cot\frac{mn\pi}{n},$$

wo $m<n$ ist, da $n$ gerade, $m$ ungerade ist, und nach dem Vorhergehenden $m<n+1$ sein muss.

Aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale erhellet auf der Stelle, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn nämlich $n$ gerade und $m$ ungerade, also $m-1$ gerade ist, jederzeit

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}+\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=2\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$

oder

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

folglich nach dem Obigen

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}$$

ist.

Digitized by Google

Ist $m$ eine gerade, also $m-1$ eine ungerade Zahl, so erhellet aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit für ein gerades $n$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = 0,$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = 0$$

ist.

Für ein ungerades $n$ erhält man aus dem Obigen

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \frac{\cos\frac{(m-n)\pi}{n} - \cos(m-n)\pi}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil $n$ eine ungerade Zahl ist,

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= -\frac{\cos m\pi - \cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist nun $m$ eine gerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= -\frac{1-\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}} = -\tfrac{1}{2}\tan\frac{m\pi}{2n};$$

für ein ungerades $m$ ist dagegen

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}} = \tfrac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Folglich ist nach dem Obigen für ein ungerades $n$ und ein gerades $m$, wenn $m < n$ ist,

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = -\frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{m\pi}{2n}.$$

Dagegen ist nach dem Obigen für ein ungerades $n$ und ein ungerades $m$, wenn $m < n+1$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{2n}.$$

## §. 11.

Setzen wir in der in §. 9. für den Fall, wenn $m$ ungerade und $n$ gerade ist, gefundenen Formel für $m$ und $n$ respective $2m+1$ und $2n$, so erhalten wir

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

für $2m+1 < 2n$ oder

$$\frac{2m+1}{2n} < 1.$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus §. 10.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{tang} \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

für $2m+1 < 2n$ oder

$$\frac{2m+1}{2n} < 1.$$

Setzt man $x^{2n} = z$ und

$$\frac{2m+1}{2n} = a,$$

so findet man leicht

$$\frac{2nx^{2m}dx}{1 \pm x^{2n}} = \frac{z^{a-1}dz}{1 \pm z},$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = \infty$ auch respective $z = 0$ und $z = \infty$ ist,

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}dz}{1 \pm z} = 2n \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1 \pm x^{2n}}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}dz}{1-z} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi};$$

oder, was natürlich dasselbe ist,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi}.$$

Digitized by Google

Nicht unbeachtet zu lassen hat man, dass nach dem Obigen

$$\frac{2m+1}{2n} = a \text{ und } \frac{2m+1}{2n} < 1$$

ist.

Wenn nun aber jetzt $a$ eine beliebige positive Grösse ist, so kann man leicht zeigen, dass man den Bruch $\frac{2m+1}{2n}$, wo $m$ und $n$ veränderliche positive ganze Zahlen bezeichnen, dieser Grösse beliebig nahe bringen, d. h. dass man die positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ jederzeit so bestimmen kann, dass der numerische oder absolute Werth der Differenz zwischen den beiden Grössen $a$ und $\frac{2m+1}{2n}$ kleiner als jede gegebene noch so kleine positive Grösse $\nu$ ist. Um dies zu zeigen, wollen wir die beiden Bedingungen

$$\frac{2m+1}{2n} > a, \quad \frac{2m+1}{2n} - a < \nu$$

zu erfüllen suchen. Diese beiden Bedingungen sind aber offenbar jederzeit erfüllt, wenn $\frac{2m+1}{2n}$ eine Mittelgrösse zwischen $a$ und $a+\nu$, d. h. *) wenn

$$\frac{2m+1}{2n} = M(a, a+\nu)$$

ist. Diese letztere Bedingung ist aber nach der Lehre von den Mittelgrössen jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$2m+1 = M\{2an, 2(a+\nu)n\}$$

erfüllt ist, und es kommt also jetzt offenbar bloss darauf an, zu zeigen, dass die positive ganze Zahl $n$ jederzeit so bestimmt werden kann, dass zwischen den beiden positiven Grössen $2an$ und $2(a+\nu)n$ eine gewisse ungerade positive ganze Zahl liegt. Dies ist aber jederzeit der Fall, wenn die Differenz

$$2(a+\nu)n - 2an = 2n\nu$$

grösser als 2 ist. Setzen wir nämlich

$$2an = k + \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2(a+\nu)n = k' + \frac{\alpha'}{\beta'},$$

wo $k$ und $k'$ positive ganze Zahlen, $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha'}{\beta'}$ positive echte Brüche sind, so ist

$$2n\nu = k' - k + \frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist nun

$$k' - k + \frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta} > 2,$$

so ist offenbar jederzeit

---

*) Thl. I. XL. §. 33.

Digitized by Google

$$k' - k > 1,$$

und folglich, weil $k' - k$ eine positive ganze Zahl ist,

$$k' - k \overset{=}{>} 2$$

oder

$$k' \overset{=}{>} k + 2.$$

Wäre nun auch bloss

$$k' = k + 2,$$

so würden doch zwischen

$$k + \frac{\alpha}{\beta} \text{ und } k' + \frac{\alpha'}{\beta'},$$

d. i. zwischen

$$2\alpha n \text{ und } 2(\alpha + \nu)n$$

jedenfalls die beiden ganzen Zahlen $k+1$ und $k+2$ liegen, von denen eine nothwendig ungerade sein muss, und um so mehr muss also, wenn

$$k' > k + 2$$

ist, zwischen

$$2\alpha n \text{ und } 2(\alpha + \nu)n$$

jederzeit eine ungerade Zahl liegen. Man sieht also, dass unsere oben ausgesprochene Behauptung bewiesen sein wird, wenn man zeigen kann, dass sich die positive ganze Zahl $n$ jederzeit so bestimmen lässt, dass

$$2n\nu > 2$$

ist. Da nun aber diese Bedingung erfüllt ist, wenn man, was offenbar jederzeit möglich ist, die positive ganze Zahl $n$ so bestimmt, dass

$$n > \frac{1}{\nu}$$

ist, so ist unsere obige Behauptung nun als vollständig bewiesen anzusehen, d. h. es ist in völliger Strenge gezeigt worden, dass die positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ immer so bestimmt werden können, dass der numerische oder absolute Werth der Differenz zwischen den beiden Grössen $\alpha$ und $\frac{2m+1}{2n}$ kleiner als jede gegebene noch so kleine positive Grösse ist.

Nimmt man dies mit dem Obigen zusammen, so ist klar, dass für jedes positive $\alpha$, welches kleiner als die Einheit ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} \alpha\pi}$$

Digitized by Google

ist, welches zwei in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Resultate sind.

## III.

## Von den Euler'schen Integralen.

### §. 12.

Euler'sche Integrale der ersten und zweiten Art heissen respective die beiden bestimmten Integrale

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \text{ und } \int_0^1 (l\tfrac{1}{x})^{a-1}dx,$$

in denen die Grössen $a$ und $b$ immer als positiv angenommen werden. Das erste dieser beiden Integrale wollen wir durch $(\frac{b}{a})$, das zweite durch $\Gamma(a)$ bezeichnen, und wollen also

$$(\tfrac{b}{a}) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

$$\Gamma(a) = \int_0^1 (l\tfrac{1}{x})^{a-1}dx$$

setzen *).

Jedes dieser beiden Integrale ist einer bemerkenswerthen Transformation fähig, die wir jetzt zunächst kennen lernen wollen.

Setzt man nämlich

$$\frac{x}{1-x} = y,$$

also

$$x = \frac{y}{1+y},\ 1-x = \frac{1}{1+y},\ dx = \frac{dy}{(1+y)^2};$$

so ist, wie man leicht findet,

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}},$$

und folglich, weil für $x=0$ und $x=1$ offenbar respective $y=0$ und $y=\infty$ ist,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}}.$$

Setzt man ferner

$$l\frac{1}{x} = s,$$

so ist

---

*) Diese Bezeichnung gebraucht Herr Lejeune Dirichlet in seiner ausgezeichneten Abhandlung: Sur les intégrales Eulériennes in Crelle's Journal. T. XV. S. 258. Legendre gebraucht für die Integrale der ersten Art eine andere Bezeichnung, und geht auch von einem etwas verschiedenen Begriffe dieser Integrale aus. Wir sind aber hier Herrn Lejeune Dirichlet gefolgt.

Digitized by Google

$$\frac{1}{x} = e^z,\ x = e^{-z},\ dx = -e^{-z}dz,$$

und folglich

$$(l\frac{1}{x})^{a-1}dx = -e^{-z}z^{a-1}dz.$$

Weil nun für $x = 0$ und $x = 1$ offenbar respective $z = \infty$ und $z = 0$ ist, so ist

$$\int_0^1 (l\frac{1}{x})^{a-1}dx = -\int_\infty^0 e^{-z}z^{a-1}dz,$$

folglich nach nach §. 2. 1.

$$\int_0^1 (l\frac{1}{x})^{a-1}dx = \int_0^\infty e^{-z}z^{a-1}dz.$$

Weil man im Vorhergehenden für $y$ und $z$ offenbar auch $x$ schreiben kann, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$(\frac{b}{a}) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}},$$

$$\Gamma(a) = \int_0^1 (l\frac{1}{x})^{a-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx.$$

Weil, wie wir nachher sehen werden, die Euler'schen Integrale der ersten Art immer durch Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden können, so wollen wir unsere Betrachtung hier für jetzt auf die letzteren einschränken.

## §. 13.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx.$$

Weil nun bekanntlich

$$e^{-x}dx = -d \cdot e^{-x}$$

ist, so ist

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ ist $e^{-x} = 1$, und für $x = \infty$ ist offenbar $e^{-x} = 0$. Also ist

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 0 - (-1) = 1,$$

folglich

$$\Gamma(1) = 1.$$

## §. 14.

Nach einer aus der Integralrechnung bekannten Reductionsformel ist

Digitized by Google

$$\int e^{-x}x^a dx = x^a \int e^{-x}dx - a\int x^{a-1}dx \int e^{-x}dx,$$

und folglich, wenn man für $\int e^{-x}dx$ seinen aus dem vorigen Paragraphen bekannten Ausdruck setzt,

$$\int e^{-x}x^a dx = -x^a e^{-x} + a\int e^{-x}x^{a-1}dx + \text{Const.}$$

Für $x=0$ ist, weil $a$ immer als positiv angenommen wird, $x^a e^{-x}=0$. Für $x=\infty$ werden Zähler und Nenner des mit der Grösse $x^a e^{-x}$ identischen Bruchs $\frac{x^a}{e^x}$ unendlich. Weil nun

$$\frac{d^k \,.\, e^x}{dx^k} = e^x$$

und

$$\frac{d^k \,.\, x^a}{dx^k} = a(a-1)\,..\,(a-k+1)x^{a-k}$$

ist, so ist für $x=\infty$, was auch die positive ganze Zahl $k$ sein mag, $\frac{d^k \,.\, e^x}{dx^k}=\infty$; wenn man aber, was offenbar verstattet ist, $k$ grösser als $a$ nimmt, so ist für $x=\infty$ offenbar $\frac{d^k \,.\, x^a}{dx^k}=0$. Hieraus schliesst man nach bekannten Principien der Differentialrechnung, dass auch für $x=\infty$ der Bruch $\frac{x^a}{e^x}$ oder das Product $x^a e^{-x}=0$ ist. Also ist nach dem Obigen offenbar

$$\int_0^\infty e^{-x}x^a dx = a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,$$

d. i. in der bekannten Bezeichnung der Euler'schen Integrale der zweiten Art

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

welches eine sehr merkwürdige und wichtige Relation zwischen den Euler'schen Integralen der zweiten Art ist.

Ist $a$ die positive ganze Zahl $n$, so erhält man durch successive Anwendung der obigen Relation leicht

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\,...\,3\,.\,2\,.\,1\;\Gamma(1),$$

und folglich, weil nach dem vorigen Paragraphen $\Gamma(1)=1$ ist,

$$\Gamma(n+1) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,....\,n$$

oder

$$\Gamma(n) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,....\,(n-1).$$

## §. 15.

Unter der Voraussetzung, dass $\mu$ eine positive Grösse ist, sei $\mu x = y$, $x=\frac{y}{\mu}$, $dx=\frac{dy}{\mu}$; so ist

Digitized by Google

$$\int e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int e^{-y} y^{a-1} dy,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = \infty$ offenbar respective $y = 0$ und $y = \infty$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy$$

oder

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx;$$

also

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{\mu^a},$$

immer unter der Voraussetzung, dass $\mu$ positiv ist.

Setzt man für $a$ die positive ganze Zahl $n+1$, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\mu^{n+1}},$$

und folglich nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^n dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}{\mu^{n+1}},$$

unter der Voraussetzung, dass $n$ eine positive ganze Zahl und $\mu$ positiv ist.

## §. 16.

Wenn $1 + x$ eine positive Grösse ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} u^{b-1} du = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

wo $b$ als positiv angenommen wird. Folglich ist offenbar

$$\frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \frac{dx}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} du,$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} du,$$

woraus sich ferner nach §. 6.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx$$

ergiebt. Nun ist aber nach §. 2. 3.

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx = e^{-u} u^{b-1} \int_0^\infty e^{-ux} x^{a-1} dx,$$

und folglich, wenn wir $u$ als positiv annehmen, nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx = e^{-u} u^{b-a-1} \Gamma(a);$$



Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{b}} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\int_0^\infty e^{-u}u^{b-a-1}du,$$

oder, wenn wir $a+b$ für $b$ setzen,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)}\int_0^\infty e^{-u}u^{b-1}du,$$

d. i. in der bekannten Bezeichnung der Euler'schen Integrale der ersten und zweiten Art

$$(\frac{b}{a}) = \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

wodurch nun die in §. 12. ausgesprochene Behauptung, dass die Euler'schen Integrale der ersten Art immer durch Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden können, vollständig gerechtfertigt ist. Dass im Obigen $x$, also auch $1+x$, und $u$ positiv genommen werden können, findet seine Rechtfertigung darin, dass die Integrale sowohl in Bezug auf $x$, als auch in Bezug auf $u$, immer nur von 0 bis $\infty$ genommen werden. Andere Beweise der obigen merkwürdigen Gleichung haben Poisson im Journal de l'école polytechnique. Cahier. XIX. und Jacobi in Crelle's Journal. B. XI. S. 307. gegeben.

Wenn $a<1$ ist und $b=1-a$, also $a+b=1$ gesetzt wird, so ergiebt sich aus dem Obigen, und weil bekanntlich $\Gamma(1)=1$ ist,

$$(\frac{1-a}{a}) = \Gamma(a)\ \Gamma(1-a),$$

d. i. nach §. 12.

$$\Gamma(a)\ \Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen, nach welchen nämlich $a$ positiv und kleiner als die Einheit ist, hat man aber nach §. 11.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

und man wird folglich durch das Obige zu der höchst merkwürdigen Gleichung

$$\Gamma(a)\ \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

geführt, wo immer $a$ positiv und kleiner als die Einheit sein muss.

Für $a=\frac{1}{2}$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \pi,$$

und folglich, weil, wie sogleich aus dem in §. 3. bewiesenen Satze erhellet, $\Gamma(\frac{1}{2})$ eine positive Grösse ist,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx,$$

Digitized by Google

also, wenn wir $x = t^2$ setzen,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

welches auch ein höchst wichtiges und merkwürdiges Resultat ist

Nach §. 2. 2. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt + \int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

und nach dem in §. 3. bewiesenen Satze ist offenbar

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Nach §. 14. ist

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) &= (n-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) \\ &= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) \\ &= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\,(n-\tfrac{5}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\ldots\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}),\end{aligned}$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ist,

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\ldots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi}.$$

## §. 17.

Umgekehrt kann man nun aber auch die Euler'schen Integrale der zweiten Art immer durch Euler'sche Integrale der ersten Art ausdrücken. Bezeichnet nämlich $n$ eine positive ganze Zahl, so ist nach der im vorigen Paragraphen gefundenen Hauptformel



Digitized by Google

$$\left(\frac{b:n}{a:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{b}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{n}\right)}.$$

Folglich ist, wenn auch $m$ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(\frac{1:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{2:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{3:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

u. s. w.

$$\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, so erhält man

$$\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\cdots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)};$$

also

$$\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m}{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\cdots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)}.$$

Für $m=n$ erhält man aus dieser Formel, weil bekanntlich $\Gamma(1)=1$ ist,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\left\{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\cdots\left(\frac{n-1:n}{1:n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\left\{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\cdots\left(\frac{n-1:n}{1:n}\right)\right\}^{\frac{m}{n}}}{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\cdots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)},$$

Digitized by Google

und es kann folglich, weil $\frac{m}{n}$ jeder positive rationale Bruch sein kann, jedes Euler'sche Integral der zweiten Art durch lauter Euler'sche Integrale der ersten Art ausgedrückt werden.

## §. 18.

Wenn $n$ wieder eine positive ganze Zahl bezeichnet, so ist nach §. 16.

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$\Gamma(\tfrac{2}{n})\,\Gamma(\tfrac{n-2}{n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}},$$

$$\Gamma(\tfrac{3}{n})\,\Gamma(\tfrac{n-3}{n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}},$$

u. s. w.

$$\Gamma(\tfrac{n-1}{n})\,\Gamma(\tfrac{1}{n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\tfrac{2}{n})\,\Gamma(\tfrac{3}{n})\ldots\Gamma(\tfrac{n-1}{n})\}^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

In §. 10. haben wir gesehen, dass die Gleichung $x^n - 1 = 0$, wenn $n$ eine gerade Zahl ist, die folgenden $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln hat:

$$\pm 1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Folglich ist nach einem bekannten Satze von den Gleichungen

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$
$$\times\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

Digitized by Google

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

. . . . . .

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

also, wenn man immer je zwei conjugirte imaginäre Factoren mit einander verbindet,

$$x^n-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

. . . . . .

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right).$$

Dividirt man nun durch $x^2-1$, so erhält man nach einem sehr bekannten arithmetischen Satze

$$x^{n-2}+x^{n-4}+x^{n-6}+\ldots+x^2+1$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

u. s. w.

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right),$$

also für $x=1$

$$\frac{n}{2}=2^{\frac{n-2}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder, wenn wir jetzt $n$ für die positive ganze Zahl $\frac{n}{2}$ setzen,

$$n=2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=2^{2(n-1)}\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}^2,$$

Digitized by Google

folglich

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Nun ist aber allgemein

$$\sin\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \cos\frac{k\pi}{2n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \sin\frac{(n-k)\pi}{2n},$$

und folglich

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$\times \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} \sin\frac{(n-3)\pi}{2n} \ldots \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$= 2^{n-1}\left\{\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1} \cdot \frac{n}{2^{2(n-1)}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\left\{\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n})\right\}^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

folglich

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nach §. 14. ist nun

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n}) = \tfrac{1}{n}\ \Gamma(\tfrac{1}{n}),$$

$$\Gamma(\tfrac{n+2}{n}) = \tfrac{2}{n}\ \Gamma(\tfrac{2}{n}),$$

$$\Gamma(\tfrac{n+3}{n}) = \tfrac{3}{n}\ \Gamma(\tfrac{3}{n}),$$

u. s. w.

$$\Gamma(\tfrac{2n-1}{n}) = \tfrac{n-1}{n}\ \Gamma(\tfrac{n-1}{n});$$

also

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n})\ \Gamma(\tfrac{n+2}{n})\ \Gamma(\tfrac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{2n-1}{n})$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{n^{n-1}}\ \Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n});$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n})\ \Gamma(\tfrac{n+2}{n})\ \Gamma(\tfrac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{2n-1}{n}) = \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{n^{n-1}}\left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Digitized by Google

§. 19.

Nach §. 15. ist, wenn $s$ eine positive Constante bezeichnet,

$$1.\quad \int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}dx = \frac{\Gamma(a)}{s^a}.$$

Nun ist, wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann,

$$\int e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sx}}{s} + \text{Const.},$$

und folglich, weil die Grösse $s$ positiv ist,

$$2.\quad \int_0^\infty e^{-sx}dx = 0 - (-\frac{1}{s}) = \frac{1}{s};$$

also

$$\int ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = \int \frac{ds}{s} = ls + \text{Const.},$$

und folglich, wenn $\alpha$ und $\beta$ positive Grössen bezeichnen,

$$\int_\alpha^\beta ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Nach §. 6. ist aber

$$\int_\alpha^\beta ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = \int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-sx}ds,$$

und folglich auch

$$\int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-sx}ds = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Weil

$$\int e^{-sx}ds = -\frac{e^{-sx}}{x} + \text{Const.},$$

ist, so ist

$$\int_\alpha^\beta e^{-sx}ds = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Setzt man $\alpha = 1$ und $\beta = s$, so erhält man

$$4.\quad \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = ls.$$

Weil nun nach §. 12.

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma(a)$$

ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a)$$

Digitized by Google

gesetzt wird,

$$\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma'(a),$$

also nach §. 5.

$$\int_0^\infty \frac{d\,.\,e^{-s}s^{a-1}}{da}ds = \Gamma'(a),$$

d. i., wie man nach bekannten Regeln der Differentialrechnung sogleich findet,

$$5.\quad \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ls\ ds = \Gamma'(a),$$

und folglich, wenn man für $ls$ den Ausdruck 4. setzt,

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = \Gamma'(a),$$

oder nach §. 2. 3.

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}(e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = \Gamma'(a),$$

und folglich nach §. 6.

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}(e^{-x} - e^{-sx})\frac{ds}{x} = \Gamma'(a),$$

oder nach §. 2. 3. und §. 2. 4.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty (e^{-x}e^{-s}s^{a-1} - e^{-(1+x)s}s^{a-1})ds = \Gamma(a)$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\{e^{-x}\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds - \int_0^\infty e^{-(1+x)s}s^{a-1}ds\} = \Gamma(a).$$

Weil nun nach §. 12. und §. 15.

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma(a),$$

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)s}s^{a-1}ds = \frac{\Gamma(a)}{(1+x)^a}$$

ist, so wird die vorhergehende Gleichung offenbar

$$6.\quad \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right\} = \Gamma'(a)$$

oder

$$7.\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right\} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da}.$$

Da die Integrale in Bezug auf $x$ zwischen den Gränzen 0 und $\infty$ genommen werden, so kann man $x$, und folglich auch $1+x$, wie es die vorher in Anspruch genommene Anwendung von §. 15. erfordert, immer als positiv betrachten.

Setzt man nun

$$\frac{1}{1+x} = y,\ \text{also}\ x = \frac{1-y}{y} = \frac{1}{y} - 1,$$

Digitized by Google

so ist

$$dx = -\frac{dy}{y^2}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y(1-y)},$$

und für $x = 0$ und $x = \infty$ ist respective $y = 1$ und $y = 0$. Also ist nach 7.

$$-\int_1^0 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^a)\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da},$$

oder nach §. 2. 1.

$$8. \quad \int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^a)\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da}.$$

Setzt man jetzt, indem $n$ eine von $a$ unabhängige positive ganze Zahl bezeichnet, für $a$ nach und nach

$$a,\ a+\frac{1}{n},\ a+\frac{2}{n},\ a+\frac{3}{n},\ \ldots\ a+\frac{n-1}{n},$$

und addirt alle dadurch aus 8. sich ergebenden Gleichungen zu einander, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$S = \frac{dl\Gamma(a)}{da} + \frac{dl\Gamma(a+\frac{1}{n})}{da} + \ldots + \frac{dl\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{da}$$

gesetzt wird, nach §. 2. 4. die Gleichung

$$\int_0^1 \{ne^{1-\frac{1}{y}} - y^a(1 + y^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{2}{n}} + \ldots + y^{\frac{n-1}{n}})\}\frac{dy}{y(1-y)} = S,$$

oder, weil

$$1 + y^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{2}{n}} + \ldots + y^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-y}{1-y^{\frac{1}{n}}}$$

ist,

$$9. \quad \int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{y}}}{1-y} - \frac{y^a}{1-y^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{dy}{y} = S.$$

Setzt man $y^n$ für $y$, so wird diese Gleichung, wie man leicht findet,

$$10. \quad n\int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{y^{na}}{1-y}\right)\frac{dy}{y} = S.$$

Wird in der Gleichung 8. für $n$ die Grösse $na$ gesetzt, so wird diese Gleichung

$$\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^{na})\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(na)}{d.na}.$$

Nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung ist aber

$$\frac{dl\Gamma(na)}{da} = \frac{dl\Gamma(na)}{d.na} \cdot \frac{d.na}{da} = n\frac{dl\Gamma(na)}{d.na},$$

Digitized by Google

und folglich

$$\frac{dl\Gamma(na)}{d\,.\,na} = \frac{1}{n}\,.\,\frac{dl\Gamma(na)}{da},$$

also nach dem Obigen

$$n\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^{na})\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(na)}{da}$$

oder

$$11.\quad n\int_0^1 (\frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y} - \frac{y^{na}}{1-y})\frac{dy}{y} = \frac{dl\Gamma(na)}{da}.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung 10. ab, so erhält man

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = S - \frac{dl\Gamma(na)}{da}.$$

Weil nun nach dem Obigen offenbar

$$S = \frac{dl\,.\,\Gamma(a)\;\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{da}$$

ist, so ist

$$S - \frac{dl\Gamma(na)}{da} = \frac{d}{da}\,l\left\{\frac{\Gamma(a)\;\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

und folglich nach dem Obigen

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = \frac{d}{da}\,l\left\{\frac{\Gamma(a)\;\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\}.$$

Setzen wir

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = lp,$$

wo, was man wohl zu beachten hat, die Grösse $p$ von $a$ ganz unabhängig ist, so wird die vorhergehende Gleichung

$$lpda = dl\left\{\frac{\Gamma(a)\;\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

und folglich, wenn man integrirt, und die willkührliche Constante durch $lq$ bezeichnet,

$$alp + lq = l\left\{\frac{\Gamma(a)\;\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\}$$

oder

Digitized by Google

$$l \cdot qp^a = l\left\{\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n}) \ldots \Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

also

$$\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n}) \ldots \Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)} = qp^a$$

oder

$$12.\quad \Gamma(a)\ \Gamma(a+\tfrac{1}{n}) \ldots \Gamma(a+\tfrac{n-1}{n}) = qp^a\Gamma(na).$$

Um die von $a$ unabhängigen Grössen $p$ und $q$ zu bestimmen, setze man, um zunächst den Werth von $p$ zu finden in dieser Gleichung $a+\frac{1}{n}$ für $a$, so wird dieselbe

$$\Gamma(a+\tfrac{1}{n})\ \Gamma(a+\tfrac{2}{n}) \ldots \Gamma(a+1) = qp^{a+\frac{1}{n}}\ \Gamma(na+1).$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = p^{\frac{1}{n}}\ \frac{\Gamma(na+1)}{\Gamma(na)},$$

also, weil nach §. 14.

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ \Gamma(na+1) = na\Gamma(na)$$

ist,

$$1 = np^{\frac{1}{n}},\ p^{\frac{1}{n}} = n^{-1},\ p = n^{-n}.$$

Um $q$ zu bestimmen, setze man in der Gleichung 12. die Grösse $a = \frac{1}{n}$, so erhält man, weil $\Gamma(na) = \Gamma(1) = 1$ und $p^a = n^{-1} = \frac{1}{n}$ ist,

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}\,q,$$

und folglich

$$q = n\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n}).$$

Nach §. 18. ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und folglich

$$q = n\left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}.$$

Führt man nun die gefundenen Werthe von $p$ und $q$ in die Gleichung 12. ein, so erhält man

Digitized by Google

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{n})\,\Gamma(a+\tfrac{2}{n})\ldots\Gamma(a+\tfrac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na).$$

Mit dem Beweise dieser höchst merkwürdigen Gleichung haben sich verschiedene berühmte Mathematiker, namentlich Gauss (Comment. Gotting. rec. Vol. II.), Legendre (Exercices de calcul intégral. T. II. p. 23. Traité des fonctions elliptiques. T. II. p. 444.), Cauchy (Exercices de Mathématiques. 15me Livraison. p. 91), Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. VII.) beschäftigt. Der obige äusserst schöne und sinnreiche Beweis, der uns vor allen übrigen sehr wesentliche Vorzüge zu haben scheint, ist von Lejeune Dirichlet in Crelle's Journal. B. XV. S. 258. gegeben worden.

## §. 20.

Unter der Voraussetzung, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und $p, q, r, s, \ldots$ positive Grössen sind, wollen wir im Folgenden der Kürze wegen

$$\varphi(x) = \beta\left\{1-(\tfrac{x}{\alpha})^p\right\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\varphi_1(x, y) = \gamma\left\{1-(\tfrac{x}{\alpha})^p-(\tfrac{y}{\beta})^q\right\}^{\frac{1}{r}},$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \delta\left\{1-(\tfrac{x}{\alpha})^p-(\tfrac{y}{\beta})^q-(\tfrac{z}{\gamma})^r\right\}^{\frac{1}{s}},$$

setzen. u. s. w.

Dies vorausgesetzt, kommt man nun bei Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik häufig auf Integrale von der Form

$$\int_0^{\alpha} x^{a-1}dx,$$

$$\int_0^{\alpha} dx \int_0^{\varphi(x)} x^{a-1}y^{b-1}dy,$$

$$\int_0^{\alpha} dx \int_0^{\varphi(x)} dy \int_0^{\varphi_1(x, y)} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

wo die Grössen $a, b, c, d, \ldots$ auch sämmtlich positiv sein sollen. Für diese Integrale, die man, wie sogleich erhellet, auch unter der Form

$$\int_0^{\alpha} x^{a-1}dx,$$

$$\int_0^{\alpha} x^{a-1}dx \int_0^{\varphi(x)} y^{b-1}dy,$$

$$\int_0^{\alpha} x^{a-1}dx \int_0^{\varphi(x)} y^{b-1}dy \int_0^{\varphi_1(x, y)} z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

Digitized by Google

darstellen kann, hat Lejeune Dirichlet sehr merkwürdige Ausdrücke gefunden *), welche wir jetzt entwickeln wollen.

Zuvörderst wollen wir eine Transformation mit diesen Integralen vornehmen. Setzen wir nämlich für

$$(\frac{x}{\alpha})^p,\ (\frac{y}{\beta})^q,\ (\frac{z}{\gamma})^r, \ldots .$$

respective

$$x,\ y,\ z, \ldots .,$$

so müssen wir, wie sogleich erhellen wird, für

$$dx,\ dy,\ dz, \ldots .$$

respective

$$\frac{\alpha}{p} x^{\frac{1}{p}-1} dx,\ \frac{\beta}{q} y^{\frac{1}{q}-1} dy,\ \frac{\gamma}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz, \ldots .$$

setzen, und eben so leicht wird man sich überzeugen, dass statt der Gränzen

$$0 \text{ und } \alpha,\ 0 \text{ und } \varphi(x),\ 0 \text{ und } \varphi_1(x, y), \ldots .$$

respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1-x,\ 0 \text{ und } 1-x-y, \ldots .,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$1-x=y_1,\ 1-x-y=z_1, \ldots .$$

setzen, die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1, \ldots .$$

gesetzt werden müssen. Daher haben wir es jetzt mit der Entwickelung der folgenden Integrale zu thun:

$$\frac{\alpha^a}{p} \int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1} dx,$$

$$\frac{\alpha^a \beta^b}{pq} \int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1} dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1} dy,$$

$$\frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c}{pqr} \int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1} dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1} dy \int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1} dz,$$

u. s. w.

oder mit der Entwickelung der Integrale

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1} dx,$$

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1} dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1} dy,$$

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. VIII. p. 156. Journal de Mathématiques pures et appliquées par J. Liouville. T. IV. p. 168.

Digitized by Google

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy \int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz,$$

u. s. w.

Das erste dieser Integrale lässt sich leicht finden. Es ist nämlich nach einer sehr bekannten Hauptformel der Integralrechnung

$$\int x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{p}{a}x^{\frac{a}{p}} + \text{Const.},$$

wobei man nicht unbeachtet zu lassen hat, dass nach der Voraussetzung $\frac{a}{p}$ positiv ist, und folglich

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{p}{a}.$$

Nun ist aber nach §. 15.

$$\Gamma(1+\frac{a}{p}) = \frac{a}{p}\,\Gamma(\frac{a}{p}),$$

und folglich

$$\frac{p}{a} = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})}{\Gamma(1+\frac{a}{p})},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})}{\Gamma(1+\frac{a}{p})}.$$

Ferner ist

$$\int y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}y^{\frac{b}{q}} + \text{Const.},$$

und folglich, weil $y_1 = 1-x$ ist,

$$\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}(1-x)^{\frac{b}{q}},$$

also

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}}dx,$$

oder, in der aus §. 12. bekannten Bezeichnung der Euler'schen Integrale der ersten Art,

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}\left(\frac{1+\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}}\right).$$

Digitized by Google

Weil nun nach §. 16.

$$\left(\frac{1+\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}}\right) = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q})}$$

und nach §. 15.

$$\Gamma(1+\tfrac{b}{q}) = \tfrac{b}{q}\,\Gamma(\tfrac{b}{q})$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q})}.$$

Um ferner das Integral

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy \int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz$$

zu finden, wollen wir

$$y = y_1 u,\ z = z_1 v$$

setzen, so ist

$$dy = y_1 du,\ dz = z_1 dv,$$

und statt der Gränzen

$$0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1$$

sind offenbar respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1$$

zu setzen. Also kann man das gesuchte Integral unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx \int_0^1 y_1^{\frac{b}{q}} u^{\frac{b}{q}-1}du \int_0^1 z_1^{\frac{c}{r}} v^{\frac{c}{r}-1}dv,$$

oder, weil

$$y_1 = 1-x,\ z_1 = 1-x-y = (1-x)\,(1-u)$$

ist. offenbar unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx \int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}}du \int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}dv,$$

oder auch, wie sogleich in die Augen fallen wird, unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx \cdot \int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}}du \cdot \int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}dv$$

darstellen. Es ist nun nach §. 16.

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})},$$

Digitized by Google

$$\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}} du = \frac{\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(1+\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})},$$

$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1} dv = \frac{\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\frac{c}{r})},$$

woraus sich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen multiplicirt, und beachtet, dass $\Gamma(1)=1$ ist, für den Werth unsers gesuchten Integrals die Grösse

$$\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})}$$

ergiebt.

Um zu zeigen, dass das so eben angewandte Verfahren eine allgemeine Anwendung gestattet, wollen wir noch das Integral

$$\int_0^A x^{\frac{a}{p}-1} dx \int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1} dy \int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1} dz \int_0^{t_1} t^{\frac{d}{s}-1} dt$$

bestimmen. Zu dem Ende setzen wir

$$y = y_1 u,\ z = z_1 v,\ t = t_1 w,$$

also

$$dy = y_1 du,\ dz = z_1 dv,\ dt = t_1 dw,$$

und demnach für die Gränzen

$$0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1,\ 0 \text{ und } t_1$$

offenbar respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1.$$

Dies vorausgesetzt, kann unser obiges Integral unter der Form

$$\int_0^A x^{\frac{a}{p}-1} dx \int_0^1 y_1^{\frac{b}{q}} u^{\frac{b}{q}-1} du \int_0^1 z_1^{\frac{c}{r}} v^{\frac{c}{r}-1} dv \int_0^1 t_1^{\frac{d}{s}} w^{\frac{d}{s}-1} dw,$$

oder, weil

$$y_1 = 1-x,$$
$$z_1 = 1-x-y = (1-x)\,(1-u),$$
$$t_1 = 1-x-y-z = (1-x)\,(1-u)\,(1-v)$$

ist, wenn man sich die beiden folgenden Reihen ohne Unterbrechung in eine Zeile geschrieben denkt, unter der Form

$$\int_0^A x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}} dx \int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}} du$$
$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}} dv \int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1} dw,$$

oder auch, wie sogleich erhellen wird, unter der Form



Digitized by Google

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}dx \cdot \int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}du \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}}dv \cdot \int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1}dw$$

dargestellt werden. Es ist nun nach §. 16.

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}du = \frac{\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(1+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}}dv = \frac{\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(1+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1}dw = \frac{\Gamma(\frac{d}{s})\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\frac{d}{s})},$$

woraus man, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt, und beachtet, dass $\Gamma(1)=1$ ist, für das gesuchte Integral sogleich den Ausdruck

$$\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}$$

erhält.

Auch ist nun völlig klar, wie man auf die obige Art immer weiter gehen kann, und das Statt findende allgemeine Gesetz liegt mit völliger Deutlichkeit vor Augen.

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn wir das allgemeine Glied der Reihe

$$\int_0^a x^{a-1}dx,$$

$$\int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} x^{a-1}y^{b-1}dy,$$

$$\int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} dy \int_0^{\varphi_1(x,\,y)} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

wo $\varphi(x)$, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y, z)$, ..... die aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben, nämlich

Digitized by Google

$$\varphi(x) = \beta\left\{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\varphi_1(x, y) = \gamma\left\{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p - \left(\frac{y}{\beta}\right)^q\right\}^{\frac{1}{r}},$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \delta\left\{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p - \left(\frac{y}{\beta}\right)^q - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r\right\}^{\frac{1}{s}},$$

u. s. w.

ist, durch $V$ bezeichnen, jederzeit unter den oben gemachten Voraussetzungen, die wir hier nicht wiederholen wollen,

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots .}{pqr \ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots .}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}$$

ist.

In einer der Theorie der vielfachen Integrale vorzugsweise gewidmeten späteren Abhandlung werden wir auf diesen wichtigen und interessanten Gegenstand, welcher durch Liouville und Catalan schon mehrfach erweitert worden ist, zurückkommen. Für jetzt müssen wir uns mit der obigen Darstellung, die wir nur als eine vorläufige bezeichnen, begnügen.

---

# XXVI.

## Zwei neue Sätze vom ebenen und sphärischen Viereck und Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Von dem

Herrn Professor und Director Strehlke

zu Danzig.

---

Nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie ist (Taf. III. Fig. 8.)

$$AC^2 = e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D,$$



Digitized by Google

folglich

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D.$$

Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $2ab$ und $2cd$, so erhält man

$$(a+b)^2 - (c-d)^2 = 4ab \cos \tfrac{1}{2}B^2 + 4cd \sin \tfrac{1}{2}D^2 \ldots . \quad (1)$$

und eben so

$$(c+d)^2 - (a-b)^2 = 4ab \sin \tfrac{1}{2}B^2 + 4cd \cos \tfrac{1}{2}D^2 \ldots . \quad (2)$$

Durch Multiplikation von (1) und (2), Zerlegung der Quadrate in Faktoren und Einführung der Bezeichnung $a+b+c+d=s$ wird erhalten

$$(\tfrac{s}{2}-a)\,(\tfrac{s}{2}-b)\,(\tfrac{s}{2}-c)\,(\tfrac{s}{2}-d)$$

$$= a^2b^2 \cos \tfrac{1}{2}B^2 . \sin \tfrac{1}{2}B^2 + abcd(\sin \tfrac{1}{2}B^2 . \sin \tfrac{1}{2}D^2 + \cos \tfrac{1}{2}B^2 . \cos \tfrac{1}{2}D^2)$$

$$+ c^2d^2 \sin \tfrac{1}{2}D^2 \cos \tfrac{1}{2}D^2.$$

Wenn man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $\frac{1}{2}abcd \sin B . \sin D$ hinzu addirt und subtrahirt, so erhält man

$$(\tfrac{s}{2}-a)\,(\tfrac{s}{2}-b)\,(\tfrac{s}{2}-c)\,(\tfrac{s}{2}-d)$$

$$= (\tfrac{ab}{2} . \sin B + \tfrac{cd}{2} . \sin D)^2 + abcd(\cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}D - \sin \tfrac{1}{2}B . \sin \tfrac{1}{2}D)^2$$

$$= (\tfrac{ab}{2} . \sin B + \tfrac{cd}{2} \sin D)^2 + abcd . \cos(\tfrac{B+D}{2}) . \cos(\tfrac{B+D}{2}).$$

Da nun $\frac{ab}{2} . \sin B + \frac{cd}{2} \sin D =$ der Flächensumme der beiden Dreiecke $ABC$ und $ACD$ ist oder die Fläche des Vierecks $ABCD$ ausdrückt, die mit $F$ bezeichnet werden mag, so ist

$$F^2 = (\tfrac{s}{2}-a)\,(\tfrac{s}{2}-b)\,(\tfrac{s}{2}-c)\,(\tfrac{s}{2}-d) - abcd . \cos(\tfrac{B+D}{2}) \cos(\tfrac{B+D}{2}).$$

## 2.

Verfolgt man denselben Gang bei dem sphärischen Vierecke, so ist

$$\cos e = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos B$$

$$= \cos c . \cos d + \sin c . \sin d . \cos D,$$

folglich

$$\cos a . \cos b - \cos c . \cos d = \sin c . \sin d \cos D - \sin a . \sin b . \cos B.$$

Wird auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen $\sin a \sin b$ und $\sin c . \sin d$ addirt, so erhält man

$$\cos(a-b) - \cos(c+d) = 2\sin c . \sin d . \cos \tfrac{1}{2}D^2 + 2\sin a . \sin b . \sin \tfrac{1}{2}B^2$$

und durch Zerfällung der Differenz der beiden Cosinus in Faktoren und Einführung von $a+b+c+d=s$

Digitized by Google

$$\sin\left(\frac{s}{2}-a\right).\sin\left(\frac{s}{2}-b\right)$$
$$=\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}D^2+\sin a.\sin b\sin\tfrac{1}{2}B^2\ldots\ldots(1)$$

und eben so

$$\sin\left(\frac{s}{2}-c\right).\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$
$$=\sin a.\sin b\cos\tfrac{1}{2}B^2+\sin c.\sin d\sin\tfrac{1}{2}D^2\ldots\ldots(2)$$

Durch Multiplikation von (1) und (2), durch Addition und Subtraktion von $\frac{1}{2}\sin a.\sin b.\sin c.\sin d.\sin B.\sin D$, bekömmt man

$$\sin\left(\frac{s}{2}-a\right).\sin\left(\frac{s}{2}-b\right).\sin\left(\frac{s}{2}-c\right).\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin B+\tfrac{1}{2}\sin c.\sin d.\sin D)^2$$
$$+\sin a\sin b\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)\cos\tfrac{1}{2}(B+D).$$

Ist nun $M$ der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche das sphärische Viereck $ABCD$ liegt, so ist der Cubikinhalt des Tetraeders $MABC=\frac{1}{6}\sin a.\sin b.\sin B$, der Cubikinhalt des Tetraeders $MACD=\frac{1}{6}\sin c.\sin d.\sin D$. Bezeichnet man jene Tetraeder mit $T$ und $T'$, so erhält man

$$(3T+3T')^2=\sin\left(\frac{s}{2}-a\right)\sin\left(\frac{s}{2}-b\right)\sin\left(\frac{s}{2}-c\right)\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$
$$-\sin a\sin b\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2.$$

3.

Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Da $b^2=BE^2+CE^2-2BE.CE\cos\lambda$, (wenn $\lambda$ den Kreisbogen bezeichnet, der den Winkel $BEC$ misst)

und $a^2=BE^2+AE^2+2BE.AE.\cos\lambda$,

so ist $b^2-a^2=CE^2-AE^2-2BE.e.\cos\lambda$,

wenn $e$ die Diagonale $CA$ bezeichnet,

und $c^2-d^2=CE^2-AE^2+2DE.e.\cos\lambda$.

Zieht man die obere Gleichung von der untern ab, so bleibt

$$c^2-d^2-b^2+a^2=2.e\,(BE+DE)\cos\lambda=2ef.\cos\lambda,$$

wenn $BD$ durch $f$ bezeichnet wird. Hieraus folgt

$$\cos\lambda=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2ef}.$$

Wird nun für ein ebenes Viereck die Bedingung gemacht, dass $ef=ac+bd$, so ist in diesem besondern Falle

$$\cos\lambda'=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}.$$

Aus diesem Ausdrucke für $\cos\lambda'$ lässt sich leicht ableiten

Digitized by Google

$$(1+\cos\lambda')(1-\cos\lambda')=\sin\lambda'^2=\frac{4.(\frac{s}{2}-a)(\frac{s}{2}-b)(\frac{s}{2}-c)(\frac{s}{2}-d)}{(ac+bd)^2}.$$

Da $\frac{1}{2}ac\sin\lambda'+\frac{1}{2}bd.\sin\lambda'=\frac{1}{2}ef.\sin\lambda'=F'$, wodurch die Fläche des Vierecks bezeichnet werden soll, in welchem $ef=ac+bd$, so erhält man

$$F'^2=(\tfrac{s}{2}-a)(\tfrac{s}{2}-b)(\tfrac{s}{2}-c)(\tfrac{s}{2}-d);$$

da aber auch

$$F'^2=(\tfrac{s}{2}-a)(\tfrac{s}{2}-b)(\tfrac{s}{2}-c)(\tfrac{s}{2}-d)-abcd.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2,$$

so muss sein

$$\cos\tfrac{1}{2}(B+D)=0, \text{ folglich } B+D=(2k+1).\pi.$$

Da $A+B+C+D=2\pi$, $B+D$ also $<2\pi$, so kann $k$ keinen andern Werth als Null haben, woraus folgt

$$B+D=\pi.$$

Dass ein Viereck von dieser Eigenschaft ein Kreisviereck sei, lässt sich dann leicht beweisen.

### Anmerkung des Herausgebers.

Herr Professor Strehlke schreibt mir bei Uebersendung des vorstehenden interessanten Aufsatzes: „Es müsste nicht ohne Interesse sein, den „Satz für die Fläche des sphärischen Vierecks zu suchen, der dem ersten „für das ebene Viereck eigentlich entspricht.“ Gewiss würde diese Untersuchung mehrfaches Interesse darbieten, und möchte ich mir daher wohl erlauben, die Leser des Archivs zu derselben aufzufordern. Dass ich den gefundenen Resultaten, wenn sie mir mitgetheilt werden, sehr gern eine Stelle in dem Archive einräumen werde, versteht sich von selbst. G.

---

# XXVII.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

---

I. Uebungsaufgaben für Schüler. Mitgetheilt von Herrn Professor Dr. Kunze in Weimar.

1. Wenn die Entfernungen der Eckpunkte $A$, $B$, $C$ eines

Digitized by Google

Dreiecks $ABC$ vom Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises folgeweise mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet werden, so besteht die Gleichung

$$\frac{\alpha\alpha}{bc} + \frac{\beta\beta}{ac} + \frac{\gamma\gamma}{ab} = 1,$$

worin $a$, $b$, $c$ nach der üblichen Weise die Seiten des Dreiecks bedeuten. Im ersten Theile dieses Archivs, S. 331, ist eine andere Relation zwischen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $a$, $b$, $c$ angegeben.

2. Aus den Winkeln eines in einen Kreis beschriebenen Fünfecks, nebst dem Halbmesser dieses Kreises, die Seiten des Fünfecks zu berechnen.

3. Durch die Spitze $C$ eines gegebenen Dreiecks $ABC$ ist zu dem gleichfalls gegebenen Punkt $D$ in der Basis $AB$ die Gerade $CD$ gezogen: man soll durch den einen Endpunkt $A$ der Basis eine gerade Linie $AF$, welche die $CD$ in $E$ und den Schenkel $BC$ in $F$ trifft, so ziehen, dass das Dreieck $ACE$ dem Viereck $BDEF$ gleich werde. Es giebt dafür mehrere ganz leichte Constructionen; Kästner hat in seinen geometrischen Abhandlungen I. Samml. S. 145 die Aufgabe weitläuftiger mit Hülfe der Trigonometrie behandelt.

4. In ein gegebenes Quadrat ein regelmässiges Fünfeck dergestalt zu beschreiben, dass eine Seite des Fünfecks auf eine Seite des Quadrats falle, und die zwei zunächst liegenden Eckpunkte des ersteren in die aufstehenden Seiten des letzteren.

5. Ein zu seiner Zeit berühmter Ingenieur Samuel Marolois giebt in seiner Géometrie, die 1616 in gross Querfol. erschien, für die vorige Aufgabe folgende Construction an: Auf der Seite $AB$ des Quadrats $ABCD$ verzeichne man auswärts ein regelmässiges Fünfeck $ABEFG$, und ziehe von der gegenüberliegenden Spitze $F$ nach den Ecken $C$, $D$ des Quadrats die Geraden $FC$, $FD$, welche die Seite $AB$ in $H$, $I$ schneiden; die Strecke $HI$ soll nun die Seite des einzuschreibenden Fünfecks sein. Diese Construction ist aber falsch; es ist zu zeigen warum?

6. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten mit den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

7. In einen Kreis sei ein beliebiges Vieleck $ABC \ldots LMN$ beschrieben, und auf der Peripherie des Kreises sei ein willkührlicher Punkt $P$ angenommen. Fället man nun von $P$ auf jede Seite des Vielecks oder deren Verlängerung eine Senkrechte, nämlich $Pa$ auf $AB$, $Pb$ auf $BC$ u. s. f. $Pm$ auf $MN$, $Pn$ auf $NA$, so gilt allemal die Gleichung

$$\frac{Aa}{aB} \cdot \frac{Bb}{bC} \cdot \cdots\cdots \frac{Mm}{mN} \cdot \frac{Nn}{nA} = 1.$$

Diese Gleichung besteht auch dann noch, wenn das eingeschriebene Vieleck ein Vieleck im weiteren Sinne ist, bei welchem man nämlich die Punkte $A$, $B$, $C \ldots L$, $M$, $N$ in beliebiger Folge durch gerade Linien zu einem zusammenhängenden Zuge vereiniget hat.

8. In der Peripherie des über $AB$ beschriebenen Halbkreises denjenigen Punkt $C$ zu finden, für welchen das Rechteck aus der Abscisse $AD$ und Ordinate $CD$ ein Maximum wird. Die Construction folgt aus sehr einfachen geometrischen Betrachtungen.

9. Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines in

Digitized by Google

einen Kreis beschriebenen Vierecks $ABCD$, bis sie sich schneiden, nämlich $BA$, $CD$ über $A$ und $D$ hinaus bis $E$; $BC$, $AD$ über $C$ und $D$ hinaus bis $F$, und zieht man von dem Mittelpunkt $O$ des Kreises nach den Durchschnittspunkten $E$, $F$ die Geraden $OE$, $OF$, nebst dem Halbmesser $OD$, so ist immer

$$OE \,.\, OF \,.\, \cos EOF = OD^2.$$

10. Wenn man in die vier Dreiecke, von welchen jedes durch zwei Seiten und eine Diagonale eines eingeschriebenen Vierecks gebildet wird, Kreise beschreibt, so bestimmen die Mittelpunkte dieser vier Kreise die Winkelpunkte eines Rechtecks.

11. Die vier senkrechten Linien, welche man von der Mitte jeder Seite eines eingeschriebenen Vierecks auf die ihr gegenüberliegende Seite fället, schneiden sich sämmtlich in einem einzigen Punkte.

12. Die Summe der Quadrate von allen Seiten und Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks ist gleich der vierfachen Differenz zwischen dem Quadrat des Durchmessers des umschriebenen Kreises und dem Quadrat der Entfernung seines Mittelpunktes von demjenigen Punkte, in welchem sich die vier Linien aus der Mitte jeder Seite senkrecht auf die Gegenseite begegnen (11).

13. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks $ABC$ drei Punkte an: $D$ auf $BC = a$, $E$ auf $CA = b$, $F$ auf $AB = c$, wodurch die Abschnitte $BD = a'$, $DC = a''$, $CE = b'$, $EA = b''$, $AF = c'$, $FB = c''$ entstehen, und verbindet alsdann jene Punkte zu einem Dreieck $DEF$, so findet allemal die Proportion statt

$$\Delta\, ABC : \Delta\, DEF = a \,.\, b \,.\, c : a' \,.\, b' \,.\, c' + a'' \,.\, b'' \,.\, c''.$$

14. Eine sehr einfache Construction der mittleren Proportionallinie ist folgende: Man schneide von der grösseren gegebenen Linie $AB$ die kleinere $AC$ ab, verlängere $AB$ um $AD = CB$, und beschreibe über $BD$ mit $BA = DC$ ein gleichschenkeliges Dreieck $BED$, oder bemerke bloss durch ein Paar Kreuzbögen seine Spitze $E$, so ist eine Gerade von $E$ nach $A$ (oder nach $C$) die mittlere Proportionale zwischen $AB$ und $AC$.

15. Die Kreisfläche ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen eines umschriebenen und eines dem Kreise isoperimetrischen Vielecks, beide regelmässig und von einerlei Seitenzahl angenommen.

16. Werden in und um einen Kreis regelmässige Vielecke von einfacher und doppelter Seitenzahl beschrieben, so ist 1) der Umfang des umschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks, beide von einfacher Seitenzahl; und 2) der Umfang des eingeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl das geometrische Mittel zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks, jenes von einfacher, dieses von doppelter Seitenzahl.

17. Ein Viereck mit den Seiten $a$, $b$, $c$, $d$, in welches sich ein Kreis beschreiben lässt (also $a + c = b + d$), hat den grössten Inhalt, wenn des Kreises Halbmesser

$$r = \frac{\sqrt{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d}}{a + c}.$$

Digitized by Google

18. In keinem pythagorischen Dreieck (vergl. d. erst. Th. dies. Arch. S. 96) können beide Katheten ungerade Zahlen sein; und in jedem solchen Dreieck muss eine der Katheten durch 3, ingleichen eine von den Seiten überhaupt durch 5 theilbar sein.

19. Diejenigen Werthe von $x$ zu finden, für welche sowohl $xx+x$ als $xx-x$ vollkommene Quadrate werden.

20. Vermittelst der pythagorischen Dreiecke solche Kreisvierecke zu bilden, bei welchen die vier Seiten, die drei möglichen Diagonalen und der Inhalt, nebst dem Halbmesser des Kreises, rationale Werthe bekommen; ohne dass eine Seite oder Diagonale Durchmesser des Kreises wird, oder zwei Diagonalen sich rechtwinkelig durchschneiden (in welchem Falle der Inhalt des Vierecks gleich dem halben Product der beiden Diagonalen sein würde).

21. Man soll zwei ganze Zahlen $x$, $y$ finden, von der Beschaffenheit, dass das harmonische Mittel zwischen ihnen einer gegebenen ganzen Zahl $a$ gleich sei. Z. B. für $a=105$ giebt es vierzehn verschiedene Auflösungen.

22. Zwei Zahlen $x$, $y$ zu finden, von der Beschaffenheit, dass ihre Summe gleich der Summe ihrer Kubikzahlen sei. (Diophantus IV. 11.)

$$\text{Allg. Auflös. } x=\frac{2n-1}{nn-n+1};\ y=\frac{nn-1}{nn-n+1}.$$

23. Zwei Zahlen $x$, $y$ zu finden, von der Beschaffenheit, dass ihr Unterschied gleich dem Unterschied ihrer Kubikzahlen sei. (Diophantus IV. 12.)

$$\text{Allg. Auflös. } x=\frac{2n+1}{nn+n+1};\ y=\frac{nn-1}{nn+n+1}.$$

24. Man soll zeigen, dass und wie in dem nachstehenden Quotienten oder Bruche

$$\frac{m(m+1)\,(m+2)\,\ldots\ldots\,(m+n-2)\,(m+n-1)}{1\ .\ \ 2\ \ .\ \ 3\ \ \ \ldots\ldots\,(n-1)\ \ .\ \ n}$$

worin $m$ und $n$ ganze Zahlen bezeichnen, alle Factoren des Nenners gegen die Factoren des Zählers sich heben und das endliche Resultat eine ganze Zahl werde.

25. Zwischen den Tangenten der Winkel von fünf zu fünf Graden im ersten Octanten findet folgende artige Relation statt:

$$\tan 5°.\tan 10°=\tan 15°.\tan 20°.\tan 25°.\tan 30°.\tan 35°.\tan 40°.\tan 45°.$$

Die Prüfung dieser Gleichung geschieht leicht vermittelst der Logarithmen; der Beweis ist aber aus der bekannten Formel $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\,.\,\tan\beta}$ zu führen, mit Rücksicht auf $\tan 60°=\sqrt{3}$.

Anmerkung. Die Sätze von 10. bis 16. sind bewiesen im ersten Bande meiner Geometrie (Jena, Frommann. 1842); auch über 20. findet man eben daselbst (S. 219) Auskunft.

Digitized by Google

II. Uebungsaufgaben für Schüler. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.

Es ist sattsam bekannt, auf welche Weise man aus den einfachen goniometrischen Formeln:

$$\sin(a+b) = 2\sin b \cos a + \sin(a-b)$$
$$\cos(a+b) = 2\cos b \cos a - \cos(a-b)$$

die Summen der nachfolgenden Reihen

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots + \sin(a+nb) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)b \,.\, \sin(a+\frac{1}{2}nb)}{\sin \frac{1}{2}b}$$

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots + \cos(a+nb) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)b \,.\, \cos(a+\frac{1}{2}nb)}{\sin \frac{1}{2}b}$$

erhalten kann. Sind diese Summen bekannt, so giebt die Anwendung der ersten trigonometrischen Sätze folgende Theoreme:

„Beschreibt man in einen Kreis ein reguläres Vieleck von $n$ „Seiten, und zieht von einem beliebigen Punkte innerhalb oder „ausserhalb des Kreises Strahlen nach den Eckpunkten des Viel„eckes, nennt einen der beiden kleinsten dieser Strahlen $a_1$, den „nächstfolgenden $a_2$ und so fort bis zu $a_n$, so ist, wenn $r$ den „Halbmesser des Kreises, $d$ die Entfernung des willkührlichen „Punktes vom Mittelpunkte bezeichnet,

1) für ein gerades $n$:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + \ldots + a_n^2 = \tfrac{1}{2}n(r^2 + d^2)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Strahlen von ungeradem Zeiger ist gleich der Summe der Quadrate der Strahlen von geradem Zeiger.

2) für ein ungerades $n$:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{n+1}{2}(r^2+d^2) - rd\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi - \alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi},$$

$$a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = \frac{n-1}{2}(r^2+d^2) + rd\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi - \alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi},$$

wo $\alpha$ den Bogen bezeichnet, welcher von der Geraden $d$ und dem Strahle $a_1$ auf der Peripherie abgeschnitten wird. Aus beiden Sätzen folgt unmittelbar:

3) dass für jeden beliebigen Werth von $n$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = n(r^2+d^2)$$

sein muss. Zieht man daher einen Halbmesser, welcher auf der Geraden $d$ senkrecht steht, und verbindet dessen Endpunkt mit dem willkührlichen Mittelpunkte der Strahlen $a_1 a_2$ u. s. w. durch eine Gerade $a_0$, so ist das Quadrat von $a_0$ das arithmetische

Digitized by Google

Mittel aus der Quadratsumme aller Strahlen, welche von dem festen Punkte aus nach den Spitzen eines eingeschriebenen regulären Vieleckes von beliebiger Seitenzahl gezogen werden. Zugleich erhellt auch, dass der Mittelpunkt der Strahlen nicht einmal völlig fest zu sein braucht, sondern in jedem beliebigen Punkte der Peripherie eines Kreises liegen kann, der dem Hauptkreise concentrisch mit dem Halbmesser $d$ beschrieben worden ist.

Bezeichnet man ferner den von den Strahlen $a_1$ und $a_2$ eingeschlossenen Winkel durch (1, 2) und nennt ihn den ersten Strahlwinkel, ferner den von $a_2$ und $a_3$ eingeschlossenen Winkel (2, 3) den zweiten Strahlwinkel u. s. w. so ist

4) für ein gerades $n$:

$$a_1a_2\cos(1,2)+a_3a_4\cos(3,4)+\ldots+a_{n-1}a_n\cos(n-1,n)=$$
$$=a_2a_3\cos(2,3)+a_4a_5\cos(4,5)+\ldots+a_na_1\cos(n,1)$$
$$=\tfrac{1}{2}n(r^2\cos\frac{2\pi}{n}+d^2)$$

5) für ein ungerades $n$:

$$a_1a_2\cos(1,2)+a_3a_4\cos(3,4)+\ldots+a_na_1\cos(n,1)$$
$$=\frac{n+1}{2}(r^2\cos\frac{2\pi}{n}+d^2)-rd\cos\alpha,$$
$$a_2a_3\cos(2,3)+a_4a_5\cos(4,5)+\ldots+a_{n-1}a_n\cos(n-1,n)$$
$$=\frac{n-1}{2}(r^2\cos\frac{2\pi}{n}+d^2)+rd\cos\alpha;$$

6) für jedes beliebige $n$ also:

$$a_1a_2\cos(1,2)+a_2a_3\cos(2,3)+\ldots+a_na_1\cos(n,1)$$
$$=n(r^2\cos\frac{2\pi}{n}+d^2),$$

wozu man auch leicht den analogen Ausdruck:

7) $$a_1a_2\sin(1,2)+a_2a_3\sin(2,3)+\ldots+a_na_1\sin(n,1)$$
$$=nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

bildet. Es zeigen demnach die Produkte aus den Cosinussen der gerade- und ungeradstelligen Strahlwinkel in die beiden einschliessenden Strahlen genau dieselben Relationen, welche die Quadrate der einzelnen Strahlen selbst besassen.

Liegt der Ausgangspunkt der Strahlen in der Peripherie des Kreises, so wird $d=r$ und die gefundenen Ausdrücke gehen in folgende über:

für ein gerades $n$ wird:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2=a_2^2+a_4^2+\ldots+a_n^2=nr^2;$$

für ein ungerades $n$ wird:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=r^2\left\{n+1-\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi-\alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi}\right\}.$$

Digitized by Google

$$a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = r^2 \left\{ n - 1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\pi - \alpha\right)}{\cos\frac{1}{n}\pi} \right\};$$

für jedes beliebige $n$ wird:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = 2nr^2,$$

d. h. die Fläche des einem Kreise eingeschriebenen Quadrates ist das arithmetische Mittel zwischen den Quadraten aller Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Peripherie nach den Spitzen irgend eines beliebigen eingeschriebenen regulären Vielecks gezogen werden können. Ferner ist

für ein gerades $n$:

$$a_1a_2 + a_3a_4 + \ldots + a_{n-1}a_n = a_2a_3 + a_4a_5 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1} - a_na_1 = nr^2 \cos\frac{\pi}{n};$$

für ein ungerades $n$:

$$a_1a_2 + a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1} - a_na_1 = (n+1)r^2 \cos\frac{\pi}{n} - r^2 \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

$$a_2a_3 + a_4a_5 + \ldots + a_{n-1}a_n = (n-1)r^2 \cos\frac{\pi}{n} + r^2 \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\pi}{n}};$$

für jedes beliebige $n$:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n - a_na_1 = 2nr^2 \cos\frac{\pi}{n}.$$

Für den Fall, dass der Ausgangspunkt der Strahlen in der Peripherie des Kreises liegt, findet man auch mit grosser Leichtigkeit:

für ein gerades $n$:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-1} = 2r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_n = 2r \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{\pi}{n}};$$

für ein ungerades $n$:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-1} = r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}};$$

für jedes beliebige $n$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 2r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Digitized by Google

Der mittelste dieser Ausdrücke ist als ein specieller Fall des August'schen Theorems bereits seit längerer Zeit bekannt. Lässt man den Ausgangspunkt der Strahlen noch in eine Spitze des Vieleckes rücken, d. h. macht man $\alpha = 0$ oder $= \frac{2\pi}{n}$, so bekommt man die schon seit lange bekannten Sätze über die von einem Punkte auslaufenden Diagonalen regulärer Vielecke.

Dass sich übrigens aus dem oben erwähnten speciellen Falle des August'schen Theorems das letztere selbst unmittelbar ableiten lässt, wird klar, so bald man nur mit dem gegebenen Kreise concentrisch einen anderen Kreis beschreibt. In dem so eben erschienenen vortrefflichen Lehrbuche der Geometrie von Herrn Prof. Kunze in Weimar ist das hier vorgetragene Verfahren gerade umgekehrt worden, indem der Hr. Verf. zuerst einen sehr einfachen Beweis des August'schen Theoremes aufstellt und aus dem letzteren mit Hülfe eines concentrischen Kreises den speciellen Fall ableitet, wenn der Mittelpunkt der Strahlen in der Peripherie des Hauptkreises liegt.

---

# XXVIII.

## Miscellen.

Den sogenannten unbestimmten Fall in der ebenen Trigonometrie, wenn nämlich die Stücke $a$, $b$, $A$ gegeben sind, trägt man gewöhnlich auf folgende Art vor.

Man suche zuerst den Winkel $B$ mittelst der Formel

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

hierauf den Winkel $C$ mittelst der Formel

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

und dann die Seite $c$ mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Im Allgemeinen hat $B$ zwei Werthe, die einander zu 180° ergänzen, und durch $B'$ und $B''$ bezeichnet werden sollen, so dass

$$B' + B'' = 180^\circ$$

ist. Auch wollen wir annehmen, dass

$$B' \lessgtr 90^\circ, \quad B'' \gtrless 90^\circ$$

Digitized by Google

Ist nun $a > b$, so ist auch $A > B$, und folglich $B$ jedenfalls ein spitzer Winkel, so dass also nur $B = B'$ gesetzt werden kann, und daher die Aufgabe nur eine Auflösung zulässt. Ist aber $a < b$, so ist auch $A < B$, es kann sowohl $B = B'$, als auch $B = B''$ gesetzt werden, und die Aufgabe lässt also in diesem Falle im Allgemeinen zwei Auflösungen zu. Wenn $a = b$ ist, so ist auch $A = B$, und daher $B$ unmittelbar gegeben.

Dass diese Art des Vortrags die beste und einfachste ist, unterliegt keinem Zweifel. Für den Elementarunterricht in der Trigonometrie, bei welchem es auf eine möglichst vielseitige Uebung der Schüler ankommt, verdient aber bemerkt zu werden, dass man ganz zu denselben Resultaten gelangen kann, wenn man unmittelbar aus den gegebenen Stücken $a$, $b$, $A$ nicht den Winkel $B$, sondern vielmehr die Seite $c$ sucht, wobei man sich auf folgende Art zu verhalten hat.

Bekanntlich ist in völliger Allgemeinheit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

und folglich

$$c^2 - 2bc \cos A = a^2 - b^2,$$

also wenn man diese Gleichung des zweiten Grades in Bezug auf $c$ als unbekannte Grösse auflöst,

$$(c - b \cos A)^2 = a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2 = a^2 - b^2 \sin A^2,$$

woraus

$$c - b \cos A = \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

also

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}.$$

Hieraus sieht man, dass $c$ im Allgemeinen zwei Werthe hat. Ist nun $a > b$, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2} > b \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} > b \cos A,$$

und

$$b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

ist daher jederzeit negativ, woraus sich, weil $c$ seiner Natur nach positiv ist, ergiebt, dass man in diesem Falle nur

$$c = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

setzen kann, und daher die Aufgabe nur eine Auflösung zulässt. Für $a < b$, wo zugleich $A$ jedenfalls ein spitzer Winkel und daher $b \cos A$ jederzeit positiv ist, ist dagegen offenbar

$$\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2} < b \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} < b \cos A,$$

und daher

$$b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

man mag das obere oder das untere Zeichen nehmen, eine positive Grösse. Also ist in diesem Falle

Digitized by Google

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

und die Aufgabe lässt zwei Auflösungen zu. Dass in diesem Falle $\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$ immer reell ist, erhellet leicht, weil bekanntlich immer

$$a : b = \sin A : \sin B$$

oder $a \sin B = b \sin A$, also $b \sin A$ nie grösser als $a$ ist. Für $a = b$ ist offenbar

$$c = b \cos A \pm b \cos A,$$

und daher entweder $c = 2b \cos A$ oder $c = 0$. Da aber, wenn von einem wirklichen Dreiecke die Rede ist, die Auflösung $c = 0$ ausgeschlossen werden muss, so bleibt in diesem Falle bloss die eine Auflösung $c = 2b \cos A$.

Hat man $c$, so kennt man alle drei Seiten des Dreiecks, und kann dann die Winkel $B$ und $C$ nach bekannten Formeln ohne alle Zweideutigkeit berechnen.

Man könnte bei der Behandlung des unbestimmten Falls der ebenen Trigonometrie auch von der unmittelbaren Berechnung des Winkels $C$ aus den gegebenen Stücken $a$, $b$, $A$ ausgehen, und würde auch auf diesem Wege ganz zu denselben Resultaten wie vorher gelangen. Es ist nämlich bekanntlich

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

Nun ist aber auch

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

und folglich

$$b = a \cos C + a \cot A \sin C,$$

welche Gleichung bloss noch den unbekannten Winkel $C$ enthält. Nach bekannten goniometrischen Formeln ist

$$\sin C = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}C}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}C^2}, \quad \cos C = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}C^2}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}C^2}.$$

Führt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$b(1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C^2) = a(1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C^2) + 2a \cot A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C,$$

oder

$$(a + b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C^2 - 2a \cot A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C = a - b,$$

oder

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C^2 - \frac{2a \cot A}{a + b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C = \frac{a - b}{a + b}.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf $\operatorname{tang} \frac{1}{2}C$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C - \frac{a \cot A}{a + b})^2 = \frac{a^2 - b^2 + a^2 \cot A^2}{(a + b)^2}$$

oder

$$\left\{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C - \frac{a \cos A}{(a + b) \sin A}\right\}^2 = \frac{a^2 - b^2 \sin A^2}{(a + b)^2 \sin A^2},$$

und folglich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a + b) \sin A}.$$

Digitized by Google

Ist nun $a > b$, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 \cos A^2 + (a^2 - b^2) \sin A^2} > a \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} > a \cos A,$$

und folglich

$$a \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

eine negative Grösse. Daher kann man, weil tang $\frac{1}{2}C$ jederzeit positiv ist, da $\frac{1}{2}C$ nie grösser als 90° ist, bloss

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a+b) \sin A}$$

setzen, und es giebt in diesem Falle nur eine Auflösung. Wenn aber $a < b$ ist, wo $a \cos A$ immer positiv ist, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 \cos A^2 + (a^2 - b^2) \sin A^2} < a \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} < a \cos A,$$

und die Grösse

$$a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

ist daher, man mag das obere oder das untere Zeichen nehmen, stets positiv. Also kann man

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a+b) \sin A}$$

setzen, und es giebt in diesem Falle jederzeit zwei Auflösungen, die auch beide reell sind, weil bekanntlich $b \sin A = a \sin B$, folglich $b \sin A$ nie grösser als $a$ ist. Für $a = b$ ist nach dem Obigen

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm a \cos A}{(a+b) \sin A},$$

und also entweder

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{2a \cos A}{(a+b) \sin A} = \frac{2a \cot A}{a+b}$$

oder tang $\frac{1}{2}C = 0$. Im zweiten Falle wäre $\frac{1}{2}C = 0$, also auch $C = 0$, welches, so lange von einem wirklichen Dreiecke die Rede ist, nicht Statt finden kann. Daher hat man für $a = b$ bloss die eine Auflösung

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{2a \cot A}{a+b}.$$

Alle diese Resultate stimmen mit den schon oben gefundenen vollkommen überein.

Wenn allerdings auch der erste und gewöhnliche Vortrag des unbestimmten Falls der ebenen Trigonometrie bei Weitem der einfachste ist, so halten wir doch bei'm Unterrichte Betrachtungen wie die obigen für sehr instructiv für die Schüler, und glauben, dass dieselben dem Gedeihen des mathematischen Unterrichts überhaupt förderlich sind, welches der einzige Grund ist, der uns zu der Mittheilung derselben an diesem Orte bewogen hat. G.

Digitized by Google

Auch schon für den Elementarunterricht in der Algebra verdient der folgende Vortrag der Lehre von der Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades empfohlen zu werden.

Es seien die zwei Gleichungen

$$Ax + By = C$$
$$ax + by = c$$

gegeben. Um aus diesen beiden Gleichungen $x$ zu bestimmen, kommt es darauf an, dieselben mit zwei Factoren $M$ und $N$ zu multipliciren, welche so beschaffen sind, dass, wenn man nach geschehener Multiplication die beiden Gleichungen zu einander addirt, der Coefficient von $y$ verschwindet. Diese Bedingung erfordert, dass

$$BM + bN = 0$$

sei, und man wird also

$$M = b,\ N = -B$$

setzen können. Thut man dies und verfährt nach der vorher gegebenen Andeutung, so erhält man

$$x = \frac{Cb - cB}{Ab - aB},$$

und hieraus durch gehörige Vertauschung der Buchstaben

$$y = \frac{Ac - Ca}{Ab - aB}.$$

Hat man ferner die drei Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$
$$ax + by + cz = d$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

so kommt es, um $x$ zu bestimmen, darauf an, diese Gleichungen mit drei Factoren $M$, $N$, $P$ zu multipliciren, welche so beschaffen sind, dass, wenn man nach geschehener Multiplication die drei Gleichungen zu einander addirt, die Coefficienten von $y$ und $z$ verschwinden. Diese Bedingung erfordert, dass

$$BM + bN + \beta P = 0$$
$$CM + cN + \gamma P = 0$$

sei. Bringt man diese Gleichungen auf die Form



Digitized by Google

$$B\frac{M}{P}+b\frac{N}{P}=-\beta,$$

$$C\frac{M}{P}+c\frac{N}{P}=-\gamma;$$

so hat man nach dem Vorhergehenden

$$\frac{M}{P}=\frac{b\gamma-c\beta}{Bc-Cb},\quad \frac{N}{P}=\frac{C\beta-B\gamma}{Bc-Cb},$$

und kann also

$$M=b\gamma-c\beta,\ N=C\beta-B\gamma,\ P=Bc-Cb$$

setzen. Dies vorausgesetzt ergiebt sich, wenn man weiter nach den vorher gegebenen Andeutungen verfährt, auf der Stelle

$$x=\frac{D(b\gamma-c\beta)+d(C\beta-B\gamma)+\delta(Bc-Cb)}{A(b\gamma-c\beta)+a(C\beta-B\gamma)+\alpha(Bc-Cb)},$$

und hieraus mittelst gehöriger Vertauschung der Buchstaben

$$y=\frac{D(c\alpha-a\gamma)+d(A\gamma-C\alpha)+\delta(Ca-Ac)}{A(b\gamma-c\beta)+a(C\beta-B\gamma)+\alpha(Bc-Cb)}$$

und

$$z=\frac{D(a\beta-b\alpha)+d(Ba-A\beta)+\delta(Ab-Ba)}{A(b\gamma-c\beta)+a(C\beta-B\gamma)+\alpha(Bc-Cb)}.$$

Wenn die vier Gleichungen

$$Ax+By+Cz+Du=E$$

$$ax+by+cz+du=e$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u=\varepsilon$$

$$\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}u=\mathfrak{E}$$

gegeben sind, so muss man, um $x$ zu bestimmen, vier Factoren $M$, $N$, $P$, $Q$ suchen, welche so beschaffen sind, dass, wenn man mit denselben die drei Gleichungen multiplicirt und dann zu einander addirt, die Coefficienten von $y$, $z$, $u$ verschwinden. Diese Bedingung erfordert, dass

$$BM+bN+\beta P+\mathfrak{B}Q=0$$

$$CM+cN+\gamma P+\mathfrak{C}Q=0$$

$$DM+dN+\delta P+\mathfrak{D}Q=0$$

sei. Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$B\frac{M}{Q}+b\frac{N}{Q}+\beta\frac{P}{Q}=-\mathfrak{B}$$

$$C\frac{M}{Q}+c\frac{N}{Q}+\gamma\frac{P}{Q}=-\mathfrak{C}$$

$$D\frac{M}{Q}+d\frac{N}{Q}+\delta\frac{P}{Q}=-\mathfrak{D}$$

so erhält man nach dem Vorhergehenden

$$\frac{M}{Q}=\frac{\mathfrak{B}(d\gamma-c\delta)+\mathfrak{C}(b\delta-d\beta)+\mathfrak{D}(c\beta-b\gamma)}{B(c\delta-d\gamma)+C(d\beta-b\delta)+D(b\gamma-c\beta)},$$

Digitized by Google

$$\frac{N}{Q} = \frac{\mathfrak{B}(C\delta - D\gamma) + \mathfrak{C}(D\beta - B\delta) + \mathfrak{D}(B\gamma - C\beta)}{B(c\delta - d\gamma) + C(d\beta - b\delta) + D(b\gamma - c\beta)},$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mathfrak{B}(cD - dC) + \mathfrak{C}(dB - bD) + \mathfrak{D}(bC - cB)}{B(c\delta - d\gamma) + C(d\beta - b\delta) + D(b\gamma - c\beta)};$$

und kann also

$$M = \mathfrak{B}(d\gamma - c\delta) + \mathfrak{C}(b\delta - d\beta) + \mathfrak{D}(c\beta - b\gamma),$$
$$N = \mathfrak{B}(C\delta - D\gamma) + \mathfrak{C}(D\beta - B\delta) + \mathfrak{D}(B\gamma - C\beta),$$
$$P = \mathfrak{B}(cD - dC) + \mathfrak{C}(dB - bD) + \mathfrak{D}(bC - cB),$$
$$Q = B(c\delta - d\gamma) + C(d\beta - b\delta) + D(b\gamma - c\beta)$$

setzen. Dann ist aber, wie sogleich erhellet,

$$x = \frac{EM + eN + \varepsilon P + \mathfrak{E}Q}{AM + aN + \alpha P + \mathfrak{A}Q}.$$

Durch gehörige Vertauschung der Buchstaben erhält man hieraus $y$, $z$, $u$, und es erhellt nun auch mit völliger Deutlichkeit, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

---

## Ueber die Berechnung der Länge und Breite eines Gestirnes aus seiner geraden Aufsteigung und Abweichung, und umgekehrt. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.

Die in der Ueberschrift erwähnte Aufgabe findet sich in allen Lehrbüchern der Astronomie behandelt, so dass man sie für völlig erschöpft halten sollte. Gleichwohl scheint die nachfolgende Bemerkung den Verfassern jener Schriften sämmtlich entgangen zu sein; wenigstens habe ich sie in den mir zugänglichen astronomischen Werken nicht gefunden.

Sind nämlich die gerade Aufsteigung $\alpha$ und die Abweichung $\delta$ eines Gestirnes gegeben, so findet man überall angegeben, wie man aus ihnen die Länge $\lambda$ und Breite $\beta$ des Sternes mittelst eines Hülfswinkels berechnen kann, und eben so wird angegeben, wie man aus $\lambda$ und $\beta$ ebenfalls durch einen Hülfswinkel $\alpha$ und $\delta$ zu berechnen habe. Niemand aber scheint bemerkt zu haben, dass sich beide Aufgaben mittelst eines und desselben Hülfswinkels lösen lassen. Nennt man nämlich die Schiefe der Ecliptik $\varepsilon$ und den Hülfswinkel $\varphi$, so ist

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi},$$

$$\frac{\tang \lambda}{\tang \alpha} = \frac{\sin(\varphi + \varepsilon)}{\sin \varphi};$$



Digitized by Google

und der Winkel $\varphi$ wird durch eine der beiden Gleichungen:

$$\text{tang } \varphi = \cot \delta \sin \alpha$$

$$\text{tang } (\varphi + \varepsilon) = \cot \beta \sin \lambda$$

bestimmt. Es ist $\varphi$ positiv oder negativ, je nachdem $\alpha$ kleiner oder grösser als 180° ist, und eben so ist $(\varphi + \varepsilon)$ positiv oder negativ, je nachdem $\lambda$ kleiner oder grösser als 180° ist; sonst liegen immer $\varphi$ und $\delta$, ferner $\varphi + \varepsilon$ und $\beta$ und endlich $\lambda$ und $\alpha$ in demselben Quadranten.

Bei der Reduktion von $\alpha$ und $\delta$ von einer bestimmten Epoche auf eine nicht sehr fern liegende, z. B. bei der Reduktion vom Anfang eines Jahres auf irgend einen anderen Tag desselben kommen beide Aufgaben unmittelbar nach einander zur Lösung. Da sich hier $\varphi$ meistens nur um einige Secunden ändert, so wird die Rechnung sehr leicht auszuführen sein, wenn man sich die Aenderungen, welche $\log \cos (\varphi+\varepsilon) - \log \cos \varphi$ und $\log \sin (\varphi+\varepsilon) - \log \sin \varphi$ für 1″ Aenderung des Werthes von $\varphi$ und $\varepsilon$ erleiden, am Rande bemerkt. Hat man dann aus $\alpha$ und $\delta$ zuerst $\lambda$ und $\beta$ berechnet, und bezeichnet nun die durch Präcession, Nutation etc. verbesserten Werthe derselben mit $\lambda'$, $\beta'$, so wird man die Complemente von

$$\log \frac{\cos (\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi} \text{ und } \log \frac{\sin (\varphi + \varepsilon)}{\sin \varphi}$$

mittelst der angemerkten Aenderung nur durch eine kleine Correktion zu verbessern brauchen, um mittelst ihrer die neuen Werthe von $\alpha$ und $\delta$ zu erhalten.

Digitized by Google

# XXIX.

## Ueber die Behandlungsarten geometrischer Elementar-Aufgaben.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

(Die Citate beziehen sich auf Euclid's Elemente. Ein C davor, bedeutet: Converse des citirten Satzes.)

In verschiedenen Zeitschriften werden über den mathematischen Unterricht häufig Bedenken erhoben. Einige eifern über die darauf verwendete Zeit, Andere tadeln die bei demselben angewendete Methode. Die meisten vermissen das Uebersichtliche in derselben und möchten nur das Allgemeine, damit durch gesteigerte geistige Energie das Besondere sich gleichsam von selbst ergebe. Vielen ist dagegen die Unterrichtsweise noch nicht elementar genug.

Solche Bedenken kommen zwar von sehr verschiedenen Seiten, entspringen unter sehr verschiedenen Graden mathematischer Bildung, haben zum Theil ihren Ursprung in dem Geiste der Neuerungssüchtigen, sind wohl aber weniger von gereifter Erfahrung eingegeben; dennoch möchte man sie als ein erfreuliches Zeichen des Interesse an der Sache betrachten, welches freilich, meist durch Missverständnisse verleitet, sein eigentliches Ziel verfehlt.

Ich sollte nun meinen, wer sich streng an Euklid's unverbesserliche Methode und an dasjenige hält was eine lautere Quelle in ihm hat, könne nicht wohl einen Fehlgriff thun. Diese Methode wird aber, wie mir scheint, seit längerer Zeit nicht eifrig genug verfolgt. Selbst in manchen Werken, deren Verfasser derselben im Allgemeinen huldigen, wird der Gegenstand einer geometrischen Betrachtung oft so verunstaltet, dass man sein Wesen nur mühsam herausfindet. Namentlich erscheint die geometrische Analyse bisweilen in solch einer seltsamen Gestalt, dass man glauben möchte, der Darstellende habe gar keinen Begriff davon. Denkt man sich nun, dass Bücher mit solchen Entwicklungen in die Hände von Schülern kommen, deren Vorstellungen berichtigt, deren Auffassun-



Digitized by Google

gen zur Reife gebracht werden sollen, so wäre es zu verwundern wenn sie Lust am Gegenstande behielten, sofern diese bereits rege geworden ist.

So haben wir eine deutsche Bearbeitung von Leslie's geometrischer Analysis, die 1822 in Berlin erschien. Das Original ist mir nicht zur Hand, ich kann deshalb auch über dessen Werth nicht urtheilen; sicherlich hat aber der Uebersetzer zur Verbesserung des Buches in seinen Haupttheilen nicht beigetragen: denn die Analysen, die darin vorkommen, sind gar nicht als solche zu erkennen. Manche Aufgabe, die sich dort findet, würde aber für den Schüler sehr bildend sein, wenn jener wesentliche Theil nicht so gänzlich vernachlässigt wäre.

Um diese Behauptung zu belegen wähle ich eine Aufgabe die sich dort (Seite 21. Satz XIII.) findet, und löse dieselbe nach Euklid's strenger Weise.

*Aufgabe.* Auf einer der Grösse nach gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass das Quadrat über seiner Entfernung von dem einen Ende so gross werde als das Rechteck zwischen der Entfernung vom andern Ende und einer zweiten, der Grösse nach gegebenen Geraden.

Sei (Taf. III. Fig. 9. bei'm zweiten Hefte) $AB$ die erste Gerade, $AC$ die zweite; man sucht einen Punkt $D$, so dass $AD^2 = DB.AC$ werde.

I. Fall. Der gesuchte Punkt sei zwischen $A$ und $B$.

Analyse. Sei $AB$ auch der Lage nach gegeben. Verlängere dieselbe nach $C$... (Post. II.)... Mache $AC$ der zweiten Geraden gleich ... (I. 3.).. Der Punkt $D$ erfülle die geforderte Bedingung, so dass ..... $AD^2 = DB.AC$..... werde.

Dann ist (C. II. 3.) $DA.AC + AD^2 = CD.DA$, folglich

(Ax. II.)..... $CD.DA = AD.AC + DB.AC$.

Halbire $AC$ in $E$.. (I. 10)... so ist

.. (II. 6)..... $CD.DA + AE^2 = ED^2$, also

(Ax. I. II.).... $ED^2 = AE^2 + (AD + DB)AC$... (C. II. 1).

Mache $AF$ senkrecht auf $BC$.. (I. 11).. und $CA : AF = FA : AB$.. (VI. 13.), so ist $AF^2 = AB.AC$... (VI. 17)... mithin

(Ax. 1.)... $ED^2 = AE^2 + AF^2$. Ziehe $FE$... (Post. I.) so ist ... $FE^2 = AE^2 + AF^2$... (I. 47.)

folglich $ED^2 = FE^2$... (Ax.1.) also $DE = EF$... (I.46. Zus.).

Construction. Suche die mittlere Proportionale zu $CA$ und $AB$ (VI. 13); halbire $AC$ (I. 10) und beschreibe aus $E$ als Centrum mit der Entfernung $EF$ einen Halbkreis, so ist der Durchschnitt desselben mit $AB$ der gesuchte Punkt $D$.

Determination. Ein Durchschnitt fällt zwischen $A$ und $B$. Sei $BC = 2MC$ und $AB = 2AN$; da $AC = 2AE$ und

$BC = BA + AC$, so ist $2MC = 2AN + 2AE$

folglich $MC = AN + AE$ (Ax. VII.)

oder $MC = AN + EC$

mithin $CM > CE$

Digitized by Google

deshalb ist $E$ ausserhalb des Mittelpunktes vom Kreise über $BC$; daher ist $EF = ED < EB$ ... (III. 7.)

und $EF = ED > EA$ ... (I. 32. und I. 19.)

was obige Behauptung war.

Beweis der Behauptung, dass $AD^2 = DB \,.\, AC$ sei.

Es ist $DE = EF$ ... $p \,.\, c$ .... also $DE^2 = EF^2$ ... (I. 46. Zus.)

folglich (II. 6.) $CD \,.\, DA + AE^2 = AF^2$ .... (I. 47. und nach Ax. III.)

$$CD \,.\, DA = BA \,.\, AC \ldots . \text{(p. c. und VI. 17.)}$$

also (II. 3.) $DA \,.\, AC + AD^2 = (BD + DA)AC$ ... (C. II. 1.)

$$AD^2 = BD \,.\, AC \ldots . \text{(Ax. III.)}$$

was behauptet wurde.

II. Fall. Der gesuchte Punkt sei auf der Verlängerung von $BA$. Die Auflösung ist dieselbe, indem der zweite Durchschnitt des Kreises mit $EF$ als Radius die Verlängerung von $AC$ trifft. Es ist jedoch zu bemerken: wird dieser zweite Punkt mit $D'$ bezeichnet, so ist $DE = ED'$ und $AE = EC$

also auch $DA = D'C$, mithin $AD = DE - EA$

und $AD' = DE + EA$

Ein gleiches Resultat, wenn auch eine andere Construction, giebt die .... Algebraische Behandlung.

Sei $AB = a$ und $AC = 2b$, so ist, wenn $AD = x$ gesetzt wird, $DB = a - x$;

also $x^2 = 2b(a-x) = 2ab - 2bx$ .... $x^2 + 2bx + b^2 = b^2 + 2ab + a^2 - a^2$

$x + b = \sqrt{(b+a)^2 - a^2}$. Die zwei Wurzeln sind also

$$x' = -b + \sqrt{(b+a)^2 - a^2},$$

und $$-x'' = \quad b + \sqrt{(b+a)^2 - a^2}.$$

Das Minus vor $x''$ bezieht sich nur auf die Lage dieser Linie, die der von $x'$ entgegengesetzt ist.

Es wird $b + a = BE$. Macht man dieses zum Durchmesser eines Kreises und trägt, von $B$ aus, $a = BA$ als Sehne ein, so wird die Ergänzungssehne $x + b = ED$.

### Bemerkungen zu vorstehender Aufgabe.

Es gehört diese Aufgabe zu denen vom bestimmten Schnitte. Ich habe nicht nachgesehen, ob Diesterweg, des wackern Pfleiderer trefflicher Schüler, der leider der Wissenschaft zu früh geraubt wurde, sie in seinen bekannten Werken behandelt hat. Ich habe sie hier nur benutzt um zu zeigen, wie einfach und natürlich auf Euklidischem Wege Eins aus dem Andern folgt, so dass eine solche Auflösung eine Unterhaltung wird, die die Erfindung stets rege erhält, was nur von denen nicht zugegeben wird, die den Euklid mit Schülern nicht streng durchgearbeitet haben.

Die algebraische Lösung ist mit wenig Federzügen abgethan und die ganze Aufgabe liegt damit abgerundet vor unsern Augen. Ueber den relativen Werth beider Methoden lässt sich nicht strei-



Digitized by Google

ten, weil man sie aus verschiedenen Gesichtspunkten, für deren Wichtigkeit wir kein rechtes Mauss haben, betrachten kann.

Ein Mathematiker kann über den Werth algebraischer Methoden nicht zweifelhaft sein; wer aber eine lange Reihe von Jahren unterrichtet hat, weiss zuverlässig, dass in der rein geometrischen Methode, wenn sie mit äusserster Consequenz durchgeführt wird, eine bildende Kraft liegt, die durch Nichts ersetzt werden kann.

Wer die Geschichte der Entwickelung des Geistes nicht vielfach durchlebt hat, wird freilich nicht recht begreifen, wie der geistreiche J. J. Rousseau das Handhaben der Symbole, wie Descartes es gelehrt, für eine Art von unheimlicher Hexerei gehalten, oder wie, von der andern Seite, der grosse Newton es bedauert, dass er den Euklid zu früh verlassen habe. Die Symbolik der Algebra ist die poetische Seite der Mathematik. So wie Rythmus und Reim einen einfachen Gedanken zerspalten und alle Splitter desselben mit der Zeugungskraft der Phantasie wieder zu neuen, harmonisch sich ordnenden Gedanken beleben, so beinahe verfährt auch die Algebra, indem sie im Labyrinthe der Symbolik die Symmetrie zur Führerin wählt.

Wie nun jeder Mensch die Prosa begreift, so lernt auch jeder die Geometrie, die von äusserer Anschauung ausgeht. Die Algebra dagegen, die eine innere Anschauung gleich zu Anfang in Anspruch nimmt, kann nur in dem erweckt werden, in welchem sie schläft, denn das Kunstelement ist ursprünglich mit ihr verwebt.

Daher ist es sehr begreiflich, wenn der würdige E. G. Fischer darüber klagt, dass es ihm nie gelungen wäre, den binomischen Lehrsatz seinen Schülern deutlich zu machen. Jeder aufrichtige Lehrer wird ihm das nachsprechen müssen.

Woher kommt das? daher dass der Schüler zur Auffassung des Beweises nicht hinlänglich vorbereitet sein kann.

Er muss den Euklid zu früh verlassen, weil ein zu mannichfaltiges Allerlei in der Maturitätsprüfung von ihm verlangt wird. Junge Lehrer zumal können vor lauter Ungeduld nicht früh genug zur Algebra kommen, und verfallen dann in den Fehler, in welchen der sonst so verdiente Littrow sich hineingelebt hatte, indem er behauptete, dass die Analysis ein Universalinstrument sei, womit sich alle Operationen vornehmen liessen, mit dessen Handhabung man sich also sehr früh vertraut machen müsse. Es mag sehr schwer zu entscheiden sein, wann derjenige, der sich der Mathematik vorzugsweise widmen will, vom Euklid sich abwenden soll; thut er es aber zu früh, so wird er dadurch noch kein Newton, obgleich er ohne Euklid Bedeutendes leisten kann, wie die Franzosen beweisen, aber er wird Mühe haben sich allgemein verständlich zu machen, und manches in trügerischer Intuition für wahr halten, wovon oft nur ein Theil wahr ist, und nicht selten besondere Fälle für allgemeine nehmen. Wäre diese Behauptung nicht gegründet, so müssten wir für die Elemente der Algebra ein ähnliches Werk haben, wie für die Elemente der Geometrie. Davon sind wir aber, aller Einbildungen manches Schriftstellers ungeachtet, sehr weit entfernt.

Digitized by Google

# XXX.

## Ueber die Theorie der Elimination.

Von

dem Herausgeber.

### Zweite Abhandlung *).

### §. 1.

In den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1748 hat Euler eine Eliminationsmethode gelehrt, welche sich vor allen übrigen bekannten Eliminationsmethoden durch Kürze und Einfachheit ganz besonders ausgezeichnet. Diese Eliminationsmethode, bei welcher von der Theorie der symmetrischen Functionen ein sehr wichtiger und fruchtbarer Gebrauch gemacht wird, wollen wir vorzüglich nach der schönen und gründlichen Darstellung, welche neuerlichst Cauchy in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 397 von derselben gegeben hat, in der vorliegenden Abhandlung entwickeln.

### §. 2.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$
$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f(x) = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q$$
$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q$$

setzen,

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0;$$

denn dass auf diese Form, wo nämlich die Coefficienten der höchsten Glieder die Einheit sind, die beiden gegebenen Gleichungen jederzeit gebracht werden können, fällt auf der Stelle in die Augen.

Die $m$ Wurzeln der ersten Gleichung $f(x) = 0$ seien

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots,$$

und eben so seien die $n$ Wurzeln der zweiten Gleichung $F(x) = 0$

*) Die erste Abhandlung s. m. Theil II. Heft I. S. 76.

Digitized by Google

$$\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

so dass nämlich

$$f(x) = (x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta)\ldots,$$
$$F(x) = (x-\varkappa)\,(x-\lambda)\,(x-\mu)\,(x-\nu)\ldots.$$

ist.

Sollen nun die beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0$$

zusammen existiren können, d. h. sollen sich dieselben durch ein und denselben Werth von $x$ erfüllen lassen; so muss nothwendig wenigstens eine der Gleichungen

$$\alpha = \varkappa,\ \alpha = \lambda,\ \alpha = \mu,\ \alpha = \nu, \ldots,$$
$$\beta = \varkappa,\ \beta = \lambda,\ \beta = \mu,\ \beta = \nu, \ldots,$$
$$\gamma = \varkappa,\ \gamma = \lambda,\ \gamma = \mu,\ \gamma = \nu, \ldots,$$
$$\delta = \varkappa,\ \delta = \lambda,\ \delta = \mu,\ \delta = \nu, \ldots,$$

u. s. w.

oder, was dasselbe ist, wenigstens eine der Gleichungen

$$\alpha - \varkappa = 0,\ \alpha - \lambda = 0,\ \alpha - \mu = 0,\ \alpha - \nu = 0, \ldots;$$
$$\beta - \varkappa = 0,\ \beta - \lambda = 0,\ \beta - \mu = 0,\ \beta - \nu = 0, \ldots;$$
$$\gamma - \varkappa = 0,\ \gamma - \lambda = 0,\ \gamma - \mu = 0,\ \gamma - \nu = 0, \ldots;$$
$$\delta - \varkappa = 0,\ \delta - \lambda = 0,\ \delta - \mu = 0,\ \delta - \nu = 0, \ldots;$$

u. s. w.

erfüllt sein, und die Bedingungsgleichung, dass die beiden Gleichungen

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0$$

zusammen existiren können, ist daher, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & (\alpha-\varkappa)\,(\alpha-\lambda)\,(\alpha-\mu)\,(\alpha-\nu)\ldots. \\ & \times(\beta-\varkappa)\,(\beta-\lambda)\,(\beta-\mu)\,(\beta-\nu)\ldots. \\ & \times(\gamma-\varkappa)\,(\gamma-\lambda)\,(\gamma-\mu)\,(\gamma-\nu)\ldots. \\ & \times(\delta-\varkappa)\,(\delta-\lambda)\,(\delta-\mu)\,(\delta-\nu)\ldots. \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

setzen, offenbar die Gleichung

$$\Sigma = 0.$$

Die Gleichung, welche man durch Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0$$

erhält, ist aber augenscheinlich weiter nichts als die Bedingungsgleichung, dass die beiden vorstehenden Gleichungen zusammen existiren oder durch denselben Werth von $x$ erfüllt werden können, woraus sich also unmittelbar ergiebt, dass die Gleichung

$$\Sigma = 0$$

Digitized by Google

mit der durch Elimination von $x$ aus den beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

resultirenden Gleichung zusammenfallen oder identisch sein muss.

Dies ist das allgemeine Princip, auf welchem die in §. 1. erwähnte schöne und merkwürdige Euler'sche Eliminationsmethode beruhet, indem es bei dieser Methode einzig und allein auf die Bildung der Gleichung

$$\Sigma=0$$

aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

ankommt, wofür also jetzt möglichst einfache und leicht anwendbare Regeln gegeben werden müssen.

## §. 3.

Die Anzahl der Grössen

$$\begin{aligned}&\alpha-x,\ \alpha-\lambda,\ \alpha-\mu,\ \alpha-\nu,\ \ldots.;\\ &\beta-x,\ \beta-\lambda,\ \beta-\mu,\ \beta-\nu,\ \ldots.;\\ &\gamma-x,\ \gamma-\lambda,\ \gamma-\mu,\ \gamma-\nu,\ \ldots.;\\ &\delta-x,\ \delta-\lambda,\ \delta-\mu,\ \delta-\nu,\ \ldots.;\end{aligned}$$

u. s. w.

ist offenbar $mn$, und nach einem bekannten Satze von den Gleichungen ist also die Grösse

$$(-1)^{mn}.\Sigma$$

das letzte Glied der Gleichung des $(mn)$ten Grades, deren Wurzeln die obigen Differenzen sind, so dass es also, um die Grösse $\Sigma$ aus den Coefficienten der beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

zu bilden, bloss auf die Bildung des letzten Gliedes der in Rede stehenden Gleichung des $(mn)$ten Grades aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

ankommt.

Setzen wir nun der Kürze wegen, indem $i$ eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned}s_i&=\alpha^i+\beta^i+\gamma^i+\delta^i+\ldots.,\\ S_i&=x^i+\lambda^i+\mu^i+\nu^i+\ldots.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma_i=\ &(\alpha-x)^i+(\alpha-\lambda)^i+(\alpha-\mu)^i+(\alpha-\nu)^i+\ldots.\\ &+(\beta-x)^i+(\beta-\lambda)^i+(\beta-\mu)^i+(\beta-\nu)^i+\ldots.\\ &+(\gamma-x)^i+(\gamma-\lambda)^i+(\gamma-\mu)^i+(\gamma-\nu)^i+\ldots.\\ &+(\delta-x)^i+(\delta-\lambda)^i+(\delta-\mu)^i+(\delta-\nu)^i+\ldots.\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

Digitized by Google

so ist, wie man leicht mittelst Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten findet,

$$\Sigma_i = (\alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots) \cdot n$$
$$- \frac{i}{1} (\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} + \gamma^{i-1} + \ldots)(x + \lambda + \mu + \ldots)$$
$$+ \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} (\alpha^{i-2} + \beta^{i-2} + \gamma^{i-2} + \ldots)(x^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \ldots)$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{i-1} \cdot \frac{i}{1} (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)(x^{i-1} + \lambda^{i-1} + \mu^{i-1} + \ldots)$$
$$+ (-1)^i \cdot m(k^i + \lambda^i + \mu^i + \ldots),$$

und folglich, weil

$$s_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + \delta^0 + \ldots = m,$$
$$S_0 = x^0 + \lambda^0 + \mu^0 + \nu^0 + \ldots = n$$

ist,

$$\Sigma_i = s_i S_0 - \frac{i}{1} s_{i-1} S_1 + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} s_{i-2} S_2 - \ldots .$$
$$\ldots . + (-1)^{i-1} \cdot \frac{i}{1} s_1 S_{i-1} + (-1)^i \cdot s_0 S_i .$$

Die Grössen

$$s_0 = m \text{ und } S_0 = n$$

sind bekannt.

Zur Bildung der Grössen

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots .$$

aus den Coefficienten der Gleichung

$$f(x) = 0$$

hat man nach den Formeln des aus der Theorie der Gleichungen bekannten Newton'schen Satzes die folgenden Gleichungen:

$$0 = s_1 + a,$$
$$0 = s_2 + as_1 + 2b,$$
$$0 = s_3 + as_2 + bs_1 + 3c,$$
$$0 = s_4 + as_3 + bs_2 + cs_1 + 4d,$$

u. s. w.

$$0 = s_m + as_{m-1} + bs_{m-2} + cs_{m-3} + \ldots + ps_1 + mq,$$
$$0 = s_{m+1} + as_m + bs_{m-1} + cs_{m-2} + \ldots + ps_2 + qs_1,$$
$$0 = s_{m+2} + as_{m+1} + bs_m + cs_{m-1} + \ldots + ps_3 + qs_2,$$
$$0 = s_{m+3} + as_{m+2} + bs_{m+1} + cs_m + \ldots + ps_4 + qs_3,$$

u. s. w.

oder

Digitized by Google

$$s_1 = -a,$$
$$s_2 = -as_1 - 2b,$$
$$s_3 = -as_2 - bs_1 - 3c,$$
$$s_4 = -as_3 - bs_2 - cs_1 - 4d,$$

u. s. w.

$$s_n = -as_{n-1} - bs_{n-2} - cs_{n-3} - \ldots - ps_1 - mq,$$
$$s_{n+1} = -as_n - bs_{n-1} - cs_{n-2} - \ldots - ps_2 - qs_1,$$
$$s_{n+2} = -as_{n+1} - bs_n - cs_{n-1} - \ldots - ps_3 - qs_2,$$
$$s_{n+3} = -as_{n+2} - bs_{n+1} - cs_n - \ldots - ps_4 - qs_3,$$

u. s. w.

und eben so hat man zur Bildung der Grössen

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5, \ldots.$$

aus den Coefficienten der Gleichung

$$F(x) = 0$$

die folgenden Gleichungen:

$$0 = S_1 + A,$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B,$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C,$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D,$$

u. s. w.

$$0 = S_n + AS_{n-1} + BS_{n-2} + CS_{n-3} + \ldots + PS_1 + nQ,$$
$$0 = S_{n+1} + AS_n + BS_{n-1} + CS_{n-2} + \ldots + PS_2 + QS_1,$$
$$0 = S_{n+2} + AS_{n+1} + BS_n + CS_{n-1} + \ldots + PS_3 + QS_2,$$
$$0 = S_{n+3} + AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n + \ldots + PS_4 + QS_3,$$

u. s. w.

oder

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -AS_1 - 2B,$$
$$S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C,$$
$$S_4 = -AS_3 - BS_2 - CS_1 - 4D,$$

u. s. w.

$$S_n = -AS_{n-1} - BS_{n-2} - CS_{n-3} - \ldots - PS_1 - nQ,$$
$$S_{n+1} = -AS_n - BS_{n-1} - CS_{n-2} - \ldots - PS_2 - QS_1,$$
$$S_{n+2} = -AS_{n+1} - BS_n - CS_{n-1} - \ldots - PS_3 - QS_2,$$
$$S_{n+3} = -AS_{n+2} - BS_{n+1} - CS_n - \ldots - PS_4 - QS_3,$$

u. s. w.

woraus zugleich erhellet, dass

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4, \ldots.$$

Digitized by Google

lauter ganze rationale algebraische Functionen von

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots p,\ q;$$

und eben so

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots.$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen von

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots P,\ Q$$

sind.

Hat man auf diese Weise

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots s_i$$

und

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots S_i$$

respective aus den Coefficienten der Gleichungen

$$f(x)=0 \text{ und } F(x)=0$$

gebildet, so kann man mittelst des oben für $\Sigma_i$ gefundenen Ausdrucks auch diese Grösse aus den Coefficienten der beiden in Rede stehenden gegebenen Gleichungen bilden, woraus zugleich mit völliger Deutlichkeit erhellet, dass auch $\Sigma_i$ jederzeit eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten der beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

ist.

Bezeichnen wir jetzt die Gleichung des $(mn)$ten Grades, deren Wurzeln

$$\begin{aligned}
&\alpha-x,\ \alpha-\lambda,\ \alpha-\mu,\ \alpha-\nu,\ \ldots.;\\
&\beta-x,\ \beta-\lambda,\ \beta-\mu,\ \beta-\nu,\ \ldots.;\\
&\gamma-x,\ \gamma-\lambda,\ \gamma-\mu,\ \gamma-\nu,\ \ldots.;\\
&\delta-x,\ \delta-\lambda,\ \delta-\mu,\ \delta-\nu,\ \ldots.;
\end{aligned}$$

u. s. w.

sind, im Allgemeinen durch

$$x^{mn}+\mathfrak{A}x^{mn-1}+\mathfrak{B}x^{mn-2}+\ldots+\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}=0,$$

wo die Coefficienten

$$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \ldots\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

unbekannte Grössen sind; so hat man nach dem Newton'schen Satze bekanntlich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0&=\Sigma_1+\mathfrak{A},\\
0&=\Sigma_2+\mathfrak{A}\Sigma_1+2\mathfrak{B},\\
0&=\Sigma_3+\mathfrak{A}\Sigma_2+\mathfrak{B}\Sigma_1+3\mathfrak{C},
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$0=\Sigma_{mn}+\mathfrak{A}\Sigma_{mn-1}+\mathfrak{B}\Sigma_{mn-2}+\ldots+\mathfrak{P}\Sigma_1+mn\mathfrak{Q}$$

oder

Digitized by Google

$$\mathfrak{A} = -\Sigma_1,$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}\Sigma_1 + \Sigma_2),$$
$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{3}(\mathfrak{B}\Sigma_1 + \mathfrak{A}\Sigma_2 + \Sigma_3),$$

u. s. w.

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{mn}(\mathfrak{P}\Sigma_1 + \ldots + \mathfrak{B}\Sigma_{mn-2} + \mathfrak{A}\Sigma_{mn-1} + \Sigma_{mn});$$

mittelst welcher sich also die Coefficienten

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

aus den Summen

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_{mn}$$

bilden lassen, und woraus zugleich erhellet, dass

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen der in Rede stehenden Summen sind. Da man nun aber nach dem Obigen die Summen

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_{mn}$$

aus den Coefficienten der Gleichungen

$$f(x) = 0, \; F(x) = 0$$

bilden kann, wobei zugleich aus dem Obigen bekannt ist, dass

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_{mn}$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden in Rede stehenden Gleichungen sind; so kann man auch die Coefficienten

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

aus den Coefficienten der beiden Gleichungen

$$f(x) = 0, \; F(x) = 0$$

bilden, und

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

sind lauter ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden in Rede stehenden Gleichungen.

Nach dem Obigen ist nun

$$(-1)^{mn} \cdot \Sigma = \mathfrak{Q}$$

oder

$$\Sigma = (-1)^{mn} \cdot \mathfrak{Q}.$$

Also kann man nach den aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Regeln auch die Grösse $\Sigma$, folglich auch die durch die Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x) = 0, \; F(x) = 0$$

resultirende Gleichung $\Sigma = 0$ aus den Coefficienten dieser beiden Gleichungen bilden, und zugleich ist klar, dass die Grösse $\Sigma$ jederzeit

Digitized by Google

eine ganze rationale algebraische Function der in Rede stehenden Coefficienten ist.

§. 4.

Die Gleichung $\Sigma = 0$ kann aber auch noch auf folgende Art aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

gebildet werden. Es ist offenbar

$$\Sigma = F(\alpha)\ F(\beta)\ F(\gamma)\ F(\delta) \ldots .$$

und

$$\Sigma = (-1)^{mn} f(\varkappa)\ f(\lambda)\ f(\mu)\ f(\nu) \ldots ;$$

also, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen gebrauchen,

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & (\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + P\alpha + Q) \\ & \times (\beta^n + A\beta^{n-1} + B\beta^{n-2} + \ldots + P\beta + Q) \\ & \times (\gamma^n + A\gamma^{n-1} + B\gamma^{n-2} + \ldots + P\gamma + Q) \\ & \times (\delta^n + A\delta^{n-1} + B\delta^{n-2} + \ldots + P\delta + Q) \\ & \times \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\end{aligned}$$

Da nun das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist; so reducirt sich augenscheinlich die Bildung der Grösse $\Sigma$ auf die Auflösung der schon vielfach behandelten Aufgabe:

Jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen.

Nach dem zweiten der beiden oben angegebenen Ausdrücke von $\Sigma$ ist

$$\begin{aligned}\Sigma = (-1)^{mn} & (\varkappa^m + a\varkappa^{m-1} + b\varkappa^{m-2} + \ldots + p\varkappa + q) \\ & \times (\lambda^m + a\lambda^{m-1} + b\lambda^{m-2} + \ldots + p\lambda + q) \\ & \times (\mu^m + a\mu^{m-1} + b\mu^{m-2} + \ldots + p\mu + q) \\ & \times (\nu^m + a\nu^{m-1} + b\nu^{m-2} + \ldots + p\nu + q) \\ & \times \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\end{aligned}$$

wo die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$F(x) = 0$$

ist, und also nach der in Rede stehenden Aufgabe auch durch die Coefficienten dieser Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln selbst zu kennen.

Mittelst des Vorhergehenden lässt sich auch leicht der Grad beurtheilen, bis zu welchem die ganze rationale algebraische Function $\Sigma$ der Coefficienten

$$a,\ b,\ c, \ldots p,\ q;\ A,\ B,\ C, \ldots P,\ Q$$

Digitized by Google

der beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0,$$

welche in Bezug auf $x$ respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade sind, in Bezug auf jeden der in Rede stehenden Coefficienten steigt. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\begin{aligned}\Sigma = &(\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + P\alpha + Q)\\ &\times(\beta^n + A\beta^{n-1} + B\beta^{n-2} + \ldots + P\beta + Q)\\ &\times(\gamma^n + A\gamma^{n-1} + B\gamma^{n-2} + \ldots + P\gamma + Q)\\ &\times(\delta^n + A\delta^{n-1} + B\delta^{n-2} + \ldots + P\delta + Q)\\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und weil nun die $m$ Wurzeln

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots.$$

der Gleichung $f(x)=0$ natürlich bloss von den Coefficienten dieser Gleichung, d. i. von

$$a,\ b,\ c, \ldots p,\ q$$

abhängen, so ist $\Sigma$ in Bezug auf jeden der Coefficienten

$$A,\ B,\ C, \ldots P,\ Q$$

offenbar vom $m$ten Grade. Ganz eben so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\Sigma = (-1)^{mn}&(x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q)\\ &\times(\lambda^m + a\lambda^{m-1} + b\lambda^{m-2} + \ldots + p\lambda + q)\\ &\times(\mu^m + a\mu^{m-1} + b\mu^{m-2} + \ldots + p\mu + q)\\ &\times(\nu^m + a\nu^{m-1} + b\nu^{m-2} + \ldots + p\nu + q)\\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

dass $\Sigma$ in Bezug auf jeden der Coefficienten

$$a,\ b,\ c, \ldots p,\ q$$

vom $n$ten Grade ist.

## §. 5.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Eliminationsproblem auf die Aufgabe:

**Jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten der Gleichung auszudrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen;**

reducirt, und wollen daher hier die schöne von Cauchy in seinen Exercices de Mathématiques. 4e année. p. 103 gegebene Auflösung dieses Problems, welche nicht so allgemein, wie sie es verdient, bekannt zu sein scheint, einschalten.

Diese Auflösung beruhet vorzüglich auf den beiden in den zwei folgenden Paragraphen bewiesenen Lehrsätzen.

## §. 6.

*Lehrsatz.* Wenn man die Grösse

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N,$$

Digitized by Google

wo $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet, mit $x+a$ dividirt; so ist der übrig bleibende Rest jederzeit eine von $x$ unabhängige Grösse, welche man erhält, wenn man in dem Dividendus

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

für $x$ die Grösse $-a$ setzt, nämlich die Grösse

$$A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N.$$

Beweis. Der bei der Division von

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

durch $x+a$ hervorgehende Quotient sei

$$A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M',$$

und der übrig bleibende Rest, welcher, da der Divisor eine ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $x$ ist, offenbar eine eben solche Function des nullten Grades von $x$, d. i. eine von $x$ unabhängige oder eine constante Grösse ist, sei $R$; so ist nach der Natur der Division

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$
$$= (x+a)\,(A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M') + R,$$

d. i.

$$\begin{aligned} Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N \\ = A'x^n + \left.\begin{matrix} B' \\ + A'a \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix} C' \\ + B'a \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} M' \\ + L'a \end{matrix}\right\} x + M'a + R. \end{aligned}$$

Weil diese Gleichung für jedes $x$ gilt, so hat man nach einem bekannten Satze die folgenden Gleichungen:

$$A = A',$$
$$B = B' + A'a,$$
$$C = C' + B'a,$$

u. s. w.

$$M = M' + L'a,$$
$$N = R + M'a;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$A' = A,$$
$$B' = B - Aa,$$
$$C' = C - Ba + Aa^2,$$
$$D' = D - Ca + Ba^2 - Aa^3,$$

u. s. w.

$$M' = M - La + Ka^2 - Ja^3 + \ldots + Aa^{n-1}\,.\,(-1)^{n-1},$$
$$R' = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ja^4 - \ldots - Aa^n\,.\,(-1)^{n-1};$$

oder

$$R = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ja^4 - \ldots + Aa^n\,.\,(-1)^n.$$

Digitized by Google

Also ist offenbar

$$R = A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N,$$

wie bewiesen werden sollte.

## §. 7.

*Lehrsatz.* Die $n$ Wurzeln der Gleichung

$$1. \quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coefficienten reelle oder imaginäre Grössen sein können, seien

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots i,\ k;$$

wobei wir zugleich annehmen wollen, dass diese Wurzeln sämmtlich unter einander ungleich sind. $W$ sei eine beliebige Function der Wurzeln

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots i,\ k.$$

So wie diese Wurzeln offenbar Functionen der Coefficienten der Gleichung 1. sind: so kann man sich natürlich auch $W$ durch diese Coefficienten ausgedrückt denken. Der durch die Coefficienten der Gleichung 1. ausgedrückte Werth von $W$ sei $\Omega$. Nun wollen wir annehmen, dass man durch irgend ein Mittel die Function $W$ auf die Form

$$A_1 a^m + B_1 a^{m-2} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1$$

gebracht habe, so dass die Coefficienten

$$A_1,\ B_1,\ C_1, \ldots U_1,\ V_1$$

sämmtlich durch die Coefficienten

$$A,\ B,\ C, \ldots L,\ N$$

ausgedrückt sind. Bleibt dann die Gleichung

$$2. \quad A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1 = \Omega$$

jederzeit richtig, wenn man für $a$ irgend eine der Wurzeln $b,\ c,\ d, \ldots i,\ k$ setzt; so wird bei der Division der Grösse

$$A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1$$

durch die Grösse

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

indem man nämlich diese beiden Grössen als Functionen von $a$ betrachtet, ein von $a$ unabhängiger Rest übrig bleiben, welcher der durch die Coefficienten der Gleichung 1. ausgedrückte Werth $\Omega$ der Function $W$ ist.

Beweis. Der bei der Division von

$$A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + C_1 x^{m-2} + \ldots + U_1 x + V_1$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

übrig bleibende Rest hat im Allgemeinen die Form

Digitized by Google

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

so dass also, wenn wir den bei dieser Division sich ergebenden Quotienten durch $Q$ bezeichnen, für jedes $x$

$$3.\quad A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + C_1 x^{m-2} + \ldots + U_1 x + V_1 = (x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N)Q + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu$$

ist. Nach der Voraussetzung ist nun

$$A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1 = \Omega,$$
$$A_1 b^m + B_1 b^{m-1} + C_1 b^{m-2} + \ldots + U_1 b + V_1 = \Omega,$$
$$A_1 c^m + B_1 c^{m-1} + C_1 c^{m-2} + \ldots + U_1 c + V_1 = \Omega,$$

u. s. w.

$$A_1 k^m + B_1 k^{m-1} + C_1 k^{m-2} + \ldots + U_1 k + V_1 = \Omega$$

und

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N = 0,$$
$$b^n + Ab^{n-1} + Bb^{n-2} + \ldots + Lb + N = 0,$$
$$c^n + Ac^{n-1} + Bc^{n-2} + \ldots + Lc + N = 0,$$

u. s. w.

$$k^n + Ak^{n-1} + Bk^{n-2} + \ldots + Lk + N = 0.$$

Folglich ist wegen der für jedes $x$ geltenden Gleichung 3.

$$\alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \ldots + \lambda a + \mu = \Omega,$$
$$\alpha b^{n-1} + \beta b^{n-2} + \gamma b^{n-3} + \ldots + \lambda b + \mu = \Omega,$$
$$\alpha c^{n-1} + \beta c^{n-2} + \gamma c^{n-3} + \ldots + \lambda c + \mu = \Omega,$$

u. s. w.

$$\alpha k^{n-1} + \beta k^{n-2} + \gamma k^{n-3} + \ldots + \lambda k + \mu = \Omega,$$

und die Gleichung

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega$$

oder

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu - \Omega = 0$$

des $(n-1)$sten Grades hat folglich die $n$ unter einander ungleichen Wurzeln

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ i,\ k,$$

welches offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \ldots\ \lambda = 0,\ \mu - \Omega = 0$$

ist. Aus der letzten dieser Gleichungen folgt $\mu = \Omega$, und es ist also offenbar für jedes $x$

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega,$$

d. h. der bei der Division von

$$A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + C_1 x^{m-2} + \ldots + U_1 x + V_1$$

durch

Digitized by Google

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Rest ist eine von $x$ unabhängige Grösse und der oben durch $\Omega$ bezeichneten Grösse gleich. Daher ist natürlich auch der bei der Division von

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

durch

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N$$

bleibende Rest eine von $a$ unabhängige Grösse und der oben durch $\Omega$ bezeichneten Grösse gleich, welches bewiesen werden sollte.

## §. 8.

Wir wollen nun die Anwendung der in den beiden vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Sätze auf die Gleichungen der verschiedenen Grade zeigen.

Zuerst sei die Gleichung des zweiten Grades

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

deren Coefficienten wie immer bei dieser Untersuchung beliebige reelle oder imaginäre Grössen sein können, gegeben. Die beiden unter einander ungleichen Wurzeln dieser Gleichung seien $a$, $b$; so ist nach einem bekannten Satze von den Gleichungen

$$a + b = -A,$$

und folglich

$$b = -A - a.$$

Wenn nun $f(a, b)$ eine ganze rationale symmetrische Function der beiden Wurzeln $a$ und $b$ ist; so wird man, wenn man

$$b = -A - a$$

setzt, diese Function immer leicht auf die Form

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

bringen, und also

$$f(a, b) = f(a, -A - a)$$
$$= A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

setzen können. Weil aber nach der Voraussetzung $f(a, b)$ eine symmetrische Function von $a$ und $b$ ist, so ist nach dem allgemeinen Begriffe der symmetrischen Functionen offenbar

$$f(a, b) = f(b, a) = f(b, -A - b)$$
$$= A_1b^m + B_1b^{m-1} + C_1b^{m-2} + \ldots + U_1b + V_1.$$

Bezeichnet also wie in §. 7. das Symbol $\Omega$ den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth von $f(a, b)$; so ist klar, dass die Gleichung

$$A_1a^m + B_2a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1 = \Omega$$

auch gilt, wenn man $b$ für $a$ setzt. Um also $\Omega$ zu finden, wird man nach §. 7. mit der Grösse

$$a^2 + Aa + B$$



Digitized by Google

in die Grösse

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

dividiren und den übrig bleibenden Rest bemerken, welcher der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$, d. i. die Grösse $\Omega$, sein wird.

Betrachtet man $f(a, b)$ als Function von $b$ und dividirt mit

$$b + a + A$$

in dieselbe hinein; so ist nach §. 6. der übrig bleibende Rest der Werth der Function $f(a, b)$, welchen dieselbe erhält, wenn man

$$b = -A - a$$

setzt, d. i.

$$f(a, -A-a)$$

oder die Grösse

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1,$$

und man kann also, um die Function $f(a, b)$ durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken oder die Grösse $\Omega$ zu finden, auch auf folgende Art verfahren:

Man betrachte $f(a, b)$ als Function von $b$, dividire in dieselbe mit

$$b + a + A$$

hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von $a$ betrachtet, mit

$$a^2 + Aa + B$$

hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$.

Setzt man

$$F(x) = x^2 + Ax + B$$

und

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a},$$

so ist, wie man leicht findet,

$$F_1(x) = x + a + A,$$

und folglich

$$F_1(b) = b + a + A.$$

Daher lässt sich die obige Regel zur Berechnung des gesuchten, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werths von $f(a, b)$ auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Man setze

$$F(x) = x^2 + Ax + B$$

und

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a}.$$

Digitized by Google

Nun dividire man in $f(a, b)$, als Function von $b$ betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von $a$ betrachtet, mit $F(a)$ hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest, der gesuchte, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$.

## §. 9.

Es sei ferner die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben. Die drei Wurzeln dieser Gleichung, die auch hier wieder als unter einander ungleich angenommen werden, seien $a$, $b$, $c$; so ist

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$$

oder

$$C = -a^3 - Aa^2 - Ba.$$

Also ist

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x - a)$$
$$= (x - a)\{x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B\},$$

und $b$, $c$ sind folglich offenbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B = 0.$$

Ist nun $f(a, b, c)$ eine ganze rationale symmetrische Function von $a$, $b$, $c$; so kann man dieselbe zuerst bloss als eine ganze rationale symmetrische Function von $b$ und $c$ betrachten, und nach §. 8. durch die Coefficienten der vorhergehenden Gleichung des zweiten Grades ausdrücken. Dadurch wird offenbar $f(a, b, c)$ als eine ganze rationale Function von $a$ dargestellt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck von $f(a, b, c)$, als Function von $a$ betrachtet, mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung des dritten Grades ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher gesucht wurde, wie aus dem in §. 7. bewiesenen Satze unmittelbar folgt.

Nach §. 8. hat man also auf folgende Art zu verfahren:

Man setze

$$F_1(x) = x^3 + (a + A)x + a^2 + Aa + B$$

und

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von $c$ betrachtet, mit $F_2(c)$ hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von $b$ betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der als eine Function von $a$ dargestellte



Digitized by Google

Werth der Function $f(a, b, c)$. Dividirt man nun in diesen Rest mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein, so ist der bei dieser Division bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung des dritten Grades ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher gesucht wurde.

Bemerkt man nun aber, dass nach dem Obigen die Function $F_1(x)$ erhalten wird, wenn man

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

von

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

subtrahirt, in den Rest mit $x - a$ dividirt und den Quotienten bemerkt; so kann man die obige Regel offenbar auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

Man setze

$$F(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

und

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a},$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von $c$ betrachtet, mit $F_2(c)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $b$ betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von $a$ betrachtet, mit $F(a)$ hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$.

## §. 10.

Man habe jetzt die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

deren unter einander ungleiche Wurzeln $a$, $b$, $c$, $d$ sein mögen; so ist

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$$

oder

$$D = -a^4 - Aa^3 - Ba^2 - Ca,$$

und folglich

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$= x^4 - a^4 + A(x^3 - a^3) + B(x^2 - a^2) + C(x - a)$$
$$= (x-a)\{x^3 + (a+A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + a^3 + Aa^2 + Ba + C\},$$

so dass also $b$, $c$, $d$ offenbar die Wurzeln der Gleichung des dritten Grades

Digitized by Google

$x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+a^3+Aa^2+Ba+C=0$

sind. Ist nun $f(a, b, c, d)$ eine ganze rationale symmetrische Function von $a, b, c, d$; so kann man dieselbe zuerst bloss als eine ganze rationale symmetrische Function von $b, c, d$ betrachten, und nach §. 9. durch die Coefficienten der vorhergehenden Gleichung des dritten Grades ausdrücken. Dadurch erhält man $f(a, b, c, d)$ als Function von $a$ ausgedrückt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck mit

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

hinein, so ist nach §. 7. der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wurde.

Nach §. 9. hat man also auf folgende Art zu verfahren:

Man setze

$$F_1(x)=x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+a^3+Aa^2+Ba+C$$

und

$$F_2(x)=\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b},$$

$$F_3(x)=\frac{F_2(x)-F_2(c)}{x-c}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von $d$ betrachtet, mit $F_3(d)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $c$ betrachtet, mit $F_3(c)$ hinein, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von $b$ betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein. Der bei dieser Division bleibende Rest ist der als Function von $a$ ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$. Diesen Rest dividire man durch

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D,$$

so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung des vierten Grades ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wurde.

Bemerkt man nun aber wieder, dass nach dem Obigen die Function $F_1(x)$ erhalten wird, wenn man

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

von

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

subtrahirt, in den Rest mit $x-a$ dividirt und den Quotienten bemerkt; so ist klar, dass man die obige Regel auch auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

Man setze

$$F(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

und

$$F_1(x)=\frac{F(x)-F(a)}{x-a},$$

$$F_2(x)=\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b},$$

Digitized by Google

$$F_3(x) = \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von $d$ betrachtet, mit $F_3(d)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $c$ betrachtet, mit $F_2(c)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $b$ betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von $a$ betrachtet, mit $F(a)$ hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$.

## §. 11.

Wie man auf dem im Vorhergehenden eingeschlagenen Wege immer weiter fortschreiten kann, liegt deutlich vor Augen, und wir werden also unmittelbar auf das folgende allgemeine sehr wichtige Theorem geführt:

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

seien $a, b, c, d, \ldots i, k$ *), und $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$ sei eine beliebige ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln, welche, ohne die Wurzeln selbst zu kennen, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung, die ganz beliebige reelle oder imaginäre Grössen sein können, ausgedrückt werden soll. Zu dem Ende setze man

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

und

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a},$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b},$$

$$F_3(x) = \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c},$$

u. s. w.

$$F_{n-1}(x) = \frac{F_{n-2}(x) - F_{n-2}(i)}{x - i}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$, als Function von $k$ betrachtet, mit $F_{n-1}(k)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $i$ betrachtet, mit $F_{n-2}(i)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von $h$ betrachtet, mit $F_{n-3}(h)$ hinein,

*) Nach dem Vorhergehenden müsste eigentlich angenommen werden, dass diese Wurzeln sämmtlich unter einander ungleich sind. Dass es aber nicht nöthig ist, diese Einschränkung zu machen, wird gleich nachher gezeigt werden.

Digitized by Google

u. s. w., und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man einen Rest, als Function von $b$ betrachtet, durch $F_1(b)$, und endlich den bei dieser Division bleibenden Rest, als Function von $a$ betrachtet, durch $F(a)$ dividirt hat; so ist der bei dieser letzten Division bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$.

Nach dem Obigen würde dieser Satz eigentlich noch der Bedingung zu unterwerfen sein, dass die Wurzeln der gegebenen Gleichung sämmtlich unter einander ungleich sein müssen. Indess erhellet durch das folgende einfache Raisonnement sogleich, dass dies nicht nöthig ist, und unser Satz also auch dann noch gültig bleibt, wenn unter den Wurzeln $a, b, c, d, \ldots i, k$ der gegebenen Gleichung beliebig viele einander gleiche vorkommen. Bezeichnet nämlich, die Wurzeln als sämmtlich unter einander ungleich angenommen, wie schon früher, $\Omega$ den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der ganzen rationalen symmetrischen Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$; so ist

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega,$$

und aus der oben gelehrten Bestimmungsweise von $\Omega$ erhellet unmittelbar, dass unter den gemachten Voraussetzungen $\Omega$ immer eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten $A, B, C, D, \ldots L, N$ ist. Die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

bleibt nach dem Obigen richtig, wenn nur alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich sind, wie klein auch sonst die absoluten Werthe ihrer Unterschiede sein mögen. Nun kann man sich aber offenbar vorstellen, dass sich die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots L, N$ der gegebenen Gleichung auf eine solche Weise stetig ändern, dass eine oder mehrere Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Unter dieser Voraussetzung hört die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

nie auf gültig zu sein, und wird also offenbar auch dann noch gültig bleiben, wenn die gedachten Differenzen ihre Gränze Null wirklich erreichen, oder, was dasselbe ist, wenn zwei oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich werden.

## §. 12.

Von dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Theoreme wollen wir nun zu dessen näherer Erläuterung einige Anwendungen machen.

Zuerst sei die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

deren Wurzeln, wie oben, durch $a, b, c$ bezeichnet werden sollen, gegeben. Man soll die ganze rationale symmetrische Function

$$W = b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2$$

Digitized by Google

der Wurzeln $a$, $b$, $c$ durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken.

In diesem Falle ist

$$F(x) = x^3 + Bx + C,$$

und folglich

$$F(x) - F(a) = x^3 - a^3 + B(x - a).$$

Also ist

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2 + B,$$

und folglich

$$F_1(x) - F_1(b) = x^2 - b^2 + a(x - b),$$

also

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} = x + b + a.$$

Da nun

$$F_2(c) = c + b + a$$

ist, so muss man mit

$$c + b + a$$

in $W$, als Function von $c$ betrachtet, d. i. in

$$(b + a)c^2 + (b^2 + a^2)c + ab^2 + a^2b$$

dividiren und den Rest bemerken. Der bleibende Rest ist aber

$$3ab^2 + 3a^2b.$$

Dividirt man in denselben, als Function von $b$ betrachtet, mit

$$F_1(b) = b^2 + ab + a^2 + B$$

hinein und bemerkt den Rest; so erhält man als Rest

$$-3a^3 - 3Ba.$$

Dividirt man endlich in diesen Rest, als Function von $a$ betrachtet, mit

$$F(a) = a^3 + Ba + C$$

hinein und bemerkt wieder den Rest, so erhält man als Rest $3C$. Dieser Rest ist der gesuchte Werth der gegebenen symmetrischen Function, und es ist also

$$b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 = 3C.$$

## §. 13.

Die gegebene Gleichung sei

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

und

$$W = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d)$$

sei die gegebene ganze rationale symmetrische Function ihrer Wurzeln $a$, $b$, $c$, $d$; so ist

Digitized by Google

$$F(x) = x^4 + Bx^2 + Cx + D,$$

und folglich

$$F(x) - F(a) = x^4 - a^4 + B(x^2 - a^2) + C(x - a),$$

also

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = x^3 + ax^2 + (a^2 + B)x + a^3 + Ba + C.$$

Daher ist

$$F_1(x) - F_1(b) = x^3 - b^3 + a(x^2 - b^2) + (a^2 + B)\ (x - b),$$

folglich

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} = x^2 + (b + a)x + b^2 + ab + a^2 + B,$$

also

$$F_2(x) - F_2(c) = x^2 - c^2 + (b + a)\ (x - c),$$

und daher

$$F_3(x) = \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c} = x + c + b + a.$$

Die fernere Rechnung kann man sich aber in diesem Falle auf folgende Art sehr erleichtern. Nach einem bekannten Satze ist nämlich

$$a + b + c + d = 0,$$

oder

$$d = -a - b - c.$$

Also ist

$$a + d = -(b + c),$$
$$b + d = -(a + c),$$
$$c + d = -(a + b),$$

und folglich

$$W = -\{(a + b)\ (a + c)\ (b + c)\}^2,$$

wo man nun statt $W$ die einfachere symmetrische Function

$$W_1 = (a + b)\ (a + c)\ (b + c)$$

entwickeln kann, aus der sich dann nach dem Vorhergehenden $W$ leicht ergiebt. Entwickelt man $W_1$ nach den Potenzen von $c$; so erhält man

$$W_1 = (b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b.$$

Dividirt man mit

$$F_3(d) = d + c + b + a$$

in $W_1$, als Function von $d$ betrachtet, hinein, so ist der Rest offenbar

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b.$$

Dividirt man in diese Grösse, als Function von $c$ betrachtet, mit

Digitized by Google

$$F_2(c) = c^3 + (b+a)c + b^3 + ab + a^2 + B$$

hinein, so bleibt als Rest

$$-b^3 - ab^2 - (a^2 + B)b - a^3 - Ba.$$

Dividirt man ferner in diese Grösse, als Function von $b$ betrachtet, mit

$$F_1(b) = b^2 + ab^2 + (a^2 + B)b + a^3 + Ba + C$$

hinein, so bleibt als Rest $+ C$. Dividirt man in diesen Rest, als Function von $a$ betrachtet, mit

$$F(a) = a^4 + Ba^2 + Ca + D$$

hinein, so bleibt natürlich $+ C$ als Rest, und es ist folglich

$$(a+b)\ (a+c)\ (b+c) = C.$$

Also ist nach dem Obigen

$$(a+b)\ (a+c)\ (a+d)\ (b+c)\ (b+d)\ (c+d) = -C^2.$$

Aehnliche Vereinfachungen der Rechnung bieten sich öfters dar.

## §. 14.

Die gegebene Gleichung sei die quadratische Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

und

$$W = (a-b)^2$$

sei die gegebene ganze rationale symmetrische Function ihrer Wurzeln $a$ und $b$, welche durch ihre Coefficienten ausgedrückt werden soll. Es ist in diesem Falle

$$F(x) = x^2 + Ax + B,$$

und folglich

$$F(x) - F(a) = x^2 - a^2 + A(x-a),$$

also

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = x + a + A.$$

Entwickelt man $W$ nach Potenzen von $b$, so erhält man

$$W = b^2 - 2ab + a^2.$$

In diese Grösse, als Function von $b$ betrachtet, muss man mit

$$F_1(b) = b + a + A$$

dividiren, und den Rest bemerken. Der bleibende Rest ist

$$4a^2 + 4Aa + A^2,$$

in welchen, als Function von $a$ betrachtet, man nun mit

$$F(a) = a^2 + Aa + B$$

dividiren und wieder den Rest bemerken muss. Der bleibende Rest ist aber

$$A^2 - 4B,$$

Digitized by Google

und folglich

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats kann man auf folgende Art leicht prüfen. Bekanntlich ist

$$a+b = -A,$$

und, weil $a$ eine Wurzel der gegebenen quadratischen Gleichung ist, so ist

$$a^2 + Aa + B = 0.$$

Da nun

$$b = -a - A$$

ist, so ist

$$W = (a-b)^2 = (2a+A)^2 = A^2 + 4(a^2 + Aa),$$

und folglich, weil

$$a^2 + Aa = -B$$

ist,

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B,$$

wie vorher gefunden wurde.

## §. 15.

Die gegebene Gleichung sei die vollständige cubische Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

und die durch deren Coefficienten auszudrückende ganze rationale symmetrische Function ihrer Wurzeln $a$, $b$, $c$ sei

$$W = (a-b)^2\,(a-c)^2\,(b-c)^2.$$

Um in diesem und in ähnlichen Fällen die symmetrische Function $W$ bloss durch $a$ und die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so dass nämlich die Wurzeln $b$, $c$ aus dem obigen Ausdrucke von $W$ eliminirt werden, kann man auch auf folgende Art verfahren. Da $a$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, so ist

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Folglich ist für jedes $x$

$$\begin{aligned} &x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ &= x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x-a) \\ &= (x-a)\{x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber bekanntlich

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-a)\,(x-b)\,(x-c).$$

Folglich ist für jedes $x$

$$(x-b)\,(x-c) = x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B,$$

und daher für $x = a$

$$(a-b)\,(a-c) = 3a^2 + 2Aa + B.$$

Digitized by Google

Also ist

$$W=(b-c)^2\ (3a^2+2Aa+B).$$

Da nun ferner $b$, $c$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2+(a+A)x+a^2+Aa+B=0$$

sind, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned}(b-c)^2&=(a+A)^2-4(a^2+Aa+B)\\&=-(3a^2+2Aa-A^2+4B).\end{aligned}$$

Entwickelt man $W$ nach Potenzen von $a$ und dividirt dann mit

$$a^3+Aa^2+Ba+C$$

hinein, so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der gesuchte Werth von $W$. Nach gehöriger Rechnung ergiebt sich

$$(a-b)^2\ (a-c)^2\ (b-c)^2=A^2B^2-4A^3C-4B^3-27C^2+18ABC.$$

Für $A=0$ ist

$$(a-b)^2\ (a-c)^2\ (b-c)^2=-4B^3-27C^2,$$

welcher Werth unserer symmetrischen Function einer cubischen Gleichung entspricht, in welcher das zweite Glied fehlt.

## §. 16.

Das Product der Quadrate aller Differenzen je zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung ist, wie leicht erhellet, immer eine ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung und kann daher nach den obigen Regeln immer durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Weil aber dieses Product in mehreren Beziehungen von besonderer Wichtigkeit ist, so wollen wir jetzt noch zeigen, wie dasselbe immer ohne grosse Schwierigkeit für eine beliebige Gleichung des $n$ten Grades gefunden werden kann, wenn man dasselbe für jede Gleichung des $(n-1)$sten Grades finden, d. h. durch die Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken kann, ohne deren Wurzeln selbst zu kennen, wodurch die Entwickelung dieser Producte sehr erleichtert wird.

Die gegebene Gleichung des $n$ten Grades sei

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Lx+N=0,$$

und $a$, $b$, $c$, $d$, $\ldots$ $i$, $k$ seien die Wurzeln derselben. Ferner sei

$$\begin{aligned}W=&(a-b)^2\ (a-c)^2\ (a-d)^2\ \ldots\ (a-i)^2\ (a-k)^2\\&\times(b-c)^2\ (b-d)^2\ \ldots\ (b-i)^2\ (b-k)^2\\&\times(c-d)^2\ \ldots\ (c-i)^2\ (c-k)^2\\&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\&\times(h-i)^2\ (h-k)^2\\&\times(i-k)^2.\end{aligned}$$

Weil $a$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, so ist

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+La+N=0.$$

Digitized by Google

Folglich ist für jedes $x$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$
$$= x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x - a),$$

oder, weil die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens dem Producte

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-i)\,(x-k)$$

gleich ist, für jedes $x$

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-i)\,(x-k)$$
$$= x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $x - a$ dividirt, für jedes $x$

$$(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots(x-i)\,(x-k)$$
$$= x^{n-1}$$
$$+ (a + A)x^{n-2}$$
$$+ (a^2 + Aa + B)x^{n-3}$$
$$+ (a^3 + Aa^2 + Ba + C)x^{n-4}$$
u. s. w.
$$+ a^{n-1} + Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + Ca^{n-4} + \ldots + L;$$

folglich für $x = a$

$$(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\ldots(a-i)\,(a-k)$$
$$= na^{n-1} + (n-1)Aa^{n-2} + (n-2)Ba^{n-3} + \ldots + L.$$

Auch ist klar, dass $b$, $c$, $d$, $\ldots$ $i$, $k$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^{n-1}$$
$$+ (a + A)x^{n-2}$$
$$+ (a^2 + Aa + B)x^{n-3}$$
$$+ (a^3 + Aa^2 + Ba + C)x^{n-4}$$
u. s. w.
$$+ a^{n-1} + Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + Ca^{n-4} + \ldots + L$$

sind. Weil wir nun annehmen, dass man für jede Gleichung des $(n-1)$sten Grades das Product der Quadrate der Differenzen je zweier Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann; so kann man das Product

$$(b-c)^2\,(b-d)^2\,(b-e)^2\ldots(b-i)^2\,(b-k)^2$$
$$\times(c-d)^2\,(c-e)^2\ldots(c-i)^2\,(c-k)^2$$
$$\times(d-e)^2\ldots(d-i)^2\,(d-k)^2$$
u. s. w.
$$\times(h-i)^2\,(h-k)^2$$
$$\times(i-k)^2$$

durch die Coefficienten der obigen Gleichung des $(n-1)$sten Grades ausdrücken. Bezeichnen wir den dadurch hervorgehenden Aus-

Digitized by Google

druck durch $V$; so ist $V$ bloss noch von $a$ und den Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ abhängig, und nach dem Obigen ist nun

$$W = V\{na^{n-1} + (n-1)Aa^{n-2} + (n-2)Ba^{n-3} + \ldots + L\}^2,$$

wo also auch $W$ bloss von $a$ und den Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ abhängig ist. Das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der vorhergehenden Gleichung lässt sich immer durch ganz elementare Rechnungen nach den Potenzen von $a$ entwickeln. Dividirt man dann in dieses so entwickelte Product mit der Grösse

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N$$

hinein, so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest nach §. 6. von $a$ unabhängig und liefert nach §. 7. den bloss durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der symmetrischen Function $W$.

Es ist klar, dass das durch $W$ bezeichnete Product bloss dann verschwinden kann, wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat. Ist dies nicht der Fall, so ist $W$ jederzeit eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten $A, B, C, \ldots L, N$, deren Werth grösser als Null ist. Sind also die Coefficienten $A, B, C, \ldots L, N$ ganze Zahlen, so ist offenbar auch $W$ eine ganze Zahl, die immer der Einheit gleich oder grösser als die Einheit ist, vorausgesetzt nämlich, dass die gegebene Gleichung keine einander gleichen Wurzeln hat.

## §. 17.

Wir haben jetzt ausführlich gezeigt und durch eine hinreichend grosse Anzahl von Beispielen erläutert, dass jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung immer durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht, wobei sich zugleich ergab, dass jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung ist. Kaum bedarf es nun noch einer besondern Erläuterung, dass überhaupt jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden kann, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht. Hat man nämlich z. B. die rationale gebrochene symmetrische Function

$$W = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

der drei Wurzeln $a, b, c$ einer Gleichung des dritten Grades, so sind natürlich Zähler und Nenner ganze rationale symmetrische Functionen von $a, b, c$. Weil man nun nach den im Vorhergehenden entwickelten Regeln sowohl $abc$, als auch $ab + ac + bc$, durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht, so gilt dies natürlich auch von $W$, wobei sich aber von selbst versteht, dass der für $W$ sich ergebende Ausdruck jetzt keine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung ist. Hat man die irrationale symmetrische Function

$$W = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Digitized by Google

der drei Wurzeln $a$, $b$, $c$ einer cubischen Gleichung, so kann man nach dem Vorhergehenden die ganze rationale symmetrische Function

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht, folglich auch die Function $W$.

Man sieht also:

dass jede symmetrische Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung immer durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht.

## §. 18.

Um nur ein einfaches Beispiel der Elimination einer unbekannten Grösse aus zwei Gleichungen zu geben, wollen wir die beiden Gleichungen des zweiten Grades

$$x^2 + ax + b = 0,$$
$$x^2 + Ax + B = 0$$

betrachten, und wollen

$$F(x) = x^2 + Ax + B$$

setzen, die Wurzeln der zweiten Gleichung aber durch $x$ und $\lambda$ bezeichnen. Nach §. 4. ist unter diesen Voraussetzungen, wenn $\Sigma$ seine dortige Bezeichnung behält,

$$\Sigma = (x^2 + ax + b)\ (\lambda^2 + a\lambda + b),$$

und es kommt nun darauf an, diese symmetrische Function der Wurzeln $x$, $\lambda$ der Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0$$

durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken. Zu dem Ende muss man nach §. 11. zuvörderst

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(z)}{x - z} = \frac{x^2 - z^2 + A(x - z)}{x - z}$$

berechnen, wodurch man

$$F_1(x) = x + z + A$$

erhält, und muss dann den Rest entwickeln, welcher übrig bleibt, wenn man mit

$$F_1(\lambda) = \lambda + z + A$$

in die als Function von $\lambda$ betrachtete Grösse $\Sigma$ hinein dividirt. Wenn man aber zuerst mit $\lambda + z + A$ in $\lambda^2 + a\lambda + b$ dividirt, so bleibt als Rest die Grösse

$$(k + A)\ (k + A - a) + b$$

oder

$$z^2 + (2A - a)z + A^2 - aA + b,$$

und wenn man also mit $\lambda + z + A$ in

$$\Sigma = (x^2 + ax + b)\ (\lambda^2 + a\lambda + b)$$

Digitized by Google

dividirt, so bleibt als Rest

$$(x^2+ax+b)\,\{x^2+(2A-a)x+A^2-aA+b\},$$

d. i., wie man durch leichte Rechnung findet,

$$x^4+2Ax^3+(A^2+aA-a^2+2b)x+(aA^2-a^2A+2bA)x \\ +b(A^2-aA+b).$$

Dividirt man nun in diese Grösse mit

$$F(x)=x^2+Ax+B$$

hinein, so bleibt der Rest

$$(A^2-aA+b)b-(aA-a^2+2b-B)B$$

oder

$$b^2-abA+(a^2-2b)B+bA^2-aAB+B^2$$

übrig, und es ist also

$$\Sigma=b^2-abA+(a^2-2b)B+bA^2-aAB+B^2.$$

Die durch die Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen des zweiten Grades hervorgehende Gleichung ist aber nach §. 2.

$$b^2-abA+(a^2-2b)B+bA^2-aAB+B^2=0.$$

Dieses Beispiel wird gewiss schon allein hinreichend sein, deutlich zu zeigen, wie man sich in allen übrigen Fällen bei der Elimination einer unbekannten Grösse aus zwei gegebenen Gleichungen mit Hülfe der symmetrischen Functionen zu verhalten hat.

## §. 19.

Wir wollen jetzt auch den Fall betrachten, wenn die Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen nicht die Einheit sind, sondern diese Gleichungen die allgemeinere Form

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+px+q=0,$$
$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Px+Q=0$$

haben. Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$x^m+\frac{b}{a}x^{m-1}+\frac{c}{a}x^{m-2}+\ldots+\frac{p}{a}x+\frac{q}{a}=0,$$
$$x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+\frac{C}{A}x^{n-2}+\ldots+\frac{P}{A}x+\frac{Q}{A}=0;$$

so kann man für diese beiden letztern Gleichungen aus deren Coefficienten

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{d}{a},\ \ldots\ \frac{p}{a},\ \frac{q}{a};$$
$$\frac{B}{A},\ \frac{C}{A},\ \frac{D}{A},\ \ldots\ \frac{P}{A},\ \frac{Q}{A}$$

die Function $\Sigma$ ganz nach den im Obigen entwickelten Regeln bilden, und die Gleichung

$$\Sigma=0$$

Digitized by Google

ist dann das Resultat der Elimination von $x$ aus den beiden Gleichungen

$$x^m + \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^{m-2} + \ldots + \frac{p}{a}x + \frac{q}{a} = 0,$$

$$x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} + \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A} = 0;$$

oder natürlich auch das Resultat der Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0.$$

Bekanntlich ist $\Sigma$ eine ganze rationale algebraische Function von

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots \frac{p}{a}, \frac{q}{a};$$

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \ldots \frac{P}{A}, \frac{Q}{A};$$

welche nach §. 4. in Bezug auf

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots \frac{p}{a}, \frac{q}{a}$$

von $n$ten, in Bezug auf

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \ldots \frac{P}{A}, \frac{Q}{A}$$

vom $m$ten Grade ist. Also ist offenbar $a^n A^m \Sigma$ jederzeit eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots p, q;$$

$$A, B, C, D, \ldots P, Q$$

der beiden gegebenen Gleichungen, und das Resultat der Elimination von $x$ aus diesen beiden Gleichungen ist die Gleichung

$$a^n A^m \Sigma = 0,$$

deren erster Theil eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen ist.

## §. 20.

Wir wollen jetzt wieder zu den beiden zu Anfange betrachteten Gleichungen

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

oder

$$f(x) = 0, \; F(x) = 0$$

zurückkehren, indem wir auch sowohl dem Symbol $\Sigma$, als auch allen übrigen in §. 2. gebrauchten Symbolen ihre ihnen dort beigelegten Bedeutungen lassen. Dies vorausgesetzt, hat nun Cauchy in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 400. die in dem folgenden Satze ausgesprochene, für



Digitized by Google

die Theorie der Elimination offenbar höchst wichtige Eigenschaft der Function $\Sigma$ bewiesen:

Wenn die Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ p,\ q;\ A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q$$

ganz willkührliche Grössen und von einander ganz unabhängig sind; so kann die ganze rationale algebraische Function $\Sigma$ der in Rede stehenden Coefficienten im Allgemeinen und algebraisch nie in zwei Factoren zerlegt werden, welche beide ganze rationale algebraische Functionen dieser Coefficienten sind.

Beweis. Wir wollen einmal im Allgemeinen

$$\Sigma = \Sigma'\Sigma''$$

setzen, und wollen annehmen, dass die Factoren $\Sigma'$ und $\Sigma''$ beide ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ p,\ q;\ A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q$$

sind. Mittelst der aus §. 3. bekannten Formeln des Newton'schen Satzes kann man die beiden in Rede stehenden Factoren als ganze rationale algebraische Functionen der Wurzeln

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots;\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots.$$

ausdrücken, und hat dann die identische Gleichung

$$\begin{aligned}\Sigma'\Sigma'' = {} & (\alpha-\varkappa)\,(\alpha-\lambda)\,(\alpha-\mu)\,(\alpha-\nu)\ldots. \\ & \times(\beta-\varkappa)\,(\beta-\lambda)\,(\beta-\mu)\,(\beta-\nu)\ldots. \\ & \times(\gamma-\varkappa)\,(\gamma-\lambda)\,(\gamma-\mu)\,(\gamma-\nu)\ldots. \\ & \times(\delta-\varkappa)\,(\delta-\lambda)\,(\delta-\mu)\,(\delta-\nu)\ldots. \\ & \times\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

welche also auch, wenn zwischen den Wurzeln

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots;\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots.$$

gewisse Relationen Statt finden, z. B. für $\alpha = \varkappa$, noch gültig bleiben muss. Weil dann die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in vorstehender Gleichung verschwindet, so muss unter der gemachten Voraussetzung auch die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, d. h. es muss jederzeit mindestens einer der beiden Factoren des Products $\Sigma'\Sigma''$ für $\alpha = \varkappa$ verschwinden. Nehmen wir nun, um die Begriffe zu fixiren, an, dass dieser für $\alpha = \varkappa$ verschwindende Factor der erste Factor $\Sigma'$ des obigen Products sei, so ist derselbe nach einem bekannten Satze, wenn man ihn als Function von $\alpha$ betrachtet, jederzeit durch $\alpha - \varkappa$ algebraisch ohne Rest theilbar. Auf der andern Seite kann $\Sigma'$ sowohl als eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ p,\ q,$$

als auch als eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten

$$A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q$$

betrachtet werden, und ist folglich sowohl eine ganze rationale

Digitized by Google

algebraische symmetrische Function der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, als auch eine ganze rationale algebraische symmetrische Function der Wurzeln $x, \lambda, \mu, \nu, \ldots$.*). Daher ist $\Sigma$ nicht bloss durch das Binomium $\alpha - x$, sondern durch jedes aus diesem durch Vertauschung von $\alpha$ mit einer der Wurzeln $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ und durch Vertauschung von $x$ mit einer der Wurzeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sich ergebende Binomium algebraisch ohne Rest theilbar. Weil nun aber die Binomien, welche man auf diese Weise erhält, im Allgemeinen sämmtlich unter einander ungleich sind, so muss $\Sigma$ durch das Product aller dieser Binomien, nämlich durch das Product

$$\begin{aligned}
&(\alpha - x)\ (\alpha - \lambda)\ (\alpha - \mu)\ (\alpha - \nu) \ldots . \\
\times &(\beta - x)\ (\beta - \lambda)\ (\beta - \mu)\ (\beta - \nu) \ldots . \\
\times &(\gamma - x)\ (\gamma - \lambda)\ (\gamma - \mu)\ (\gamma - \nu) \ldots . \\
\times &(\delta - x)\ (\delta - \lambda)\ (\delta - \mu)\ (\delta - \nu) \ldots . \\
\times &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d. h. durch die Grösse $\Sigma$, algebraisch ohne Rest theilbar sein, und wir sind also, indem $U$ eine ganze rationale algebraische Function von

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; x, \lambda, \mu, \nu, \ldots .$$

bezeichnet,

$$\Sigma = U\Sigma$$

zu setzen berechtigt. Nach dem Obigen ist aber

$$\Sigma = \Sigma\Sigma',$$

welches in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung zu der Gleichung

$$U\Sigma' = 1$$

führt, aus der, da $U$ und $\Sigma'$ beide ganze rationale algebraische Functionen von

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; x, \lambda, \mu, \nu, \ldots .$$

sind, auf der Stelle ganz unzweideutig hervorgeht, dass $U$ und $\Sigma$ constante Grössen, d. h. von den Wurzeln

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; x, \lambda, \mu, \nu, \ldots .$$

der beiden gegebenen Gleichungen, und folglich auch von deren Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots; A, B, C, D, \ldots .$$

ganz unabhängig sind. Setzt man also

---

*) Jede ganze rationale algebraische Function der Coefficienten einer Gleichung kann nämlich mittelst der aus §. 3. bekannten Formeln des Newton'schen Satzes als eine ganze rationale algebraische Function der Summen der Potenzen der Wurzeln der Gleichung ausgedrückt werden, und ist also offenbar immer eine ganze rationale algebraische symmetrische Function der Wurzeln.



Digitized by Google

$$\Sigma = \Sigma'\Sigma'',$$

so ist der eine der beiden Factoren $\Sigma'$, $\Sigma''$ nach dem Vorhergehenden immer eine constante, d. h. von den Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots; A, B, C, D, \ldots.$$

der beiden gegebenen Gleichungen ganz unabhängige Grösse, wodurch unser Satz nun offenbar vollständig bewiesen ist.

Dieser Satz ist für die Theorie der Elimination jedenfalls, und insbesondere deshalb sehr wichtig, weil durch denselben deutlich nachgewiesen wird, dass man durch die im Obigen gelehrte schöne, die Theorie der symmetrischen Functionen vielfach in Anspruch nehmende Eliminationsmethode die gesuchte Endgleichung in ihrer einfachsten Gestalt, d. h. im Allgemeinen wenigstens, wenn nämlich zwischen den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen gar keine besonderen Relationen Statt finden, frei von allen in ihr enthaltenen fremdartigen Factoren erhält.

Dass dies sich aber nicht mehr behaupten lässt, wenn zwischen den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen besondere Relationen Statt finden, zeigt Cauchy an dem Falle, wenn die beiden Gleichungen des zweiten Grades

$$x^2 + ax + b = 0,\ x^2 + Ax + B = 0$$

gegeben sind, auf folgende Art.

Nach §. 4. ist in diesem Falle

$$\Sigma = (\alpha^2 + A\alpha + B)\ (\beta^2 + A\beta + B).$$

Weil nun aber $\alpha$ und $\beta$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

sind, so hat man die beiden Gleichungen

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0,\ \beta^2 + a\beta + b = 0,$$

aus denen sich

$$\alpha^2 = -a\alpha - b,\ \beta^2 = -a\beta - b,$$

folglich nach dem Obigen

$$\Sigma = \{(A-a)\alpha + B - b\}\ \{(A-a)\beta + B - b\},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$\Sigma = (A-a)\ \{(A-a)\alpha\beta + (B-b)\ (\alpha+\beta)\} + (B-b)^2$$

ergiebt. Weil aber nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha\beta = b,\ \alpha + \beta = -a$$

ist, so ist, wie man nach leichter Entwickelung findet,

$$\Sigma = (A-a)\ (Ab - Ba) + (B-b)^2,$$

und das Resultat der Elimination von $x$ aus den beiden gegebenen Gleichungen ist folglich die Gleichung

$$(A-a)\ (Ab - Ba) + (B-b)^2 = 0.$$

So lange nun zwischen den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen keine besonderen Relationen Statt finden, lässt sich der erste Theil dieser Gleichung nicht in zwei Factoren zerlegen,

Digitized by Google

welche ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen sind. Setzt man aber nur z. B. $a = A = 0$, so dass also

$$x^2 + b = 0,\ x^2 + B = 0$$

die beiden gegebenen Gleichungen sind, so geht die obige Endgleichung in die Gleichung

$$(B - b)^2 = 0$$

über, statt welcher man also einfacher

$$B - b = 0$$

setzen kann.

Um diesen Aufsatz über die Elimination nicht zu sehr auszudehnen, müssen wir hierbei stehen bleiben, verweisen aber weiterer Ausführung wegen auf die Abhandlung Cauchy's, auf welche schon oben in §. 20. Bezug genommen worden ist.

# XXXI.

## Ueber Jacob Bernoulli's Methode, die Höhe der Wolken zu bestimmen.

Von

dem Herausgeber.

### §. 1.

Jacob Bernoulli's Methode, die Höhe der Wolken zu bestimmen (Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera. Genevae. 1744. T. I. p. 336. — Lehrbuch der Meteorologie von L. F. Kämtz. Erster Band. Halle. 1831. S. 383), welche unter allen zu diesem Zweck in Vorschlag gebrachten, nur einen Beobachter erfordernden Verfahrungsarten wohl noch zu den genauesten Resultaten führen dürfte, besteht, wie hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden kann, darin, dass man des Abends nach dem Untergange der Sonne in dem Moment, wo ein Punkt einer Wolke von den Strahlen der Sonne erleuchtet zu werden aufhört, das

Digitized by Google

Azimuth und die Höhe dieses Punktes der Wolke misst *), so wie auch die Zeit der Beobachtung bestimmt, und daraus die Lage des in Rede stehenden Punktes der Wolke im Raume auf dem Wege der Rechnung herleitet. Die von Jacob Bernoulli selbst a. a. O. gegebene Auflösung dieses für die Meteorologie in mehrfacher Beziehung wichtigen Problems **) scheint mir vorzüglich deshalb nicht völlig streng zu sein, weil Bernoulli die Sonne als einen Punkt betrachtet, was offenbar nur bei einer rohern Annäherung zulässig ist, und möchte auch in anderer Beziehung noch Manches zu wünschen übrig lassen, wodurch ich veranlasst worden bin, die folgende Auflösung, welche ich, wenigstens in so fern man auf die Krümmung, welche die von der Sonne zu der Wolke gelangenden Strahlen wegen der Refraction in der Atmosphäre erleiden, keine Rücksicht nimmt ***), für völlig streng halte, aufzusuchen und in dieser Zeitschrift mitzutheilen. Ganz absichtlich habe ich für jetzt eine, aus dem geometrischen Gesichtspunkte betrachtet, völlig strenge Auflösung des in Rede stehenden, auch in rein mathematischer Beziehung mehrfaches Interesse darbietenden Problems zu geben versucht. Dass diese Auflösung nicht ganz einfach ausfallen konnte, scheint in der Natur der Aufgabe zu liegen, wenn man nämlich alle bei derselben in Betracht kommende Umstände gehörig berücksigtigen will. Späterhin hoffe ich in einem besondern Aufsatze auf dieselbe zurückzukommen, um zu untersuchen, ob sich nicht, wenn man sich eine oder die andere nur näherungsweise richtige Voraussetzung gestattet, einfachere, also bei praktischen Anwendungen brauchbarere und bequemere Auflösungen geben lassen. Eben so denke ich dann andere zur Bestimmung der Höhe der Wolken vorgeschlagene Methoden einer genauern Untersuchung zu unterwerfen.

## §. 2.

In dem Moment, wo die Erleuchtung eines Punktes einer Wolke durch die Strahlen der Sonne völlig aufzuhören anfängt, befindet sich derselbe offenbar in der von den Strahlen der Sonne gebildeten, die Sonne und die für jetzt als eine Kugel betrachtete Erde †) einhüllenden Kegelfläche, durch welche der sogenannte Kernschatten der Erde bestimmt wird, und unmittelbar nach dem völligen Aufhören der Erleuchtung tritt der in Rede stehende Punkt der Wolke in den Kernschatten der Erde hinein. Bezeichnen wir nun im Moment der Beobachtung den Mittelpunkt der Erde durch $A$, den Mittelpunkt der Sonne durch $B$, die Spitze der in Rede stehenden einhüllenden Kegelfläche durch $C$, den von den Seiten dieser Kegelfläche mit ihrer Axe an der Spitze eingeschlossenen

*) Wie man auf die Refraction, von welcher die gemessene Höhe afficirt wird, Rücksicht zu nehmen hat, soll am Schlusse dieser Abhandlung gezeigt werden.

**) M. s. Kämtz a. a. O.

***) Die Berücksichtigung dieser Krümmung würde die Kenntniss der Gleichung der Refractionscurve erfordern und jedenfalls in die grösste Weitläuftigkeit führen.

†) Wie auf die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt Rücksicht zu nehmen ist, wird weiter unten gezeigt werden.

Digitized by Google

spitzen Winkel auch durch $C$, und durch $A_1$ und $B_1$ die beiden Punkte, in denen respective die Erde und die Sonne von einer beliebigen Seite der einhüllenden Kegelfläche berührt werden, so haben wir, wie auch ohne Figur, die übrigens grösserer Deutlichkeit wegen ein Jeder sich leicht selbst entwerfen kann, sogleich erhellen wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$AC = \frac{AA_1}{\sin C}, \quad BC = \frac{BB_1}{\sin C};$$

also, weil $AC - BC = -AB$ ist,

$$\frac{AA_1 - BB_1}{\sin C} = -AB.$$

Bezeichnet nun $\varrho$ die aus den Ephemeriden zu entnehmende Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von dem Mittelpunkte der Erde zur Zeit der Beobachtung, und $\Delta$ den ebenfalls aus den Ephemeriden zu entnehmenden, aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser der Sonne zur Zeit der Beobachtung, $r$ aber den Halbmesser der Erde; so ist offenbar $AB = \varrho$, $AA_1 = r$, $BB_1 = \varrho \sin \Delta$, und wir erhalten daher aus der vorher gefundenen Gleichung unmittelbar die Gleichung

$$\frac{r - \varrho \sin \Delta}{\sin C} = -\varrho,$$

aus der sich sogleich

$$1) \quad \sin C = \sin \Delta - \frac{r}{\varrho},$$

oder, wenn man den Hülfswinkel $\Theta$ mittelst der Formel

$$2) \quad \sin \Theta = \frac{r}{\varrho}$$

berechnet,

$$\sin C = \sin \Delta - \sin \Theta,$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$3) \quad \sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta - \Theta) \cos \tfrac{1}{2}(\Delta + \Theta)$$

ergiebt, mittelst welcher Ausdrücke der für das Folgende wichtige Winkel $C$ ohne Schwierigkeit berechnet werden kann.

Hat man aber den Winkel $C$, so findet man die Entfernungen $AC$ und $BC$ der Spitze der einhüllenden Kegelfläche von den Mittelpunkten der Erde und der Sonne leicht mittelst der folgenden aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$4) \quad AC = \frac{r}{\sin C}, \quad BC = \frac{\varrho \sin \Delta}{\sin C}.$$

## §. 3.

Wir wollen jetzt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $xyz$ annehmen, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde sein soll. Die Ebene der $xy$ sei die Ebene des Aequators; der positive Theil der Axe der $x$ sei nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet, der positive Theil der Axe der $y$ aber werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den

Digitized by Google

rechten Winkel ($xy$) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der $x$ an die Rectascensionen von 0 bis 360° gezählt werden, so dass also der positive Theil der Axe der $y$ durch den neunzigsten Grad der Rectascensionen geht; der positive Theil der Axe der $z$ endlich liege auf der nördlichen Seite der Ebene des Aequators oder der Ebene der $xy$. In diesem Coordinatensysteme sind, wenn $\alpha$ und $\delta$ die aus den Ephemeriden zu entnehmende Rectascension und Declination der Sonne zur Zeit der Beobachtung bezeichnen, und das Symbol $\varrho$ die ihm im vorigen Paragraphen beigelegte Bedeutung behält, offenbar

$$\varrho \cos \alpha \cos \delta,$$

$$\varrho \sin \alpha \cos \delta,$$

$$\varrho \sin \delta$$

die Coordinaten der Sonne zur Zeit der Beobachtung.

Sind nun überhaupt

$$x = Mz, \; y = Nz$$

die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der Sonne und der Erde gezogenen geraden Linie zur Zeit der Beobachtung; so hat man zur Bestimmung der Constanten $M$ und $N$ offenbar die beiden Gleichungen

$$\varrho \cos \alpha \cos \delta = M\varrho \sin \delta,$$

$$\varrho \sin \alpha \cos \delta = N\varrho \sin \delta;$$

aus denen sich

$$M = \cos \alpha \cot \delta, \; N = \sin \alpha \cot \delta$$

ergiebt, und die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der Erde und der Sonne gezogenen geraden Linie zur Zeit der Beobachtung im Systeme der $xyz$ sind also nach dem Vorhergehenden

$$5) \quad x = z \cos \alpha \cot \delta, \; y = z \sin \alpha \cot \delta.$$

Die Coordinaten der Spitze $C$ der einhüllenden Kegelfläche zur Zeit der Beobachtung seien $f$, $g$, $h$, und $E$ sei die aus dem vorigen Paragraphen bekannte Entfernung dieser Spitze vom Mittelpunkte der Erde; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$f^2 + g^2 + h^2 = E^2,$$

und nach den Gleichungen 5) hat man, weil die in Rede stehende Spitze jederzeit in der durch die Mittelpunkte der Erde und der Sonne gehenden geraden Linie liegt, die beiden Gleichungen

$$f = h \cos \alpha \cot \delta, \; g = h \sin \alpha \cot \delta.$$

Führt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$(1 + \cos \alpha^2 \cot \delta^2 + \sin \alpha^2 \cot \delta^2) h^2 = E^2,$$

also

$$(1 + \cot \delta^2) h^2 = h^2 \operatorname{cosec} \delta^2 = E^2,$$

und folglich

Digitized by Google

$$h = \pm E \sin \delta,$$

wo sich nun noch frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, worüber leicht auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung gegeben werden kann.

Bezeichnen wir die dritte Coordinate der Sonne zur Zeit der Beobachtung durch $Z$, so ist nach dem Obigen

$$Z = \varrho \sin \delta,$$

und folglich

$$\frac{h}{Z} = \pm \frac{E}{\varrho}.$$

Weil nun aber, wie sogleich in die Augen fallen wird, $h$ und $Z$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, und $\frac{E}{\varrho}$ stets positiv ist, so kann bloss

$$\frac{h}{Z} = -\frac{E}{\varrho}$$

sein, d. h. man muss in der Gleichung

$$h = \pm E \sin \delta$$

das untere Vorzeichen nehmen, oder

$$h = -E \sin \delta$$

setzen.

Verbindet man diese Gleichung mit den oben gefundenen Gleichungen

$$f = h \cos \alpha \cot \delta, \; g = h \sin \alpha \cot \delta;$$

so erhält man:

$$6. \begin{cases} f = -E \cos \alpha \cos \delta, \\ g = -E \sin \alpha \cos \delta, \\ h = -E \sin \delta; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $f$, $g$, $h$ der Spitze der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der $xyz$ sehr leicht berechnet werden können.

Hiernach kann nun die Gleichung der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der $xyz$ leicht auf folgende Art gefunden werden. Weil jede Seite der Kegelfläche durch ihre Spitze geht, so sind nach dem Vorhergehenden und den Principien der analytischen Geometrie die allgemeinen Gleichungen einer jeden Seite

$$x - f = K(z - h),$$
$$y - g = L(z - h)$$

oder

$$\frac{x - f}{z - h} = K, \; \frac{y - g}{z - h} = L.$$

Die Gleichungen der Axe der Kegelfläche sind nach 5)

$$x = z \cos \alpha \cot \delta, \; y = z \sin \alpha \cot \delta,$$

Digitized by Google

und weil die Spitze in der Axe liegt, so ist

$$f = h \cos \alpha \cot \delta,\ g = h \sin \alpha \cot \delta;$$

also ist

$$\frac{x}{f} = \frac{z}{h},\ \frac{y}{g} = \frac{z}{h};$$

oder

$$x = \frac{f}{h} z,\ y = \frac{g}{h} z$$

sind die Gleichungen der Axe der Kegelfläche. Weil nun jede Seite der Kegelfläche mit der Axe den aus dem Obigen bekannten Winkel $C$ einschliesst, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos C^2 = \frac{(1 + \frac{f}{h} \cdot \frac{x-f}{z-h} + \frac{g}{h} \cdot \frac{y-g}{z-h})^2}{(1 + \frac{f^2}{h^2} + \frac{g^2}{h^2}) \{1 + (\frac{x-f}{z-h})^2 + (\frac{y-h}{z-h})^2\}},$$

oder

$$\cos C^2 = \frac{\{f(x-f) + g(y-g) + h(z-h)\}^2}{(f^2 + g^2 + h^2) \{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\}},$$

oder

$$\cos C^2 = \frac{\{f(x-f) + g(y-g) + h(z-h)\}^2}{E^2 \{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\}},$$

d. h.

$$7)\ E^2 \{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\} \cos C^2 = \{f(x-f) + g(y-h) + h(z-h)\}^2$$

die Gleichung der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der $xyz$, mit deren Transformation und etwaigen Vereinfachung wir uns jetzt nicht weiter beschäftigen wollen.

## §. 4.

Der Kürze wegen, und um die Begriffe besser zu fixiren, wollen wir im Folgenden annehmen, dass der Beobachtungsort in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liege, wodurch der Allgemeinheit der Auflösung offenbar kein Eintrag geschehen wird. Um ferner, so viel es hier thunlich ist, auf die Abweichung der Gestalt der Erde von der Kugelgestalt Rücksicht zu nehmen, werden wir von jetzt an unter $r$ immer den nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser verstehen, und werden späterhin noch besonders zeigen, wie die Grösse dieses Halbmessers der Erde auf die einfachste Weise berechnet werden kann. Die sogenannte geocentrische Breite des Beobachtungsorts, d. h. den neunzig Grade nicht übersteigenden Neigungswinkel des nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers gegen die Ebene des Aequators, wollen wir durch $\varphi$ bezeichnen, und durch $T$ soll die in Stunden ausge-

Digitized by Google

drückte Sternzeit der Beobachtung *) bezeichnet werden. Dies vorausgesetzt sind, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$r \cos 15T \cos \varphi,$$

$$r \sin 15T \cos \varphi,$$

$$r \sin \varphi$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Systeme der $xyz$ zur Zeit der Beobachtung.

Legt man nun durch den Beobachtungsort als Anfang ein dem Systeme der $xyz$ paralleles Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$, so hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$8) \begin{cases} x = r \cos 15T \cos \varphi + x_1, \\ y = r \sin 15T \cos \varphi + y_1, \\ z = r \sin \varphi + z_1. \end{cases}$$

Ferner lege man durch den Beobachtungsort als Anfang ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_2 y_2 z_2$. Die Ebene der $x_2 y_2$ soll mit der Ebene der $x_1 y_1$ zusammenfallen. Der positive Theil der Axe der $x_2$ sei der in der südlichen Hälfte des Meridians liegende Halbmesser des Kreises, in welchem die Sphäre von der Ebene der $x_2 y_2$ geschnitten wird; der positive Theil der Axe der $y_2$ werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x_2$ durch den rechten Winkel $(x_2 y_2)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_2$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x_1$ durch den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_1$ zu gelangen; der positive Theil der Axe der $z_2$ falle mit dem positiven Theile der Axe der $z_1$ zusammen. Dies vorausgesetzt, hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$9) \begin{cases} x_1 = x_2 \cos 15T - y_2 \sin 15T, \\ y_1 = x_2 \sin 15T + y_2 \cos 15T, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Endlich lege man durch den Beobachtungsort als Anfang noch ein drittes rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_3 y_3 z_3$. Die Ebene der $x_3 y_3$ sei die Ebene des Horizonts des Beobachtungsorts. Der positive Theil der Axe der $x_3$ sei der in der südlichen Hälfte des Meridians liegende Halbmesser des Horizonts; der positive Theil der Axe der $y_3$ werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x_3$ an durch den rechten Winkel $(x_3 y_3)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_3$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem in der südlichen Hälfte des Meridians liegenden Halbmesser des Horizonts an die Azimuthe von 0 bis 360° gezählt werden, wobei wir zugleich festsetzen wollen, dass die Azimuthe von dem in Rede stehenden Halbmesser des Horizonts an nach

*) Natürlich Zeit des Beobachtungsorts.

Digitized by Google

Osten hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen; der positive Theil der Axe der $z_2$ sei vom Beobachtungsorte nach seinem Zenith hingerichtet. Dies vorausgesetzt ist nun, wenn wir die Polhöhe des Beobachtungsorts durch $\omega$, und die von den positiven Theilen der Axen der $x_2y_2z_2$ und $x_1y_1z_1$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel auf die aus der analytischen Geometrie hinreichend bekannte Weise bezeichnen, wie mittelst einer einfachen Betrachtung leicht erhellen wird:

$$(x_2x_1) = 90° - \omega, \quad (x_2y_1) = 90°, \quad (x_2z_1) = \omega;$$
$$(y_2x_1) = 90°, \quad (y_2y_1) = 0, \quad (y_2z_1) = 90°;$$
$$(z_2x_1) = 180° - \omega, \quad (z_2y_1) = 90°, \quad (z_2z_1) = 90° - \omega;$$

und folglich nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$10) \begin{cases} x_2 = x_1 \sin\omega + z_1 \cos\omega, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = -x_1 \cos\omega + z_1 \sin\omega. \end{cases}$$

Wir wollen nun mittelst der im Vorhergehenden gefundenen Gleichungen $x_1y_1z_1$ durch $xyz$ ausdrücken. Nach 10) ist zuvörderst, wie leicht erhellet,

$$x_1 = x_2 \sin\omega - z_2 \cos\omega,$$
$$y_1 = y_2,$$
$$z_1 = x_2 \cos\omega + z_2 \sin\omega.$$

Nach 9) ist aber, wie man eben so leicht findet,

$$x_2 = \quad x_1 \cos 15T + y_1 \sin 15T,$$
$$y_2 = -x_1 \sin 15T + y_1 \cos 15T,$$
$$z_2 = z_1;$$

und folglich wegen des Vorhergehenden

$$x_1 = \quad x_1 \sin\omega \cos 15T + y_1 \sin\omega \sin 15T - z_1 \cos\omega,$$
$$y_1 = -x_1 \sin 15T + y_1 \cos 15T,$$
$$z_1 = \quad x_1 \cos\omega \cos 15T + y_1 \cos\omega \sin 15T + z_1 \sin\omega.$$

Endlich ist nach 8)

$$x_1 = -r \cos\varphi \cos 15T + x,$$
$$y_1 = -r \cos\varphi \sin 15T + y,$$
$$z_1 = -r \sin\varphi + z;$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$x_2 = -r \cos\varphi \sin\omega \cos 15T^2 + x \sin\omega \cos 15T$$
$$\quad -r \cos\varphi \sin\omega \sin 15T^2 + y \sin\omega \sin 15T$$
$$\quad +r \sin\varphi \cos\omega \quad - z \cos\omega,$$
$$y_2 = \quad r \cos\varphi \sin 15T \cos 15T - x \sin 15T$$
$$\quad -r \cos\varphi \sin 15T \cos 15T + y \cos 15T,$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned} x_1 = &-r\cos\varphi\cos\omega\cos 15T^0 + x\cos\omega\cos 15T \\ &-r\cos\varphi\cos\omega\sin 15T^0 + y\cos\omega\sin 15T \\ &-r\sin\varphi\sin\omega \qquad\qquad + z\sin\omega; \end{aligned}$$

also, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Formeln leicht findet:

$$11)\quad \begin{cases} x_1 = & r\sin(\varphi-\omega) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega, \\ y_1 = & -x\sin 15T + y\cos 15T, \\ z_1 = & -r\cos(\varphi-\omega) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega; \end{cases}$$

oder auch, etwas grösserer Symmetrie wegen:

$$12)\quad \begin{cases} x_1 = & -r\sin(\omega-\varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega, \\ y_1 = & -x\sin 15T + y\cos 15T, \\ z_1 = & -r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega. \end{cases}$$

Das Azimuth und die Höhe der Wolke seien $\lambda$ und $\mu$, so sind, wie leicht erhellen wird, die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1 y_1 z_1$

$$13)\quad x_1 = z_1\cos\lambda\cot\mu,\ y_1 = z_1\sin\lambda\cot\mu;$$

und die Gleichungen dieser Linie im Systeme der $xyz$ sind folglich nach 12)

$$\begin{aligned} &-r\sin(\omega-\varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega \\ &= \{-r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T, \\ &\qquad + z\sin\omega\}\cos\lambda\cot\mu, \\ &\qquad -x\sin 15T + y\cos 15T \\ &= \{-r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T \\ &\qquad + z\sin\omega\}\sin\lambda\cot\mu; \end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} &\cos 15T(\sin\omega - \cos\omega\cos\lambda\cot\mu)x \\ &+\sin 15T(\sin\omega - \cos\omega\cos\lambda\cot\mu)y \\ &-(\cos\omega + \sin\omega\cos\lambda\cot\mu)z \\ &= r\{\sin(\omega-\varphi) - \cos(\omega-\varphi)\cos\lambda\cot\mu\}, \\ &-(\sin 15T + \cos 15T\cos\omega\sin\lambda\cot\mu)x \\ &+(\cos 15T - \sin 15T\cos\omega\sin\lambda\cot\mu)y \\ &-z\sin\omega\sin\lambda\cot\mu \\ &= -r\cos(\omega-\varphi)\sin\lambda\cot\mu. \end{aligned}$$

Berechnet man zwei Hülfswinkel $F$ und $G$ mittelst der Formeln

$$14)\quad \begin{cases} \text{tang } F = \cos\lambda\cot\mu, \\ \text{tang } G = \cos\omega\sin\lambda\cot\mu; \end{cases}$$

so erhalten die vorhergehenden Gleichungen der von dem Beobach-

Digitized by Google

tungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie im Systeme der $xyz$ die folgende Gestalt:

$$\frac{\cos 15T \sin(\omega - F)}{\cos F} x + \frac{\sin 15T \sin(\omega - F)}{\cos F} y - \frac{\cos(\omega - F)}{\cos F} z = r \frac{\sin(\omega - \varphi - F)}{\cos F},$$

$$\frac{\sin(15T + G)}{\cos G} x - \frac{\cos(15T + G)}{\cos G} y + z \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} G = r \frac{\cos(\omega - \varphi) \operatorname{tang} G}{\cos \omega};$$

oder

$$15) \begin{cases} x \cos 15T \sin(\omega - F) + y \sin 15T \sin(\omega - F) - z \cos(\omega - F) = r \sin(\omega - \varphi - F), \\ x \cos \omega \sin(15T + G) - y \cos \omega \cos(15T + G) + z \sin \omega \sin G = r \cos(\omega - \varphi) \sin G. \end{cases}$$

Unter dieser Form kann man die beiden Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie sehr leicht numerisch entwickeln.

## §. 5.

Der Ort der Wolke im Raume wird offenbar durch die Punkte bestimmt, in denen die einhüllende Kegelfläche von der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie geschnitten wird, und wir haben also, wenn durch $x$, $y$, $z$ die Coordinaten der Wolke in dem Systeme der $xyz$ bezeichnet werden, nach 7) und 15) die drei folgenden Gleichungen zur Bestimmung der in Rede stehenden Coordinaten:

$$16) \begin{cases} E^2\{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\} \cos C^2 = \{f(x-f) + g(y-g) + h(z-h)\}^2, \\ x \cos 15T \sin(\omega - F) + y \sin 15T \sin(\omega - F) - z \cos(\omega - F) = r \sin(\omega - \varphi - F), \\ x \cos \omega \sin(15T + G) - y \cos \omega \cos(15T + G) + z \sin \omega \sin G = r \cos(\omega - \varphi) \sin G. \end{cases}$$

Setzt man

$$17) \begin{cases} H = -f \cos 15T \sin(\omega - F) - g \sin 15T \sin(\omega - F) + h \cos(\omega - F), \\ K = -f \cos \omega \sin(15T + G) + g \cos \omega \cos(15T + G) - h \sin \omega \sin G; \end{cases}$$

so können die vorhergehenden Gleichungen auch unter der folgenden Form geschrieben werden:

Digitized by Google

$$18)\begin{cases} E^2\{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\}\cos C^2 \\ \qquad = \{f(x-f)+g(y-g)+h(z-h)\}^2, \\ (x-f)\cos 15T\sin(\omega-F)+(y-g)\sin 15T\sin(\omega-F) \\ \qquad -(z-h)\cos(\omega-F) \\ \qquad = H+r\sin(\omega-\varphi-F), \\ (x-f)\cos\omega\sin(15T+G)-(y-g)\cos\omega\cos(15T+G) \\ \qquad +(z-h)\sin\omega\sin G \\ \qquad = K+r\cos(\omega-\varphi)\sin G; \end{cases}$$

und dienen unter dieser Form zur Bestimmung der Grössen $x-f$, $y-g$, $z-h$, aus denen sich dann auch leicht die Coordinaten $x$, $y$, $z$ selbst ergeben.

Dass man sowohl bei dem Gebrauche der Gleichungen 16), als auch wenn man sich der Gleichungen 18) bedient, auf eine quadratische Gleichung geführt wird, und dass es also im Allgemeinen zwei Systeme von Werthen der Coordinaten $x$, $y$, $z$ giebt, fällt auf der Stelle in die Augen, so wie denn auch in der That die einhüllende Kegelfläche von der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie im Allgemeinen jederzeit in zwei Punkten geschnitten wird. Dass der eine dieser beiden Punkte immer über, der andere unter dem Horizonte des Beobachtungsorts liegt, erhellet auf der Stelle durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung, und es ist uns also hierin zugleich ein Criterium gegeben, durch das entschieden werden kann, welches der beiden Systeme von Werthen der Coordinaten $x$, $y$, $z$ für die Coordinaten der Wolke zu nehmen ist, da die beobachtete Wolke natürlich immer über dem Horizonte des Beobachtungsorts liegt. Um das in Rede stehende Criterium anwenden zu können, muss man mittelst der Formeln 12) aus den gefundenen Werthen der Coordinaten $x$, $y$, $z$ die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ der Wolke in dem Systeme der $x_1y_1z_1$ berechnen, durch welche zugleich die Lage der Wolke gegen den Horizont und Meridian des Beobachters bestimmt wird. Immer aber hat man das System von Werthen der $x$, $y$, $z$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ als die Coordinaten der Wolke zu betrachten, welchem ein positiver Werth von $z_1$ entspricht, wodurch man die Lage der Wolke im Raume immer mit völliger Sicherheit zu bestimmen im Stande ist.

Hat man $x$, $y$, $z$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ gefunden, so kann man auch die Entfernungen $R$ und $R_1$ der Wolke von dem Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte mittelst der aus der analytischen Geometrie bekannten Formeln

$$19)\ R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

und

$$20)\ R_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

berechnen.

Die Berechnung von $R$ kann man sich auf folgende Art erleichtern. Man setze, was offenbar verstattet ist, indem $\xi$ und $\chi$ zwei Hülfswinkel bezeichnen,

Digitized by Google

$$x = R \cos \xi \cos \chi,$$
$$y = R \sin \xi \cos \chi,$$
$$z = R \sin \chi;$$

so ist

$$\text{tang } \xi = \frac{y}{x},$$

mittelst welcher Formel man $\xi$ leicht finden kann. Hat man aber $\xi$, so ergiebt sich $\chi$ mittelst einer der folgenden Formeln:

$$\text{tang } \chi = \frac{z}{x} \cos \xi, \quad \text{tang } \chi = \frac{z}{y} \sin \xi.$$

Die Entfernung $R$ findet man hierauf mittelst eines der folgenden Ausdrücke:

$$R = \frac{x}{\cos \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{y}{\sin \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{z}{\sin \chi}.$$

Die Uebereinstimmung der durch diese verschiedenen Formeln gefundenen Resultate mit einander ist ein Criterium für die Richtigkeit der geführten Rechnung. Ueberhaupt sind also die zur Berechnung von $R$ erforderlichen Ausdrücke:

$$21) \quad \begin{cases} \text{tang } \xi = \frac{y}{x}; \\ \text{tang } \chi = \frac{z}{x} \cos \xi, \quad \text{tang } \chi = \frac{z}{y} \sin \xi; \\ R = \frac{x}{\cos \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{y}{\sin \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{z}{\sin \chi}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Art kann man

$$x_1 = R_1 \cos \xi_1 \cos \chi_1,$$
$$y_1 = R_1 \sin \xi_1 \cos \chi_1,$$
$$z_1 = R_1 \sin \chi_1$$

setzen, und hat dann zur Berechnung von $R_1$ die folgenden Formeln:

$$22) \quad \begin{cases} \text{tang } \xi_1 = \frac{y_1}{x_1}; \\ \text{tang } \chi_1 = \frac{z_1}{x_1} \cos \xi_1, \quad \text{tang } \chi_1 = \frac{z_1}{y_1} \sin \xi_1; \\ R_1 = \frac{x_1}{\cos \xi_1 \cos \chi_1}, \quad R_1 = \frac{y_1}{\sin \xi_1 \cos \chi_1}, \quad R_1 = \frac{z_1}{\sin \chi_1}. \end{cases}$$

## §. 6.

Die meiste Schwierigkeit macht natürlich die Auflösung der drei Gleichungen 16) oder 18), wobei man sich indess, wie es mir scheint, zweckmässig auf folgende Art verhalten kann.

Zuvörderst setze man der Kürze wegen

Digitized by Google

$$23)\begin{cases}\mathfrak{A}=\cos 15T\sin(\omega-F)\\ \mathfrak{B}=\sin 15T\sin(\omega-F)\\ \mathfrak{C}=-\cos(\omega-F)\\ \mathfrak{D}=H+r\sin(\omega-\varphi-F)\end{cases}$$

und

$$24)\begin{cases}\mathfrak{A}'=\cos\omega\sin(15T+G)\\ \mathfrak{B}'=-\cos\omega\cos(15T+G)\\ \mathfrak{C}'=\sin\omega\sin G\\ \mathfrak{D}'=K+r\cos(\omega-\varphi)\sin G.\end{cases}$$

Dann erhalten die Gleichungen 18) folgende Gestalt:

$$25)\begin{cases}E^2\{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\}\cos C^2\\ \qquad=\{f(x-f)+g(y-g)+h(z-h)\}^2\\ \mathfrak{A}(x-f)+\mathfrak{B}(y-g)+\mathfrak{C}(z-h)=\mathfrak{D}\\ \mathfrak{A}'(x-f)+\mathfrak{B}'(y-g)+\mathfrak{C}'(z-h)=\mathfrak{D}'.\end{cases}$$

Setzen wir nun aber

$$26)\begin{cases}x-f=P\cos U\cos V\\ y-g=P\sin U\cos V\\ z-h=P\sin V\end{cases}$$

so nehmen die vorstehenden Gleichungen, wie man leicht findet, folgende Gestalt an:

$$27)\begin{cases}f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=\pm E\cos C\\ (\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V)P=\mathfrak{D}\\ (\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V)P=\mathfrak{D}'\end{cases}$$

und aus diesen drei Gleichungen müssen die Grössen $P$, $U$, $V$ bestimmt werden.

Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt

$$28)\begin{cases}P=\dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V},\\ P=\dfrac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}.\end{cases}$$

Also ist

$$\frac{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}'},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$29)\begin{cases}\mathfrak{F}=\mathfrak{A}\mathfrak{D}'-\mathfrak{A}'\mathfrak{D}\\ \mathfrak{G}=\mathfrak{B}\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}'\mathfrak{D}\\ \mathfrak{H}=\mathfrak{C}\mathfrak{D}'-\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\end{cases}$$

setzen,

$$\mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0;$$



Digitized by Google

und wir haben also jetzt zwischen den beiden Grössen $U$ und $V$ die zwei folgenden Gleichungen:

$$30)\begin{cases} f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=\pm E\cos C, \\ \mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0; \end{cases}$$

aus denen die beiden Grössen $U$ und $V$ bestimmt werden müssen. Hat man $U$ und $V$, so findet man $P$ mittelst einer der beiden Formeln 28).

Setzen wir der Kürze wegen

$$31)\quad i=\pm E\cos C,$$

so werden die beiden vorhergehenden Gleichungen

$$32)\begin{cases} f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=i, \\ \mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle

$$\frac{f\cos U+g\sin U}{\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U}=-\frac{i-h\sin V}{\mathfrak{H}\sin V},$$

und hieraus

$$33)\quad \sin V=-\frac{i(\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 32)

$$(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U\cos V+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U\cos V=i\mathfrak{H},$$

und hieraus

$$34)\quad \cos V=\frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 33) und 34) erhält man aber augenblicklich die bloss noch die eine unbekannte Grösse $U$ enthaltende Gleichung

$$35)\qquad i^2\{\mathfrak{H}^2+(\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U)^2\} = \{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U\}^2,$$

aus welcher also $U$ bestimmt werden muss. Hat man aber $U$, so findet man $V$ mittelst einer der beiden Gleichungen 33) und 34), oder besser mittelst der aus denselben sich unmittelbar ergebenden Gleichung

$$36)\quad \operatorname{tang} V=-\frac{\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U}{\mathfrak{H}},$$

die man auch unter der für die Rechnung bequemeren Form

$$37)\quad \operatorname{tang} V=-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\cos U-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}\sin U$$

schreiben kann.

Vorzüglich kommt es nun auf die Bestimmung der Grösse $U$ aus der Gleichung 35) an. Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

Digitized by Google

$$38)\quad 0 = i^2\mathfrak{H}^2 + \{i^2\mathfrak{F}^2 - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})^2\}\cos U^2 + \{i^2\mathfrak{G}^2 - (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})^2\}\sin U^2 + 2\{i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G} - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})(g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\}\sin U\cos U,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$39)\quad \begin{cases} \mathfrak{K} = i^2\mathfrak{H}^2, \\ \mathfrak{L} = i^2\mathfrak{F}^2 - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})^2, \\ \mathfrak{M} = i^2\mathfrak{G}^2 - (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})^2, \\ \mathfrak{N} = i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G} - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})(g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G}) \end{cases}$$

gesetzt wird, auf die Form

$$40)\quad \mathfrak{K} + \mathfrak{L}\cos U^2 + \mathfrak{M}\sin U^2 + 2\mathfrak{N}\sin U\cos U = 0.$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos U^2 = \frac{1 + \cos 2U}{2},$$

$$\sin U^2 = \frac{1 - \cos 2U}{2},$$

$$2\sin U\cos U = \sin 2U;$$

und die obige Gleichung kann daher auf die Form

$$41)\quad 2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + (\mathfrak{L} - \mathfrak{M})\cos 2U + 2\mathfrak{N}\sin 2U = 0$$

gebracht werden. Um aus dieser Gleichung $U$ zu bestimmen, berechne man den Hülfswinkel $W$ mittelst der Formel

$$42)\quad \text{tang } W = \frac{\mathfrak{L} - \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}},$$

so ist nach 41)

$$\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}} + \text{tang } W\cos 2U + \sin 2U = 0,$$

d. i.

$$\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}} + \frac{\sin(W + 2U)}{\cos W} = 0,$$

und folglich

$$43)\quad \sin(W + 2U) = -\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}}\cos W,$$

mittelst welcher Formel $U$ gefunden werden kann, so dass also jetzt unsere Aufgabe als vollständig aufgelöst zu betrachten ist, obgleich über dieselbe noch verschiedene Bemerkungen zu machen sind, auf welche wir jedoch erst weiter unten kommen werden.

## §. 7.

Zunächst kommt es jetzt, wobei §. 4. zu vergleichen ist, noch darauf an, dass wir zeigen, wie aus der gegebenen Polhöhe $\omega$ des Beobachtungsorts dessen geocentrische Breite $\varphi$, oder umgekehrt aus der geocentrischen Breite $\varphi$ die Polhöhe $\omega$, und wie sodann



Digitized by Google

aus $\omega$ und $\varphi$ der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser $r$ gefunden werden kann.

Zu dem Ende nehmen wir die durch den Beobachtungsort und die Erdaxe gelegte Meridianebene als Ebene der rechtwinkligen $XY$ und den Mittelpunkt der Erde als Anfang dieser Coordinaten an. Die Axe der $X$ soll die Durchschnittslinie der Ebene der $XY$ mit der Ebene des Erdäquators, und die Axe der $Y$ soll die Erdaxe sein. Die positiven Theile der Axen der $X$ und $Y$ sollen, was offenbar verstattet ist, so angenommen werden, dass die Coordinaten des Beobachtungsorts in diesem Systeme, welche wir im Folgenden durch die Symbole $X$ und $Y$ selbst bezeichnen wollen, beide positiv werden. Dies vorausgesetzt haben wir, wenn der Halbmesser des Aequators der Erde und die halbe Erdaxe respective durch $a$ und $b$ bezeichnet werden, zuvörderst die folgende Gleichung:

$$44)\quad \left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ferner ist die Gleichung der durch den Beobachtungsort auf seinen elliptischen Meridian gezogenen Normale nach den Principien der höhern Geometrie

$$45)\quad \mathfrak{Y} - Y = -\frac{dX}{dY}(\mathfrak{X} - X),$$

wo die veränderlichen oder sogenannten laufenden Coordinaten in dem angenommenen Systeme durch die deutschen Buchstaben $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bezeichnet worden sind, und der Differentialquotient $\frac{dX}{dY}$ aus der Gleichung 44) entwickelt werden muss. Weil nun bekanntlich die Polhöhe $\omega$ der neunzig Grade nicht übersteigende Neigungswinkel der durch den Beobachtungsort gelegten Normale des Erdsphäroids gegen die Ebene des Erdäquators ist, und die Coordinaten $X$, $Y$ nach der oben gemachten Voraussetzung beide positiv sind; so ist nach der aus der analytischen Geometrie bekannte Theorie der geraden Linie in der Ebene offenbar

$$46)\quad \text{tang}\,\omega = -\frac{dX}{dY}.$$

Ferner ist aber, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$47)\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{Y}{X},$$

und nach den Gleichungen 46) und 47) haben wir daher die Relation

$$48)\quad \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\omega} = -\frac{Y}{X}\cdot\frac{dY}{dX}.$$

Differentiiren wir nun die Gleichung 44), so erhalten wir

$$-\frac{Y}{X}\cdot\frac{dY}{dX} = \frac{b^2}{a^2},$$

und folglich nach 48)

$$49)\quad \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\omega} = \frac{b^2}{a^2};$$

Digitized by Google

also

$$50)\ \text{tang}\ \varphi = \frac{b^2}{a^2}\ \text{tang}\ \omega,\ \text{tang}\ \omega = \frac{a^2}{b^2}\ \text{tang}\ \varphi;$$

oder, wenn man die sogenannte Abplattung

$$\frac{a-b}{a} = n,\ \text{also}\ \frac{b}{a} = 1-n$$

setzt,

$$51)\ \text{tang}\ \varphi = (1-n)^2\ \text{tang}\ \omega,\ \text{tang}\ \omega = \frac{\text{tang}\ \varphi}{(1-n)^2}.$$

Der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdradius $r$ kann nun aber auf folgende Art gefunden werden. Weil nach 47)

$$Y = X\ \text{tang}\ \varphi$$

ist, so ist nach 44)

$$(\frac{X}{a})^2 + (\frac{X\ \text{tang}\ \varphi}{b})^2 = 1,$$

und folglich

$$X^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\ \text{tang}\ \varphi^2 + b^2}\ \text{oder}\ X^2 = \frac{a^2b^2\ \cos\varphi^2}{a^2\ \sin\varphi^2 + b^2\ \cos\varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = X^2 + Y^2 = X^2(1 + \text{tang}\ \varphi^2) = X^2\ \sec\varphi^2.$$

Also ist

$$52)\ r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\ \sin\varphi^2 + b^2\ \cos\varphi^2},\ r = \frac{ab}{\sqrt{a^2\ \sin\varphi^2 + b^2\ \cos\varphi^2}}.$$

Auch ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\ \sin\varphi^2}.$$

Nach 49) ist aber

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\text{tang}\ \omega}{\text{tang}\ \varphi} = \frac{\sin\omega\ \cos\varphi}{\cos\omega\ \sin\varphi},$$

und folglich

$$\cos\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\ \sin\varphi^2 = \frac{\cos\varphi}{\cos\omega}\ (\cos\omega\ \cos\varphi + \sin\omega\ \sin\varphi),$$

d. i.

$$\cos\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\ \sin\varphi^2 = \frac{\cos\varphi}{\cos\omega}\ \cos(\omega - \varphi).$$

Also ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$53)\ r = a\sqrt{\frac{\cos\omega}{\cos(\omega-\varphi)\ \cos\varphi}},$$

mittelst welcher Formel der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser $r$ immer sehr leicht mit Hülfe der Logaritmen aus

Digitized by Google

dem Halbmesser $a$ des Aequators und aus $\omega$ und $\varphi$ berechnet werden kann.

## §. 8.

Besserer Uebersichtlichkeit des Ganges der Rechnung wegen wollen wir nun noch die sämmtlichen Formeln, welche man bei der Ausführung der Rechnung in Anwendung zu bringen hat, hier zusammenstellen, welches auch deshalb nothwendig ist, weil wir zu der obigen Auflösung noch einige nicht unwichtige Bemerkungen zu machen haben.

Als gegeben werden die folgenden Grössen angenommen:

Der Halbmesser des Aequators der Erde $= a$.
Die halbe Erdaxe $= b$.
Die Polhöhe des Beobachtungsorts $= \omega$.
Das Azimuth der Wolke $= \lambda$.
Die Höhe der Wolke $= \mu$.
Die in Stunden ausgedrückte Sternzeit der Beobachtung $= T$.

Ausserdem muss auch noch die geographische Länge des Beobachtungsorts wenigstens näherungsweise bekannt sein, damit man aus den Ephemeriden mit der erforderlichen Schärfe für den Zeitpunkt der Beobachtung mittelst der bekannten Interpolationsmethoden die Rectascension $\alpha$ und die Declination $\delta$ der Sonne, ihren aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser $\Delta$, und ihre Entfernung $\varrho$ von dem Mittelpunkte der Erde berechnen kann.

Nun berechne man zuerst die geocentrische Breite $\varphi$ des Beobachtungsorts mittelst der Formel

$$\text{tang } \varphi = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } \omega,$$

oder mit Hülfe der Abplattung

$$n = \frac{a-b}{a}$$

mittelst der Formel

$$\text{tang } \varphi = (1-n)^2 \text{ tang } \omega.$$

Hierauf suche man den nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdradius $r$ mittelst der Formel

$$r = a\sqrt{\frac{\cos\omega}{\cos(\omega-\varphi)\cos\varphi}}.$$

Dann berechne man den Hülfswinkel $\Theta$ mittelst der Formel

$$\sin\Theta = \frac{r}{\varrho},$$

und hierauf den Winkel $C$ und die Entfernung $E$ mittelst der Formeln

$$\sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta-\Theta) \cos \tfrac{1}{2}(\Delta+\Theta)$$

und

$$E = \frac{r}{\sin C}$$

Digitized by Google

Hätte man in Folge der Einrichtung der Ephemeriden aus denselben nicht die Entfernung $\varrho$ der Sonne von dem Mittelpunkte der Erde, sondern die sogenannte Horizontalparallaxe $\Pi$ der Sonne unter dem Aequator genommen, so wäre

$$\sin \Pi = \frac{a}{\varrho}, \text{ also } \varrho = \frac{a}{\sin \Pi},$$

und folglich der Hülfswinkel $\Theta$ mittelst der Formel

$$\sin \Theta = \frac{r}{a} \sin \Pi$$

zu berechnen.

Nun berechne man zunächst die Coordinaten $f$, $g$, $h$ mittelst der Formeln

$$f = -E \cos \alpha \cos \delta,$$
$$g = -E \sin \alpha \cos \delta,$$
$$h = -E \sin \delta;$$

und die Hülfswinkel $F$ und $G$ mittelst der Formeln

$$\text{tang } F = \cos \lambda \cot \mu,$$
$$\text{tang } G = \cos \omega \sin \lambda \cot \mu.$$

Dann suche man die Hülfsgrössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{A} = \cos 15T \sin (\omega - F),$$
$$\mathfrak{B} = \sin 15T \sin (\omega - F),$$
$$\mathfrak{C} = -\cos (\omega - F),$$
$$\mathfrak{E} = \sin (\omega - \varphi - F);$$

und die Hülfsgrössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{E}'$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{A}' = \cos \omega \sin (15T + G),$$
$$\mathfrak{B}' = -\cos \omega \cos (15T + G),$$
$$\mathfrak{C}' = \sin \omega \sin G,$$
$$\mathfrak{E}' = \cos (\omega - \varphi) \sin G;$$

hierauf die Hülfsgrössen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{D} = -f\mathfrak{A} - g\mathfrak{B} - h\mathfrak{C} + r\mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{D}' = -f\mathfrak{A}' - g\mathfrak{B}' - h\mathfrak{C}' + r\mathfrak{E}';$$

dann die Hülfsgrössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}'\mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}' - \mathfrak{C}'\mathfrak{D};$$

woraus man mittelst der Hülfsgrösse

$$i = \pm E \cos C$$

ferner die Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ mittelst der Formeln

Digitized by Google

$$\mathfrak{K} = i^2\mathfrak{H}^2,$$
$$\mathfrak{L} = i^2\mathfrak{F}^2 - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})^2,$$
$$\mathfrak{M} = i^2\mathfrak{G}^2 - (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})^2,$$
$$\mathfrak{N} = i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G} - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\,(g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})$$

findet, hierbei aber zu bemerken hat, dass jede der Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, wenn auch $i$ zwei Werthe hat, doch nur einen Werth hat, weil in den vorhergehenden Formeln nur $i^2$ vorkommt.

Hierauf sucht man den Hülfswinkel $W$ mittelst der Formel

$$\text{tang } W = \frac{\mathfrak{L} - \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}},$$

und dann $U$ mittelst der Formel

$$\sin(W + 2U) = -\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}} \cos W.$$

Bezeichnet nun $\Omega$ den Werth von $W + 2U$, welcher, absolut genommen, am kleinsten ist, so ist bekanntlich entweder

$$W + 2U = \Omega + 2k\pi,$$

oder

$$W + 2U = (2k + 1)\pi - \Omega,$$

wo $k$ jede positive oder negative ganze Zahl bezeichnen kann, und folglich entweder

$$2U = \Omega - W + 2k\pi$$

oder

$$2U = (2k + 1)\pi - (\Omega + W);$$

also entweder

$$U = \tfrac{1}{2}(\Omega - W) + k\pi$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2}(\pi - \Omega - W) + k\pi.$$

Folglich ist entweder

$$\sin U = (-1)^k \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - W),$$
$$\cos U = (-1)^k \cos \tfrac{1}{2}(\Omega - W)$$

oder

$$\sin U = (-1)^k \sin \tfrac{1}{2}(\pi - \Omega - W),$$
$$\cos U = (-1)^k \cos \tfrac{1}{2}(\pi - \Omega - W);$$

also nach dem Obigen entweder

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\tfrac{1}{2}(\Omega - W) + \mathfrak{G}\sin\tfrac{1}{2}(\Omega - W)\}}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos\tfrac{1}{2}(\Omega - W) + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin\tfrac{1}{2}(\Omega - W)},$$

$$\cos V = (-1)^k \cdot \frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos\tfrac{1}{2}(\Omega - W) + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin\tfrac{1}{2}(\Omega - W)}$$

oder

Digitized by Google

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\cos V = (-1)^k\cdot\frac{i\mathfrak{P}}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}.$$

Folglich ist entweder

$$\cos U\cos V = \frac{i\mathfrak{P}\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)},$$

$$\sin U\cos V = \frac{i\mathfrak{P}\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)},$$

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)}$$

oder

$$\cos U\cos V = \frac{i\mathfrak{P}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\sin U\cos V = \frac{i\mathfrak{P}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{P}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{P}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}.$$

Denkt man sich nun diese Ausdrücke in die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von $P$, nämlich in

$$P = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V}$$

$$P = \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}$$

eingeführt, und dann die Producte

$$P\cos U\cos V,\ P\sin U\cos V,\ P\sin V,$$

als die Werthe von

$$x-f,\ y-g,\ z-h$$

entwickelt, so ist klar, dass die Grösse $i$ ganz aus der Rechnung herausfällt, und man daher für jede der Differenzen

$$x-f,\ y-g,\ z-h$$

nicht, wie es nach dem Obigen scheinen könnte, vier, sondern bloss zwei Werthe erhält. Zugleich erhellet aber auch aus dem Bisherigen mit völliger Deutlichkeit, dass man für $U$ bloss die beiden Werthe $\frac{1}{2}(\Omega-W)$ und $\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)$, oder dass man bloss

$$U = \begin{cases}\frac{1}{2}(\Omega-W)\\ \frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\end{cases}$$

zu setzen braucht.

Hat man $U$, so findet man $V$ am leichtesten mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\text{tang } V = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{P}}\cos U-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}\sin U.$$

Digitized by Google

Ist $\Psi$ der Werth von $V$, welcher, absolut genommen, am kleinsten ist, so ist bekanntlich allgemein

$$V = \Psi + k\pi,$$

wo $k$ jede positive oder negative ganze Zahl sein kann, und folglich

$$\sin V = (-1)^k \sin \Psi, \quad \cos V = (-1)^k \cos \Psi;$$

woraus man sieht, dass die, geraden und ungeraden Werthen von $k$ entsprechenden Werthe von sin $V$ und cos $V$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ob man nun für $k$ eine gerade oder ungerade, übrigens an sich willkührliche, ganze Zahl setzen muss, ist nach den Vorzeichen zu beurtheilen, welche sin $V$ und cos $V$ zufolge der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\sin V = -\frac{i(\mathfrak{F}\cos U + \mathfrak{G}\sin U)}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos U + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin U},$$

$$\cos V = \frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos U + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin U}$$

haben müssen. Weil man aber nach dem Vorhergehenden bekanntlich sowohl $i = E\cos C$, als auch $i = -E\cos C$ setzen kann, es aber auch ganz gleichgültig ist, welches von beiden man thut, da $i$ am Ende aus der Rechnung ganz herausfällt, so kann man offenbar immer

$$V = \Psi$$

setzen.

Hat man auf diese Weise auch $V$ gefunden, so berechne man $P$ mittelst einer der beiden Formeln

$$P = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V + \mathfrak{B}\sin U\cos V + \mathfrak{C}\sin V},$$

$$P = \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V + \mathfrak{B}'\sin U\cos V + \mathfrak{C}'\sin V};$$

und hierauf die Differenzen $x-f$, $y-g$, $z-h$ mittelst der Formeln

$$x - f = P\cos U\cos V,$$
$$y - g = P\sin U\cos V,$$
$$z - h = P\sin V;$$

oder die Coordinaten $x$, $y$, $z$ mittelst der Formeln

$$x = f + P\cos U\cos V,$$
$$y = g + P\sin U\cos V,$$
$$z = h + P\sin V.$$

Dann berechne man $x_1$, $y_1$, $z_1$ mittelst der Formeln

$$x_1 = -r\sin(\omega-\varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega,$$
$$y_1 = -x\sin 15T + y\cos 15T,$$
$$z_1 = -r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega;$$

Digitized by Google

und behalte bloss dasjenige der beiden Systeme von $x$, $y$, $z$ und $x_2$, $y_2$, $z_2$ bei, welchem ein positiver Werth von $z_2$ entspricht.

Nun berechne man endlich noch $R$ und $R_2$ mittelst der Formeln

$$\text{tang } \xi = \frac{y}{x};$$

$$\text{tang } \chi = \frac{z}{x} \cos \xi, \quad \text{tang } \chi = \frac{z}{y} \sin \xi;$$

$$R = \frac{x}{\cos \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{y}{\sin \xi \cos \chi}, \quad R = \frac{z}{\sin \chi}$$

und

$$\text{tang } \xi_2 = \frac{y_2}{x_2};$$

$$\text{tang } \chi_2 = \frac{z_2}{x_2} \cos \xi_2, \quad \text{tang } \chi_2 = \frac{z_2}{y_2} \sin \xi_2;$$

$$R_2 = \frac{x_2}{\cos \xi_2 \cos \chi_2}, \quad R_2 = \frac{y_2}{\sin \xi_2 \cos \chi_2}, \quad R_2 = \frac{z_2}{\sin \chi_2}.$$

Auf diese Weise ist nun die Lage der Wolke im Raume vollkommen bestimmt.

## §. 9.

Will man die gemessene Höhe der Wolke von der Strahlenbrechung befreien, so muss man, wie hier aus der Lehre von der terrestrischen Refraction, die doch *) bei unserm Problem jedenfalls in Anwendung zu bringen ist, als bekannt vorausgesetzt werden kann, die horizontale Entfernung der Wolke von dem Beobachtungsorte wenigstens näherungsweise kennen. Um daher im Stande zu sein, die Refraction in Rechnung zu bringen, kann man nur so verfahren, das man nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Anleitung zuerst mit der uncorrigirten Höhe der Wolke deren Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ berechnet, und daraus die horizontale Entfernung

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2 \left(1 + \frac{y_2^2}{x_2^2}\right)} = \sqrt{x_2^2 (1 + \text{tang } \xi_2^2)}$$

$$= \sqrt{x_2^2 \sec \xi_2^2} = \pm \frac{x_2}{\cos \xi_2},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Bruch $\frac{x_2}{\cos \xi_2}$ eine positive oder eine negative Grösse ist, der Wolke von dem Beobachtungsorte herleitet, dann die gemessene Höhe auf die aus der Geodäsie hinreichend bekannte Weise mit Hülfe des bekannten Coefficienten der terrestrischen Refraction wegen der Strahlenbrechung corrigirt, und hierauf nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Anleitung mit der corrigirten Höhe der Wolke deren Coordinaten von Neuem berechnet, wobei wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass man dieses Verfahren nach der bekannten Methode der successiven Näherungen beliebig oft wiederholen oder beliebig weit fortsetzen kann.

*) Nicht die astronomische Refraction.

Digitized by Google

# XXXII.

## Aufgaben über das Maximum und Minimum.

Von

Herrn L. Mossbrugger

Lehrer der Mathematik an der Cantonsschule zu Aarau.

---

### I.

**Es ist ein rhombisches Octaeder gegeben: es soll das grösste dreiachsige Ellipsoid in dasselbe beschrieben werden.**

Es sei $ABCDEF$ (Taf. V. Fig. 1.) das gegebene Octaeder; nehmen wir seine drei Diagonalen $AC$, $BD$, $EF$ respective als Achsen der $x$, $y$ und $z$, ihren Durchschnitt $O$ zum Coordinatenanfang, und setzen $AC=2a$, $BD=2b$, $EF=2c$; so erhalten wir für die Gleichungen seiner Seitenflächen folgende:

Die Gleichung der Fläche $ABE$ ist: $z = c - \frac{cy}{b} - \frac{cx}{a}$ ....1)

– – – – $ADE$ „ $z = c + \frac{cy}{b} - \frac{cx}{a}$ ....2)

– – – – $CDE$ „ $z = c + \frac{cy}{b} + \frac{cx}{a}$ ....3)

– – – – $BCE$ „ $z = c - \frac{cy}{b} + \frac{cx}{a}$ ....4)

– – – – $ABF$ „ $z = -c + \frac{cy}{b} + \frac{cx}{a}$ ....5)

– – – – $ADF$ „ $z = -c - \frac{cy}{b} + \frac{cx}{a}$ ....6)

– – – – $CDF$ „ $z = -c - \frac{cy}{b} - \frac{cx}{a}$ ....7)

– – – – $BCF$ „ $z = -c + \frac{cy}{b} - \frac{cx}{a}$ ....8)

Bezeichnen wir mit $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$; $x_4, y_4, z_4$; $x_5, y_5, z_5$; $x_6, y_6, z_6$; $x_7, y_7, z_7$; $x_8, y_8, z_8$ die Coordinaten der Berührungspunkte des Ellipsoids mit den respectiven Seitenflächen $ABE$, $CDF$, $ADE$, $BCF$, $CDE$, $ABF$, $BCE$, $ADF$; so haben wir folgende Bedingungsgleichungen:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
z-z_1 &= -\frac{c}{b}(y-y_1)-\frac{c}{a}(x-x_1)\\
z-z_2 &= -\frac{c}{b}(y-y_2)-\frac{c}{a}(x-x_2)\\
z-z_3 &= \frac{c}{b}(y-y_3)-\frac{c}{a}(x-x_3)\\
z-z_4 &= \frac{c}{b}(y-y_4)-\frac{c}{a}(x-x_4)\\
z-z_5 &= \frac{c}{b}(y-y_5)+\frac{c}{a}(x-x_5)\\
z-z_6 &= \frac{c}{b}(y-y_6)+\frac{c}{a}(x-x_6)\\
z-z_7 &= -\frac{c}{b}(y-y_7)+\frac{c}{a}(x-x_7)\\
z-z_8 &= -\frac{c}{b}(y-y_8)+\frac{c}{a}(x-x_8)
\end{aligned}\right\} \ldots . 9)$$

Aus diesen folgt aber, dass:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= -x_2, \quad y_1 = -y_2, \quad z_1 = -z_2;\\
x_1 &= x_3, \quad y_1 = -y_3, \quad z_1 = z_3;\\
x_1 &= -x_4, \quad y_1 = y_4, \quad z_1 = -z_4;\\
x_1 &= -x_5, \quad y_1 = -y_5, \quad z_1 = z_5;\\
x_1 &= x_6, \quad y_1 = y_6, \quad z_1 = -z_6;\\
x_1 &= -x_7, \quad y_1 = -y_7, \quad z_1 = z_7;\\
x_1 &= x_8, \quad y_1 = -y_8, \quad z_1 = -z_8.
\end{aligned}\right\} \ldots . 10)$$

Schon aus diesen Gleichungen zwischen den Coordinaten der Berührungspunkte können wir schliessen, dass der Mittelpunkt des Ellipsoids im Coordinaten-Anfang $O$ liegt; wir wollen jedoch dieses genau auf rein analytischem Wege nachweisen.

Es sei nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
Ax^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2C'yz\\
+2A''z+2B''y+2C''x-D=0
\end{aligned}\right\} \ldots . 11.$$

die Gleichung des gesuchten Ellipsoids, so ist die Gleichung der Ebene welche diese Fläche berührt:

$$z-Z'=(x-X')\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y-Y')\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots . 12)$$

wo $X'$, $Y'$, $Z'$ die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Wir finden aber

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{Cx+A'y+B''z+C''}{Az+B'x+C'y+A''}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{By+A'x+C'z+B''}{Az+B'x+C'y+A''}$$

Soll nun die erste der Ebenen in 9. (also die Ebene $ABE$) das Ellipsoid im Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ berühren, so muss jene Gleichung mit der in 12. identisch sein, wenn wir in diese die soeben ge-

Digitized by Google

fundenen Werthe von $(\frac{dz}{dx})$ und $(\frac{dz}{dy})$ einführen, und alsdann statt $x$, $y$, $z$ die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ des Berührungspunktes setzen; dadurch erhalten wir aber:

$$\frac{c}{b} = \frac{By_1 + A'x_1 + C'z_1 + B''}{Az_1 + B'x_1 + C'y_1 + A''}, \quad \frac{c}{a} = \frac{Cx_1 + A'y_1 + B'z_1 + C''}{Az_1 + B'x_1 + C'y_1 + A''};$$

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$(B'c - A'b)x_1 + (C'c - Bb)y_1 + (Ac - C'b)z_1 + A''c - B''b = 0 \ldots 13)$$
$$(B'c - Ca)x_1 + (C'c - A'a)y_1 + (Ac - B'a)z_1 + A''c - C''a = 0 \ldots 14)$$

Ebenso erhalten wir mittelst der übrigen Gleichungen in 9., wenn wir die in 10. gefundenen Gleichungen zwischen $x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$ u. s. w. berücksichtigen:

$$(B'c - A'b)x_1 + (C'c - Bb)y_1 + (Ac - C'b)z_1 - (A''c - B''b) = 0 \ldots 15)$$
$$(B'c - Ca)x_1 + (C'c - A'a)y_1 + (Ac - B'a)z_1 - (A''c - C''a) = 0 \ldots 16)$$
$$(B'c + A'b)x_1 - (C'c + Bb)y_1 + (Ac + C'b)z_1 + A''c + B''b = 0 \ldots 17)$$
$$(B'c - Ca)x_1 - (C'c - A'a)y_1 + (Ac - B'a)z_1 + A''c - C''a = 0 \ldots 18)$$
$$-(B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 - (Ac + B'b)z_1 + A''c + B''b = 0 \ldots 19)$$
$$-(B'c - Ca)x_1 + (C'c - A'a)y_1 - (Ac - B'a)z_1 + A''c - C''a = 0 \ldots 20)$$
$$-(B'c + A'b)x_1 - (C'c + Bb)y_1 + (Ac + C'b)z_1 + A''c + B''b = 0 \ldots 21)$$
$$-(B'c + Ca)x_1 - (C'c + A'a)y_1 + (Ac + B'a)z_1 + A''c + C''a = 0 \ldots 22)$$
$$(B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 - (Ac + C'b)z_1 + A''c + B''b = 0 \ldots 23)$$
$$(B'c + Ca)x_1 + (C'c + A'a)y_1 - (Ac + B'a)z_1 + A''c + C''a = 0 \ldots 24)$$
$$-(B'c - A'b)x_1 + (C'c - Bb)y_1 + (Ac - C'b)z_1 + A''c - B''b = 0 \ldots 25)$$
$$-(B'c + Ca)x_1 + (C'c + A'a)y_1 + (Ac + B'a)z_1 + A''c - C''a = 0 \ldots 26)$$
$$(B'c - A'b)x_1 - (C'c - Bb)y_1 - (Ac - C'b)z_1 + A''c - B''b = 0 \ldots 27)$$
$$(B'c + Ca)x_1 - (C'c + A'a)y_1 - (Ac + B'a)z_1 + A''c + C''a = 0 \ldots 28)$$

Aus 13. 14. 15. 16. folgt:

$$A''c = B''b = C''a.$$

Dieses in 17. und 19. eingeführt, alsdann beide Gleichungen addirt, giebt:

$$8A''c = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber nur für $A'' = 0$ Genüge geleistet werden, mithin ist auch, $B'' = 0$, $C'' = 0$.

Aus den nemlichen Gleichungen 17. und 19. erhalten wir auch, mit Berücksichtigung der soeben gefundenen Werthe von $A''$, $B''$, $C''$:

$$(C'c + Bb)y_1 = (B'c + A'b)x_1 + (Ac + C'b)z_1;$$

aus 18. und 20. ist aber:

$$(C'c - A'a)y_1 = (B'c - Ca)x_1 + (Ac - B'a)z_1;$$

und aus 14. ist:

$$(C'c - A'a)y_1 = -(B'c - Ca)x_1 - (Ac - B'a)z_1.$$

Digitized by Google

Addiren wir die beiden letztern Gleichungen, so erhalten wir:

$$C'c - A'a = 0 \text{ also } C'c = A'a \quad \ldots . 29)$$

Dadurch ist aber auch:

$$(Ac - B'a)z_1 = -(B'c - Ca)x_1 \quad \ldots . 30)$$

Ferner folgt aus 21. und 23.

$$(Ac + C'b)z_1 = (B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . 31)$$

und aus 17. ist:

$$(Ac + C'b)z_1 = -(B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . 32)$$

also

$$(Ac + C'b)z_1 = (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . 33)$$

Eben so finden wir aus 22. 24. 26.

$$(Ac + B'a)z_1 = (B'c + Ca)x_1 \quad \ldots . 34)$$

Addiren wir die Gleichungen 30. und 34. so ist

$$Acz_1 = Cax_1 \quad \ldots . 35)$$

Subtrahiren wir aber 30. und 34. voneinander, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} B'az_1 = B'cx_1 \text{ oder} \\ az_1 = cx_1 \end{array}\right\} \ldots . 36)$$

Auf ähnliche Art finden wir aus 22. 24. 26.

$$(C'c + A'a)y_1 = 0 \text{ oder } C'c = -A'a \quad \ldots . 37)$$

Wir bemerkten aber, dass die Gleichungen 29. 36. und 37. und die, welche wir aus 1. erhalten, wenn wir statt $x$, $y$, $z$ die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ setzen, nemlich $z_1 = c - \frac{cy_1}{b} - \frac{cx_1}{a}$, nur alsdann zugleich bestehen können, wenn wir

$$A' = 0,\ C' = 0,\ B' = 0 \quad \ldots . 38)$$

setzen. Führen wir die gefundenen Werthe von $A'$, $B'$, $C'$; $A''$, $B''$, $C''$ in irgend zwei der Gleichungen 13. 14. und 15. u. s. w. ein, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{Ac}{Bb}z_1,\ x_1 = \frac{Ac}{Ca}z_1 \quad \ldots . 39)$$

Die Gleichung 11. erhält also die Form:

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 - D = 0 \quad \ldots . 40)$$

Aus 39. und der Gleichung $z_1 = c - \frac{cy_1}{b} - \frac{cx_1}{a}$ erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{a^2b^2cBC}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB} \\ y_1 = \dfrac{a^2c^2bAC}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB} \\ x_1 = \dfrac{b^2c^2aAB}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB} \end{array}\right\} \quad \ldots . 41)$$

Da der Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ ebenfalls auf der Oberfläche des Ellip-

Digitized by Google

soids liegen muss, so muss auch der Gleichung 40. Genüge geleistet werden, wenn wir die soeben gefundenen Werthe von $x_1$, $y_1$, $z_1$ statt $x$, $y$, $z$ in dieselbe einführen; dadurch erhalten wir aber:

$$\left.\begin{aligned} a^2b^2c^2\frac{B}{A}\cdot\frac{C}{A} - a^2b^2\cdot\frac{D}{A}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{C}{A} - a^2c^2\frac{D}{A}\cdot\frac{C}{A} \\ - b^2c^2\frac{D}{A}\cdot\frac{B}{A} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots . 42)$$

Setzen wir in dieser Gleichung: $\frac{B}{A} = t$, $\frac{C}{A} = u$, $\frac{D}{A} = v$, also $\frac{D}{B} = \frac{v}{t}$, $\frac{D}{C} = \frac{v}{u}$; so erhalten wir:

$$a^2b^2c^2\ tu - a^2b^2tuv - a^2c^2uv - b^2c^2\ tv = 0 \ldots . 43)$$

Aus 40. erhalten wir, wenn wir zuerst $x$ und $y$, alsdann $x$ und $z$, und endlich $y$ und $z$ gleich Null setzen:

$$z = \pm\sqrt{\frac{D}{A}},\ y = \pm\sqrt{\frac{D}{B}},\ x = \pm\sqrt{\frac{D}{C}} \ldots . 43)$$

Dieses sind die Grössen dreier zugeordneten halben Durchmesser des Ellipsoids, die mit den Diagonalen $FE$, $BD$, $AC$ des rhombischen Octaeders zusammenfallen. Bezeichnen wir die Winkel je zweier dieser Diagonalen $a$, $b$; $a$, $c$; $b$, $c$ respective mit $\gamma$, $\beta$, $\alpha$; ferner die Halbachsen des Ellipsoids mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist bekanntlich der Körperinhalt desselben $= \frac{4}{3}\mathfrak{ABC}\pi$.

Sind aber allgemein $d_1$, $d_2$, $d_3$ drei zugeordnete Durchmesser und $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ die Winkel, welche $d_1$ und $d_2$, $d_1$ und $d_3$, $d_2$ und $d_3$ einschliessen, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{ABC} = d_1d_2d_3\sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma};$$

folglich ist:

$$\text{Minimum} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\frac{D^3}{ABC}}$$

oder, wenn wir die obige Bezeichnung gebrauchen, und

$$\frac{4\pi}{3}\sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma} = K$$

setzen:

$$\text{Minimum} = K\sqrt{\frac{v^3}{ut}} \ldots . 45)$$

Wird $v$ als eine Function von $t$ und $u$ angesehen, und zuerst nach $v$ und $t$, alsdann nach $u$ und $t$ differentiirt, so ist:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{v}{3t},\ \left(\frac{dv}{du}\right) = \frac{v}{3u} \ldots . 46)$$

Differentiiren wir endlich auch die Gleichung 43. nach $v$ und $u$, so erhalten wir

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = b^2\frac{a^2c^2u - a^2uv - c^2v}{a^2b^2ut + a^2c^2u + b^2c^2t},\ \left(\frac{dv}{du}\right) = a^2\frac{b^2c^2t - b^2tv - c^2v}{a^2b^2ut + a^2c^2u + b^2c^2t} \ldots 47)$$

Aus 46. und 47. erhalten wir:

Digitized by Google

$$4a^2b^2utv + 4b^2c^2tv + a^2c^2uv - 3a^2b^2c^2ut = 0,$$
$$4a^2b^2utv + 4a^2c^2uv + b^2c^2tv - 3a^2b^2c^2ut = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhalten wir:

$$u = \frac{b^2}{a^2}t; \text{ also: } v = \frac{4b^2c^2t}{4b^2t + 5c^2} \ldots . 48)$$

Diese Werthe von $u$ und $v$, in 43. substituirt, geben:

$$t = \frac{c^2}{3}, \text{ also } u = \frac{c^2}{a^2}, \; v = \frac{c^2}{3};$$

mithin wird die Gleichung 40. zu:

$$(\frac{x\sqrt{3}}{c})^2 + (\frac{y\sqrt{3}}{b})^2 + (\frac{z\sqrt{3}}{a})^2 = 1 \ldots . 49)$$

Es sind daher $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ diejenigen drei zugeordneten Durchmesser des Ellipsoids, welche mit den drei Durchmessern $AC$, $BD$ und $EF$ des rhombischen Octaeders zusammenfallen.

Endlich finden wir die Coordinaten der Berührungspunkte, indem wir jede der Gleichungen 41. im Zähler und Nenner mit $\frac{D}{ABC}$ vervielfachen, alsdann statt $\frac{D}{A}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{D}{C}$ die gefundenen Werthe $\frac{c^2}{3}$, $\frac{b^2}{3}$, $\frac{a^2}{3}$ setzen, wodurch wir:

$$x_1 = \frac{a}{3}, \; y_1 = \frac{b}{3}, \; z_1 = \frac{c}{3};$$
$$x_2 = -\frac{a}{3}, \; y_2 = -\frac{b}{3}, \; z_2 = -\frac{c}{3};$$
$$x_3 = \frac{a}{3}, \; y_3 = -\frac{b}{3}, \; z_3 = \frac{c}{3};$$
$$x_4 = -\frac{a}{3}, \; y_4 = \frac{b}{3}, \; z_4 = -\frac{c}{3};$$
$$x_5 = -\frac{a}{3}, \; y_5 = -\frac{b}{3}, \; z_5 = \frac{c}{3};$$
$$x_6 = \frac{a}{3}, \; y_6 = \frac{b}{3}, \; z_6 = -\frac{c}{3};$$
$$x_7 = -\frac{a}{3}, \; y_7 = \frac{b}{3}, \; z_7 = \frac{c}{3};$$
$$x_8 = \frac{a}{3}, \; y_8 = -\frac{b}{3}, \; z_8 = -\frac{c}{3};$$

erhalten.

## II.

**Es ist ein Parallelepiped gegeben: man soll das kleinste Ellipsoid um dasselbe beschreiben.**

Wir nehmen die drei in einer Ecke $F$ (Taf. V. Fig. 2.) des Parallelepipeds zusammenstossenden Kanten $FI$, $FH$ und $FP$ als die Axen der $x$, $y$, $z$; die Grössen dieser Kanten selbst seien



Digitized by Google

respective $a$, $b$, $c$; ferner bezeichnen wir mit $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ die Winkel, welche die Kanten $a$, $b$; $a$, $c$ und $b$, $c$ einschliessen. Die Gleichung der zu bestimmenden Fläche selbst sei

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz \\ + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . 1)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x=0$ und $y=0$, so erhalten wir:

$$z = -\frac{A'}{A} \pm \frac{\sqrt{A'^2 - AD}}{A}.$$

Die Coordinatenwerthe $x=0$, $y=0$ entsprechen den beiden Punkten $F$ und $P$; für den erstern muss die Ordinate $z$ gleich Null, und für den andern gleich $c$ werden; der gefundene Ausdruck gibt aber den erstern Werth nur wenn

$$D = 0$$

ist, und wir erhalten daher auch für den Punkt $P$:

$$c = -\frac{2A'}{A} \text{ oder } A'' = -\frac{Ac}{2}.$$

Die Gleichung 1. reducirt sich aber dadurch auf:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz \\ - Acz + 2B''y + 2C''x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . 2)$$

Auf gleiche Art entsprechen den Coordinaten $x=a$, $y=0$ in dieser Gleichung zwei Werthe von $z$; der eine ist Null, und bezeichnet die Grösse der Ordinate in $J$; der andere ist $c$, und giebt die Grösse der Ordinate des Punktes $M$ an.

Durch diese Annahmen erhalten wir aus der Gleichung 2.

$$z = -\frac{2B'a - Ac}{2A} \pm \frac{\sqrt{(2B'a - Ac)^2 - 4Aa(Ca + 2C'')}}{2A}.$$

Damit hieraus $z=0$ werde, muss $Ca + 2C'' = 0$, also $C'' = -\frac{Ca}{2}$ sein; für die andere Ordinate ist

$$c = -\frac{2B'a - Ac}{A},$$

woraus wir $B' = 0$ finden. Dadurch geht die Gleichung 2. über in:

$$Ax^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2C'yz - Acz + 2B''y - Cax = 0 \ldots 3)$$

Die Coordinaten der Punkte $H$ und $R$ sind $x=0$, $y=b$, $z=0$ und $x=0$, $y=b$, $z=c$. Für $x=0$, $y=b$ ist aus 3.:

$$z = -\frac{2Cb - Ac}{2A} \pm \frac{\sqrt{(2Cb - Ac)^2 - 4Ab(Bb + 2B'')}}{2A}.$$

Aus dieser Gleichung ist wieder wie vorhin für $z=0$ und $z=c$:

$$B'' = -\frac{Bb}{2}, \; C' = 0;$$

mithin wird die Gleichung 3. zu:

$$Ax^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy - Acz - Bby - Cax = 0 \ldots . 4)$$

Digitized by Google

Ganz wie so eben finden wir mittelst der Punkte $A$ und $L$, deren Coordinaten $x=a$, $y=b$, $z=c$ und $x=a$, $y=b$, $z=0$ sind, den Werth von $A'=0$, so dass sich also die Gleichung 4. auf:

$$Az^2+By^2+Cx^2-Acz-Bby-Cax=0 \ldots . 5)$$

reducirt.

Verlegen wir jetzt den Coordinaten-Anfang in den Mittelpunkt $O$ des Parallelepipeds, und nehmen $x'$, $y'$, $z'$ für die neuen Coordinaten an, so dass also $x=\frac{a}{2}+x'$, $y=\frac{b}{2}+y'$, $z=\frac{c}{2}+z'$ ist, so wird die Gleichung 5) zu:

$$A'z^2+B'y^2+C'x^2-\frac{Ac^2}{4}-\frac{Bb^2}{4}-\frac{Ca^2}{4}=0 \ldots . 6)$$

Setzen wir $\frac{B}{A}=t$, $\frac{C}{A}=u$, also $\frac{B}{C}=\frac{t}{u}$, und lassen die Accente weg, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} z^2+ty^2+ux^2=\frac{c^2}{4}+\frac{tb^2}{4}+\frac{ua^2}{4} \text{ oder} \\ z^2+t(y^2-\frac{b^2}{4})+u(x^2-\frac{a^2}{4})=\frac{c^2}{4} \end{array}\right\} \ldots . 7)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir, wenn wir zuerst $x=0$ und $y=0$, alsdann $x=0$ und $z=0$, und endlich $y=0$ und $z=0$ annehmen:

$$z=\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+b^2t+a^2u},\ y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t}(c^2+b^2t+a^2u)},$$

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u}(c^2+b^2t+a^2u)}.$$

Dieses sind die Grössen der drei halben Durchmesser des Ellipsoids, die durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds gehen, und mit den drei in $F$ zusammenstossenden Kanten desselben parallel sind. Bezeichnen wir wie in I. die drei Achsen des Ellipsoids mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so haben wir:

$$\text{Min.}=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1}{ut}(c^2+b^2t+a^2u)^3.(1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)},$$

und wenn wir $k=1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ setzen:

$$\text{Minim.}=\frac{\pi k}{6}\sqrt{\frac{(c^2+b^2t+a^2u)^3}{ut}} \ldots . 8)$$

Differentiiren wir zuerst nach $t$, alsdann nach $u$, und setzen die Differentialquotienten gleich Null, so erhalten wir:

$$\frac{(2b^2t-c^2-a^2u)\sqrt{c^2+b^2t+a^2u}}{2t\sqrt{ut}}=0 \ldots . 9)$$

$$\frac{(2a^2u-c^2-b^2t)\sqrt{c^2+b^2t+a^2u}}{2u\sqrt{ut}}=0 \ldots . 10)$$

Diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn:



Digitized by Google

$$2b^2t - a^2u - c^2 = 0 \text{ und } 2a^2u - b^2t - c^2 = 0$$

ist, woraus wir $t = \frac{c^2}{b^2}$, $u = \frac{c^2}{a^2}$ erhalten.

Führen wir diese Werthe von $t$ und $u$ in die Gleichung 7. ein, so finden wir für die Gleichung des gesuchten Ellipsoids:

$$(\frac{2z}{c\sqrt{3}})^2 + (\frac{2y}{b\sqrt{3}})^2 + (\frac{2x}{a\sqrt{3}})^2 = 1 \ldots . 11)$$

Der Inhalt desselben ist

$$= \frac{3abc}{16}\sqrt{3(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

Aus der Gleichung 11. sehen wir, dass $c\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$, $a\sqrt{3}$ diejenigen drei zugeordneten Durchmesser des Ellipsoids sind, welche mit den Kanten des Parallelepipeds parallel laufen.

III.

Es soll um ein gegebenes Dreieck $ACB$ das grösste Parabelstück beschrieben werden.

Es sei die Höhe des gegebenen Dreiecks gleich $h$, $AM = a$, und $AB = c$ (Taf. V. Fig. 3.).

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots . 1)$$

Weil in diesem Falle der Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so haben wir:

$$B^2 = 4AC \ldots . 2);$$

folglich

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{\sqrt{2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A}.$$

Da für $x = 0$ einer der beiden Werthe von $y$ ebenfalls zu Null wird, so muss auch $F = 0$ werden; mithin ist

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{\sqrt{2(BD - 2AE)x + D^2}}{2A} \ldots . 3)$$

Da aber auch für $x = c$ ein Werth von $y$ verschwindet, so erhalten wir aus 3.

$$E = -Cc;$$

folglich:

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{\sqrt{B(Bc + 2D)x + D^2}}{2A} \ldots . 4)$$

Für $x = a$ muss $y = h$ werden; durch die Substitution dieser Werthe von $x$ und $y$ in der Gleichung 4. erhalten wir:

$$D = \frac{B^2ac - (2Ah + Ba)^2}{4Ah},$$

also

$$Bc + 2D = \frac{(2Ah + Ba)(Bc - Ba - 2Ah)}{2Ah}.$$

Digitized by Google

Multipliciren wir die Gleichung 4. mit $dx$, und integriren sodann, so erhalten wir:

$$\int y dx = -\frac{Bx^2+2Dx}{4A} \pm \frac{\{D^2+B(Bc+2D)x\}^{\frac{3}{2}}}{3AB(Bc+2D)} + \text{Const.} \quad \ldots . 5)$$

Da das Integral für $x=0$ verschwinden muss, so wird

$$\text{Const.} = \mp \frac{D^3}{3AB(Bc+2D)}.$$

Setzen wir in 5. die Grösse $x=c$ und fügen die Constante bei, so ist die parabolische Fläche

$$ACB = \mp \frac{D^3}{3AB(Bc+2D)} - \frac{Bc^2+2Dc}{4A} \pm \frac{\{D^2+B(Bc+2D)c\}^{\frac{3}{2}}}{3AB(Bc+2D)};$$

oder, wenn wir die obern Zeichen beibehalten, so erhalten wir den Inhalt der parabolischen Fläche

$$ACB = \frac{B^2c^3}{12A(Bc+2D)}.$$

Setzen wir in dem Nenner statt $Bc+2D$ seinen oben gefundenen Werth, so ist, wenn wir den parabolischen Raum $ABC$ durch $P$ bezeichnen:

$$P = \frac{B^2hc^3}{6(2Ah+Ba)\ (Bc-Ba-2Ah)} \text{ oder}$$

$$P = \frac{hc^3}{6(2\frac{A}{B}\ h+a)\ (c-a-2\frac{A}{B}h)}.$$

Die Grösse $\frac{A}{B}$ ist noch unbestimmt. Setzen wir dieselbe $=z$, so ist:

$$P = \frac{hc^3}{6(2hz+a)\ (c-a-2hz)}.$$

Wird dieser Ausdruck nach $z$ differentiirt, und das Differential $\frac{dP}{dz}=0$ gesetzt, so kann das Maximum oder Minimum desselben bestimmt werden.

Es ist aber

$$\log n\ P = \log n\ hc^3 - \log n\ 6 - \log n\ (2hz+a) - \log n\ (c-a-2hz),$$

mithin

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2h}{2hz+a} + \frac{2h}{c-a-2hz} = 0$$

folglich

$$z = \frac{c-2a}{4h} = \frac{A}{B}, \text{ also } B = \frac{4Ah}{c-2a}.$$

Werden nun die gefundenen Werthe von $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ in der Gleichung 1. substituirt, so ist folgende die Gleichung der gesuchten Parabel:

$$(c-2a)y^2 + 4hxy + \frac{4h^2x^2}{c-2a} + \frac{hc(4a-c)y}{c-2a} - \frac{4h^2cx}{c-2a} = 0 \quad \ldots . 6)$$

Digitized by Google

Wird die Ordinaten-Axe unter einem Winkel $\varphi$ gegen die Abcissen-Axe genommen, und die Coordinaten in Bezug auf diese Axen mit $x'$, $y'$, bezeichnet, so ist

$$y = y' \sin\varphi,\ x = x' + y'\cos\varphi.$$

Durch die Einführung dieser Werthe von $x$, $y$ in 6. bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned}\{(c-2a)^2 \sin\varphi^2 + 4h(c-2a)\sin\varphi\cos\varphi + 4h^2\cos\varphi^2\}y'^2 \\ + 4\{h(c-2a)\sin\varphi + 2h^2\cos\varphi\}x'y' \\ + 4h^2x'^2 \\ + \{hc(4a-c)\sin\varphi - 4ch^2\cos\varphi\}y' \\ - 4h^2cx'\end{aligned}\right\} = 0 \ldots . 7)$$

Bestimmen wir nun $\varphi$ so, dass die beiden ersten Glieder dieser Gleichung hinwegfallen, so muss

$$(c-2a)\sin\varphi + 2h\cos\varphi = 0 \text{ sein, also tang } \varphi = \frac{2h}{2a-c}.$$

Um diese Tangente zu construiren halbiren wir $AB$ in $D$, so ist $DM = \frac{2a-c}{2}$ und $CM = h$, mithin ist der Winkel $\varphi = \angle CDB$.

Aus dem so eben gefundenen Werthe von tang $\varphi$ folgt aber auch, dass

$$\sin\varphi = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + (2a-c)^2}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{2a-c}{\sqrt{4h^2 + (2a-c)^2}}$$

ist, mithin

$$hc(4a-c)\sin\varphi - 4h^2\cos\varphi = \frac{h^2c^2}{\sqrt{4h^2 + (2a-c)^2}}.$$

Die Gleichung 7. wird daher zu folgender:

$$x'^2 - cx' + \frac{c^2y'}{8\sqrt{4h^2 + (2a-c)^2}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in die Proportion

$$AD^2 : AP \times BP = CD : PQ$$

auflösen, und es ist daher $CD$ ein Durchmesser der Parabel, $AB$ eine diesem Durchmesser zugehörige Ordinate.

Führen wir endlich den Werth von $x$ in den zuletzt gefundenen Ausdruck für den Inhalt der Parabel ein, so erhalten wir

$$P = \tfrac{2}{3}hc.$$

Digitized by Google

# XXXIII.

## Prüfungs-Aufgaben, die in Cambridge den Candidaten des Baccalaureates gegeben worden sind *). Aus dem Englischen übersetzt und mit Bemerkungen begleitet

von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

---

Nr. 1. 1834.

(A.)

1. Reducire 36 L. 7 sl. $8\frac{1}{2}$ d. in Farthings.
2. Dividire 19 L. 16 sl. $10\frac{1}{2}$ d. durch 46 . . . . Antw. 8 sl. $7\frac{1}{2}$ d. $\frac{3}{23}$ **).
3. Welchen Preis haben 5 Ctr. 3 Qrt. 18 Pfd. zu 3 sl. 6 d. per Pfd.?
4. Beweise dass $\frac{1}{3}$ dividirt durch 7 ist $\frac{1}{21}$.
5. Multiplicire 2,83 mit 0,013 und beweise die Richtigkeit des Produktes.
6. Verwandle 15 sl. $4\frac{1}{4}$ d. in $\frac{1}{10}$ des Pfundes, und finde den Werth von 0,4786 Tagen in Stunden, Minuten und Secunden.
7. Ziehe die Quadratwurzel aus 2209. Beweise die Regel für die Bestimmung der Anzahl von Stellen in der Wurzel.
8. Welche Länge muss ein Teppich haben der $\frac{1}{4}$ Yard breit ist und ein Zimmer von $6\frac{1}{2}$ *yds* lang und $5\frac{1}{4}$ breit bedecken soll?

---

*) Nicht wegen der Aufgaben an sich, sondern um zu zeigen, wie auf den englischen, so manche bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit darbietenden Lehranstalten die mathematischen Prüfungen gehandhabt werden, habe ich die folgenden Aufgaben nebst den höchst einsichtsvollen Bemerkungen des Herrn Uebersetzers zu denselben hier abdrucken lassen, welchem letztern die Leser des Archivs sich mit mir für diese in pädagogischer Rücksicht so interessante Mittheilung gewiss zu dem aufrichtigsten Danke verpflichtet fühlen werden.

Der Herausgeber.

**) Die Antwort musste heissen 8 sl. $7\frac{3}{92}$ d.; aber die Engländer rechnen nach Farthings, drücken übrigens dieselben als $\frac{1}{4}$ von ihren Pfennigen (peuce) aus, geschrieben d (das Normännische deniers) danach sind $\frac{3}{92}$ Pf. $= \frac{3}{23}$ f. $= \frac{1}{8}$ d. $\frac{3}{23}$. M.

Digitized by Google

9. Was betragen die einfachen Zinsen von 63 L. 15 sl. 7 d. in $1\frac{1}{4}$ Jahr zu $4\frac{1}{2}$ Proc.; und wie viel ist der Betrag zusammengesetzter Zinsen von 540 L. in 3 Jahren zu 4 Proc.? Antw. 3 L. 11 sl. $8\frac{3}{4}$ .... 607 L. 8 sl. $6\frac{1}{4}$ d. *)

10. Wenn 7 Mann 6 Acker in 12 Stunden ärndten können, wieviel werden 15 Acker in 14 Stunden ärndten?

11. Suche das grösste gemeinschaftliche Maass für die Bruchsglieder von $\frac{x^3-9x^2+23x-15}{x^2-8x+7}$ und bringe den Bruch auf seine kleinsten Glieder.

12. Löse folgende Gleichungen:

(1) $\ldots \frac{x}{2}+\frac{x}{3}=26-\frac{x}{4}$

(2) $\ldots \frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$

(3) $\ldots \frac{2x+3y}{6}-\frac{x}{3}=1,$

$$\frac{7y-3x}{2}+10y=9$$

(4) $\ldots \begin{aligned} x+\ y-\ z&=8\\ 2x-\ y+3z&=21\\ 4z+3y-2x&=17 \end{aligned}$

13. Beweise die Regel für die Ergänzung des Quadrates bei der Auflösung quadratischer Gleichungen, und löse

(1) $\ldots 4x^2-3x=85$

(2) $\ldots \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x-\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{m}{n}$ **).

---

*) 3 L. 11 sl. 9,01875 d. und 607 L. 8 sl. 6,3744 d. M.

**) Schreibt man zuvor $\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{y-\sqrt{y^2-a^2}}=b$, was nur einfacher, sonst aber dasselbe ist, so wird $\frac{y^2+y^2-a^2+2y\sqrt{y^2-a^2}}{a^2}=b,$

$$2y\sqrt{y^2-a^2}=a^2b+a^2-2y^2=a^2(b+1)-2y^2,$$

$$4y^2y^2-4y^2a^2=a^4(b+1)^2+4y^4-4a^2(b+1)y^2.$$

Da sich $4y^4$ und dann $a^2$ als Factor hebt, so wird $(4(b+1)-4)y^4=4by^2=a^2(b+1)^2,$

$$y=\pm\frac{a(b+1)}{2\sqrt{b}}$$

$$a+x=a\frac{\pm\frac{m+n}{n}}{2\sqrt{\frac{mn}{n^2}}}=a\,.\,\frac{\pm(m+n)}{2\sqrt{mn}}$$

$$x=a(\frac{+(m+n)}{2\sqrt{mn}}-1)$$

Digitized by Google

14. Zeige dass $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$ Grössen sind, die in arithmetischer Progression stehen, und bestimme die Summe von 8 Gliedern der Reihe, von welcher sie die drei ersten sind.

Suche auch die Summe von $n$ Gliedern der Reihe

$\frac{a}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} - \ldots$. In welchem Falle wird eine unendliche Menge von Gliedern der letzten Reihe endlich sein?

15. Beweise die Regeln, durch welche die Anzahl von Permutationen und Combinationen von $n$ Dingen, die 3 und 3 zusammengenommen werden, zu finden ist.

Wenn das Gesetz für den Ausdruck der Permutation von Dingen, die zu $r$ und $r$ zusammengenommen werden, zugegeben wird, zu beweisen, dass es auch richtig ist, wenn man sie zu $r+1$ und $r+1$ zusammen nimmt.

16. Wenn $a : b = c : d = e : f$ beweise dass $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

und $a : b = a + c + e : b + d + f$

17. Suche den Werth von 1 L. das 100 Jahr zu 4 Proc. Zins von Zins getragen hat.

Gegeben ist log $1{,}04 = 0{,}0170333$

und log $1{,}482 = 0{,}70333$

18. Gieb das $(\frac{n}{2})$te Glied von $(a - x)^n$ wenn $\frac{n}{2}$ unpaar ist.

## Nr. 2. 1834.

### (B.)

1. Reducire 125 Yard 2′ 4″ zu Zollen.
2. Beweise dass $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{7}$ so viel als $\frac{1}{11}$ sind.
3. Theile 3 L. 15 sl. $5\frac{1}{2}$ d. durch 23. Antw. 3 sl. $3\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{23}$. Vergleiche die Anm. zu 2. in der vorigen Aufgabenreihe.
4. Suche den Lohn von 6 Arbeitern für $28\frac{1}{2}$ Tag wenn 2 sl. 3 d. täglich bezahlt werden.

---

$$x'' = a\left(\frac{-(m+n)}{2\sqrt{mn}} - 1\right) = -a\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}} + 1\right)$$

$$x' = a\frac{(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

$$x'' = -a\frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

Im Original ist angegeben:

$$x = \frac{a(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

was offenbar fehlerhaft ist: denn die kleinere Wurzel wird positiv, die grössere negativ, und beide können nicht einerlei Zeichen erhalten. M.

Digitized by Google

5. Multiplicire 36,2 mit 4,57 und beweise die Richtigkeit des Productes.

6. Verwandle $15^{h}\ 4^{m}\ 6^{h}$ in Zehnteltage; und finde den Werth von 5,734 L.

7. Suche die Interessen von 963 L. 10 sl. 6 d. für $\frac{1}{4}$ Jahr zu $3\frac{1}{2}$ Proc. Suche gleichfalls den Betrag von 130 L. in 3 Jahren zu 5 Proc. in Zins von Zins.

8. Ziehe die Quadratwurzel aus 167281. Beweise die Regel die Anzahl der Wurzelstellen zu bestimmen.

9. Wenn 69 Yard eines Teppichs von $\frac{3}{4}$ Yard Breite ein Zimmer von $10\frac{1}{2}$ Yard Länge bedecken, die Breite des Zimmers zu finden.

10. Wenn 800 Soldaten 5 Tonnen Mehl in 6 Tagen verzehren, wie viel Soldaten werden 15 Tonnen in 2 Tagen verzehren?

11. Suche das grösste gemeinschaftliche Maass der Glieder des Bruches $\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-14x-15}$ und reducire den Bruch auf seine kleinsten Glieder.

12. Löse folgende Gleichungen:

$$(1)\ \ldots x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=137-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$$

$$(2)\ \ldots x+\frac{3x-5}{2}=12-\frac{2x-4}{3}$$

$$(3)\ \ldots \frac{3x-5y}{5}+\frac{x}{2}=9$$

$$\frac{6x+2y}{8}-\frac{y}{2}=7$$

Anm. des Ueb. Im Original steht $=\frac{x}{2}$ in der vorletzten Gleichung, was ein Druckfehler ist.

$$(4)\ \ldots x+y-z=13$$
$$3x-2y+z=19$$
$$5x+4z-2x=40.$$

13. Beweise die Regel für die Ergänzung des Quadrates bei der Auflösung quadratischer Gleichungen; und löse

$$(1)\ \ldots 7x^2-4x=660$$

$$(2)\ \ldots \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2-x}}=\frac{b}{c}.$$

14. Wenn $a:b=c:d$ beweise dass $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$ und dass

$$a:b=a+mc:b+md \text{ ist.}$$

15. Dieselbe Frage wie 15. in der vorigen Reihe.

16. Zeige dass $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{4}$ in arithmetischer Progression stehen und finde die Summe von 13 Gliedern der Reihe worin sie die ersten sind.

Suche auch die Summe von $n$ Gliedern der Reihe

$$b\frac{x}{a}-b\frac{x^2}{a^2}+b\frac{x^3}{a^3}-\ldots$$

Digitized by Google

In welchem Falle wird eine unendliche Menge von Gliedern der letzten Reihe etwas Endliches geben?

17. In wie viel Jahren wird 1 L. das auf Zins von Zins zu 5 Proc. steht sich verdoppeln?

Gegeben sind $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$

$\log 2 = 0{,}3010300$

18. Gieb das $p$te Glied von $(a + x)^n$ an.

---

**Bemerkungen zu den vorhergehenden in Cambridge ertheilten Aufgaben. Von dem Uebersetzer.**

Vielleicht lächelt mancher deutsche Lehrer über diese Aufgaben, indem er urtheilt: sie möchten wohl für abgehende Schüler unserer Gymnasien zu leicht sein. Es scheint wirklich so beim ersten Anblicke: aber, man vergesse nicht, dass diese Aufgaben eine ganz andere Bestimmung haben als künftige Mathematiker zu prüfen; man lege dieselben alle denjenigen vor, die einen sorgfältigen Unterricht in den Anfangsgründen gehabt haben, und ich glaube man kann eine Wette eingehen! dass unter 10 jungen Leuten nicht 9 diese Aufgaben, in einer gegebenen Frist, z. B. in einem Tage, unter Aufsicht eines Inspicienten lösen.

Wer das nicht glaubt der mache die Probe.

Es ist wahr, die Aufgaben sind leicht; darin besteht aber ihr Vorzug, und ein erfahrener Lehrer wird sie um so leichter machen, je weiter seine Erfahrung reicht: denn an leichten Aufgaben kann man eben so gut sehen wie ein gegebener Stoff verarbeitet wird, ja noch besser als an solchen, bei welchen man den gleichsam starren Stoff erst bildungsfähig machen muss. Erfindungs- und Combinationsgabe sind zu sehr von einer eigenthümlichen Meinung abhängig als dass sie vergleichbaren Prüfungen unterworfen werden könnten. Durch vielfache Uebungen kann zwar Mancher eine Richtung darauf erhalten; es ist aber sehr zu bezweifeln, ob es segensreich wirken würde, wenn eine solche Richtung bei irgend einer Bildungsanstalt die vorherrschende wäre. Wenn Lehrer der Mathematik auf Gymnasien darauf ausgehen, ihren Schülern eine Vorliebe für die Mathematik beizubringen, so werden ihnen die Lehrer in den Sprachen aufsässig; und das hat einen sehr guten Grund: denn, nach meiner Erfahrung, ist die Richtung desjenigen, der Mathematik vorzugsweise treibt, einseitig, in einem andern Sinne wie die Richtung desjenigen, der vorzugsweise alte Sprachen treibt. Diese Behauptung könnte das Thema zu einer weitläufigen Abhandlung werden: ich will mich kurz durch einen Vergleich erklären. Beide sind zwei Schwimmern zu vergleichen, von denen aber der eine blos lange und tief tauchen kann, während der andere dieses nicht vermag, dagegen sich mit Anmuth und Leichtigkeit auf der Oberfläche zu bewegen versteht. Der erste taucht nach Perlen, findet aber meist leere Muscheln; der andere müht sich ab im Wasser, indessen ein gemeiner Fischer in dem gebrech-

Digitized by Google

lichen Nachen verwundert an ihm vorüber fährt. Beide üben jedoch ihre Kräfte, und dieses ist der alleinige Zweck jedes Unterrichtes, nicht blos bei körperlichen sondern auch bei geistigen Exercitien. Der Lehrer in den Sprachen muss deshalb Uebungen vornehmen, die dem Unkundigen als Zeitverlust erscheinen. Der Lehrer in der Mathematik giebt oft Aufgaben, die ganz zwecklos erscheinen, weil sie meist unpraktisch sind; und wenn man die Aufgabensammlungen durchgeht, so muss man sich wirklich wundern, weshalb nicht praktische Aufgaben genommen werden, da sie doch häufig eben so nahe liegen wie diejenigen, die selbst den Schülern lächerlich vorkommen. Die meisten derselben sind Copien oder kleine Erweiterungen der Sammlung von M. Hirsch. Seine Periode ist vorüber; Heis in Aachen steht an der Spitze einer neuen *).

Die Engländer sind im allgemeinen praktischer wie die Deutschen, und das zeigt sich auch wieder an den vorangegangenen Aufgaben. Man sieht sie enthalten einen Auszug der Elementar-Algebra, und wer eine solche Reihe, wie sie unter den Rubriken (A) und (B) mitgetheilt sind, ganz ohne fremde Hülfe, in gegebener Frist lösen kann, der kennt diese Elemente ganz gewiss. Dass dieses nicht ganz leicht ist, dazu folgender Beleg. Ein junger Engländer war zwei Jahre bei mir, besuchte mit Nutzen Secunda und Prima unseres Gymnasiums, und war nicht ohne Talent für die Mathematik. Er ging nach Cambridge, blieb auch dort zwei Jahre, trieb daselbst besonders Mathematik, machte die Prüfung mit, und — fiel durch. Nicht wahr das klingt unglaublich? und dennoch ist es buchstäblich wahr. Ich weiss freilich nicht, ob er in der Algebra, oder in der Geometrie, die dort streng nach Robert Simson durchgemacht wird, deren Fragen aber sicherlich eben so leicht sind wie die algebraischen, nicht bestanden hat. Nur derjenige der häufig Prüfungen zu leiten hat, weiss es mit welcher hemmenden Kraft die Befangenheit wirkt.

Ich will nun nicht behaupten, dass wir unser Abiturientenexamen nach englischer Art einrichten sollten; aber unsere Vorschriften, nach denen wir in der Mathematik prüfen sollen, könnten gewiss besser sein. Sind die Aufgaben auch nur annähernd dem Zwecke der Prüfung entsprechend, so kann auch der geschickteste Schüler sie in 5 Stunden nicht ausarbeiten.

Gäbe man aber eine leichte geometrische Aufgabe, so könnte man dieselbe so einrichten, dass Alles darin läge worüber man prüfen sollte; und dann möchte der Schüler aufhören wo er wollte, an der Spur wäre denn der Löwe wohl vom Hasen zu unterscheiden.

*) Sollte es meine Zeit erlauben, so werde ich einmal auseinandersetzen, worin die Vorzüge dieses gediegenen Schulbuches nach meiner Ueberzeugung bestehen.

Digitized by Google

# XXXIV.

## Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

In den vortrefflichen „Beiträgen zu der Lehre von den positiven und negativen Grössen von Diesterweg; Bonn 1831, bei Habicht“ findet sich folgende erste geometrische Aufgabe:

Es ist ein Rechteck gegeben, und auf der Verlängerung einer Seite desselben ein Punkt; durch diesen soll man eine Gerade so legen, dass dadurch das Rechteck in zwei Paralleltrapeze zerschnitten wird und durch Zusammentreffen dieser Schnittlinie mit einer verlängerten Seite des Rechtecks ein Dreieck entsteht, welches zu einem jener Trapeze ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

Es wird, wobei Taf. V. Fig. 4. zu vergleichen, verlangt dass

$$(y+z)\frac{a}{2} : (b-y)\frac{x}{2} = p : t = (y+z)a : (b-y)x \text{ sei.}$$

Setzt man $p : t = a : r$, so wird

$$y+z : (b-y)x = 1 : r,$$

$$\text{oder } (y+z)r = (b-y)x \ldots\ldots (1)$$

Das ist also die zu lösende Gleichung, die zu der von Diesterweg angegebenen Construction führt, wenn man durch

$$s : m = y : z \text{ oder } s : m+s = y : y+z$$

und $s : y = x : b-y$ das $y$ und $z$ eliminirt und $x$ behält.

Wir wollen aber unsere Aufmerksamkeit auf $\varphi$ richten, wodurch die Aufgabe auch gelöst wird.

Es ist

$$y = s \text{ tg } \varphi \text{ also } y+z = (s+m) \text{ tg } \varphi$$

$$z = m \text{ tg } \varphi \text{ und durch Substitution in } \ldots (1)$$

$$x = \frac{b-y}{\text{tg } \varphi}$$

Digitized by Google

$$(s+m)\ \text{tg}\ \varphi\ .\ r=\frac{(b-y)^2}{\text{tg}\ \varphi}$$

$$(s+m)r\ \text{tg}\ \varphi^2=b^2-2by+y^2=b^2-2bs\ \text{tg}\ \varphi+s^2\ \text{tg}\ \varphi^2$$

$$((s+m)r-s^2)\ \text{tg}\ \varphi^2+2bs\ \text{tg}\ \varphi=b^2.$$

Man setze

$$(s+m)r-s^2=A$$

so ist

$$\text{tg}\ \varphi^2+2\frac{bs}{A}\ \text{tg}\ \varphi+\frac{b^2s^2}{A^2}=\frac{b^2s^2}{A^2}+\frac{b^2A}{A^2}=\frac{b^2}{A^2}(s^2+A)$$

$$=\frac{b^2}{A^2}(s+m)r$$

also

$$\text{tg}\ \varphi=\frac{b}{A}(-s\pm\sqrt{(s+m)r})=b\frac{s\mp\sqrt{(s+m)r}}{-A}=b\frac{s\mp\sqrt{(s+m)r}}{s^2-(s+m)r}.$$

Unterscheiden wir nun die beiden Auflösungen, so wird

$$\text{tg}\ \varphi'=b\frac{s-\sqrt{(s+m)r}}{(s-\sqrt{(s+m)r})\ (s+\sqrt{(s+m)r})}=\frac{b}{s+\sqrt{(s+m)r}}$$

$$\text{tg}\ \varphi''=b\frac{s+\sqrt{(s+m)r}}{(s+\sqrt{(s+m)r})\ (s-\sqrt{(s+m)r})}=\frac{b}{s-\sqrt{(s+m)r}}.$$

Es handelt sich mithin nur um eine bequeme Construction der Linie $\sqrt{(s+m)r}$, damit diese Auflösung eben so zierlich wie die von Diesterweg werde.

Einfach ist folgende Construction, wobei man Taf. V. Fig. 5. zu vergleichen hat.

$DL=DC=a$; $LM\parallel ED$. Man nehme $EP=p$ und $ET=t$; ziehe $MR\parallel PT$, so ist $ER=r$. Man halbire $DC$ in $V$ und mache $UV=VE$, so ist $EU=s+m$; beschreibe $QR\perp EU$ so ist $EQ=\sqrt{(s+m)r}$, folglich $NC=s+\sqrt{(s+m)r}$ und $N'C=s-\sqrt{(s+m)r}$. Ziehen wir endlich $EF\parallel NB$, so ist $FEC=\varphi'$, und wenn $EG'\parallel N'B$ gemacht wird, so ist $F'EC=\varphi''$.

Hier schliesst sich eins dem andern ganz natürlich an. Die speciellen Fälle lassen sich leicht nach den gefundenen Fällen discutiren. Auch ist der Winkel, den beide gesuchte Linien einschliessen, leicht aus den Formeln

$$\text{tg}\ \varphi''=\frac{b}{s-q}\ \text{ und }\ \text{tg}\ \varphi'=\frac{b}{s+q}\ \text{ zu ermitteln,}$$

indem $\frac{\text{tg}\ \varphi''-\text{tg}\ \varphi'}{1+\text{tg}\ \varphi''\ \text{tg}\ \varphi'}=\text{tg}\ (\varphi''-\varphi')=\frac{2bq}{s^2-q^2+b^2}$ ist.

Ich enthalte mich, um nicht zu weitläufig zu werden, aller weitern Bemerkungen über diese Aufgabe, die Manches darbietet was nicht ohne Interesse ist.

Digitized by Google

# XXXV.

## Aufgabe aus der analytischen Geometrie.

Von

Herrn C. Scherling

Lehrer der Mathematik und Naturkunde am Catharineum zu Lübeck.

---

**Es ist irgend ein Kegelschnitt und ein Punkt gegeben. Zieht man durch den Punkt gerade Linien, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten durchschneiden, so fragt es sich, auf welchem geometrischen Orte die Halbirungspunkte der von dem Kegelschnitte begrenzten Stücke der letztern liegen?**

Auflösung. Die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{2m}x^2$ stellt bekanntlich alle Kegelschnitte dar, wenn der Scheitel eines Durchmessers $(2m)$ als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird; nemlich eine Ellipse, wenn $m$ positiv, eine Hyperbel, wenn $m$ negativ, eine Parabel, wenn $m$ unendlich, und einen Kreis, wenn $p = 2m$ ist; in allen Fällen bedeutet $p$ den Parameter des Durchmessers $2m$.

Man lege nun durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des Kegelschnitts die Axe der $x$ (bei der Parabel parallel mit der Axe), die Axe der $y$ aber wieder durch den gegebenen Punkt und parallel mit dem conjugirten Durchmesser (bei der Parabel parallel mit der Tangente durch den Scheitel, in welchem die Axe der $x$ dieselbe schneidet); so hat man, wenn $\alpha$ die Abscisse des Scheitels des Durchmessers ist, welcher als Axe der $x$ dient, die Gleichung

$$y^2 = p(x-\alpha) - \frac{p}{2m}(x-\alpha)^2.$$

Legt man nun durch den gegebenen Punkt oder den Anfangspunkt der Coordinaten eine gerade Linie $y = ax$, so hat man für die Abscissen der Durchschnittspunkte die Gleichung

$$a^2x^2 = p(x-\alpha) - \frac{p}{2m}(x-\alpha)^2$$

oder

$$x^2 - \frac{2p(m+\alpha)}{2ma^2+p}\,x = -\frac{pa(2m+\alpha)}{2ma^2+p}.$$

Die beiden Werthe, welche diese Gleichung für $x$ liefert, stellen also die Abscissen der Durchschnittspunkte jener geraden Linie und des Kegelschnitts dar; die Abscisse der Mitte dieser Linie ist

Digitized by Google

aber bekanntlich gleich der halben Summe jener beiden, also gleich dem halben Coefficienten von $x$ in der letzten Gleichung mit entgegengesetztem Zeichen. Nennt man nun die Coordinaten des gesuchten geometrischen Ortes $x'$ und $y'$, um sie von den vorigen zu unterscheiden, so hat man jetzt

$$x' = \frac{p(m+\alpha)}{2m\alpha^2+p} \text{ oder } 2m\alpha^2 x' + px' = p(m+\alpha);$$

oder, wenn man mit $x'$ multiplicirt und bedenkt, dass die Coordinaten $x'$ und $y'$ immer auch der zugehörigen von $\alpha$ abhängigen Linie angehören, also immer auch $y' = \alpha x'$ ist,

$$2my'^2 + px'^2 = p(m+\alpha)x'$$

oder

$$y'^2 = \frac{p}{2m}(m+\alpha)x' - \frac{p}{2m}x'^2,$$

welches die Gleichung des gesuchten geometrischen Orts ist. Man sieht, dass die Halbirungspunkte immer wieder auf einem ähnlichen Kegelschnitte liegen, dessen Parameter $p' = \frac{p}{2m}(m+\alpha)$, und dessen Durchmesser für dieses Coordinatensystem $= m+\alpha$ ist. Setzt man $x=0$, so findet sich auch $y=0$, also geht die neue Curve durch den gegebenen Punkt. Setzt man $y=0$, so findet sich entweder $x=0$, oder $x=m+\alpha$, also geht die Curve durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts.

1. Es sei nun der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, so zeigt sich folgender merkwürdige Umstand. Nennt man den zu $2m$ gehörigen (conjugirten) Durchmesser $2n$ für die gegebene Curve, aber für die neue $2m'$ und $2n'$, so hat man

$$p' = \frac{2n'^2}{m'} = \frac{p}{2m}(m+\alpha) = \frac{n^2}{m^2} \cdot 2m';$$

also

$$2m^2n'^2 = 2m'^2n^2 \text{ oder } m' : n' = m : n.$$

Es haben also die zusammengehörigen conjugirten Durchmesser in der alten und neuen Curve einerlei Verhältniss. Da nun $m'$ bekannt ist ($= m+\alpha$), so lässt sich $n'$ mit Leichtigkeit finden; und so hat man gleich vier hervorstechende Punkte für den neuen Kegelschnitt, wodurch sein Lauf bestimmt ist.

2. Es sei ferner der Kegelschnitt eine Parabel, also $m=\infty$, so erhält man $y^2 = \frac{p}{2}x$; woraus hervorgeht, dass der Parameter der neuen Parabel gerade halb so gross ist, als der der alten, oder gleich der Subnormale derselben, woraus sich eine höchst einfache Construction ergiebt.

3. Es sei endlich der gegebene Kegelschnitt ein Kreis, also $p=2m$, so wird die Gleichung:

$$y^2 = (m+\alpha)x - x^2$$

oder, wenn wir $m+\alpha = 2r$ setzen,

$$y^2 = (2r-x)x \text{ oder auch } y^2 + (x-r)^2 = r^2,$$

welche Gleichung einen Kreis darstellt, dessen Mittelpunktsabscisse

Digitized by Google

$r = \frac{1}{2}(m + \alpha)$, und dessen Halbmesser eben so gross ist. Die Gleichung des gegebenen Kreises wird mit Leichtigkeit auf die Form gebracht

$$y^2 + (x - 2r)^2 = m^2,$$

wobei $2r$, wie oben, $m + \alpha$ bedeutet. Für den Fall nun, dass der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, müssen, sich offenbar die Kreise schneiden, und die gemeinschaftliche Chorde wird erhalten durch Subtraction der beiden Gleichungen; sie wird nemlich dargestellt durch die Gleichung

$$2rx = \alpha(2r + m) \text{ oder } x = \frac{\alpha(2r + m)}{2r}.$$

Die hier in Rede stehenden Coordinaten sind jedenfalls rechtwinklig; also sieht man, dass diese gemeinschaftliche Chorde auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Es lässt sich aber auch noch mit grosser Leichtigkeit nachweisen, dass die Durchschnittspunkte die Berührungspunkte der Tangenten sind, die man vom gegebenen Punkte nach dem gegebenen Kreise ziehen kann.

Sind $x'$ und $y'$ die Coordinaten eines Punktes ausserhalb des Kreises, und man zieht durch denselben zwei Tangenten, so ist die Gleichung der Chorde, welche die Berührungspunkte verbindet,

$$yy' + xx' = R^2,$$

wenn $R$ den Radius bedeutet, und die Gleichung aus dem Mittelpunkte zum Grunde liegt. Im gegenwärtigen Falle haben wir zu nehmen

$$yy' + (x - 2r)\ (x' - 2r) = m^2;$$

da aber der Punkt, durch den jetzt die Tangenten gezogen werden sollen, der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $y' = 0$, $x' = 0$, mithin ist

$$-2rx + 4r^2 = m^2 \text{ oder } 2rx = 4r^2 - m^2 = (2r + m)\ (2r - m)$$

$$\text{d. i. } 2rx = \alpha(2r + m),$$

dieselbe Gleichung, die wir vorher für die, beiden Kreisen gemeinschaftliche Chorde hatten; es ist mithin unsere Ordinatenaxe die Polare des Punktes $x = \frac{\alpha(2r + m)}{2r}$, $y = 0$; oder es ist dieser Punkt der Pol zu unserer Ordinatenaxe.

Bei der Ellipse und Hyperbel erhält man, falls der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kegelschnitts liegt, für die gemeinschaftliche Chorde einen ganz ähnlichen Ausdruck: man findet nemlich

$$x = \frac{\alpha(2m + \alpha)}{m + \alpha},$$

was ganz dasselbe ist, wie oben beim Kreise, wenn man $m + \alpha = 2r$ setzt. Dieser Werth nun aber, in die Gleichung der Curve gesetzt,



Digitized by Google

würde zwei absolut gleiche Werthe für $y$ geben; es wird also jedenfalls die gemeinschaftliche Chorde mit dem zugeordneten Durchmesser oder unserer Ordinatenaxe parallel und von der Axe der $x$ halbirt.

Am einfachsten stellt sich diese Eigenschaft der gemeinschaftlichen Chorde für die Parabel heraus, wo man erhält $x = 2a$, und also $y = \pm\sqrt{pa}$.

## Nachschrift des Herausgebers.

Bei dem ungemein grossen Reichthume der Mathematik hat es für den Herausgeber einer mathematischen Zeitschrift häufig grosse Schwierigkeit, sicher zu entscheiden, ob eine solche specielle Aufgabe wie die vorstehende nicht schon anderwärts behandelt worden ist. Auch zweifle ich kaum, dass dies bei der obigen wirklich der Fall ist, da dieselbe eigentlich nur eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes enthält, dass die Mittelpunkte aller parallelen Chorden einer jeden Linie des zweiten Grades in einer geraden Linie liegen, oder dass der geometrische Ort der Mittelpunkte aller einander parallelen Chorden einer jeden Linie des zweiten Grades eine gerade Linie ist. Da aber das Archiv nicht bloss absolut Neues mitzutheilen den Zweck hat, sondern auch schon bekannte, nur nicht in jedem Lehrbuche sich findende Sätze und Aufgaben aufnimmt, überhaupt auch eine gewisse praktische Richtung verfolgt, um Lehrern bei ihrem Unterrichte sich nützlich zu machen: so werde ich, wie früher, auch fernerhin keinen Anstand nehmen, auch solchen Aufsätzen, deren Inhalt mir zwar nicht absolut neu, aber doch instructiv, und den Zwecken, welche ich durch das Archiv zu erreichen beabsichtige, in irgend einer Beziehung förderlich zu sein scheint, die Aufnahme nicht zu versagen. Dabei versteht sich aber von selbst, dass ich auch Gegenreden immer sehr gern einen Platz in meiner Zeitschrift vergönnen werde; nur eigentliche scharfe Polemik, namentlich wenn sich dieselbe nicht bloss auf das rein Wissenschaftliche beschränken sollte, muss ich ganz von derselben entfernt halten, so wie ich selbst mir nie erlauben werde, ein Urtheil über einmal aufgenommene Aufsätze zu fällen oder dieselben mit kritisirenden Bemerkungen zu begleiten. Ich wünsche diese gelegentlichen Bemerkungen von den Lesern des Archivs als eine allgemeine Erklärung aufgenommen zu sehen.

Was übrigens die in dem obigen Aufsatze behandelte Aufgabe insbesondere betrifft, so scheint mir dieselbe ihres Interesses wegen wohl auch eine ganz allgemeine analytische, von der allgemeinen Gleichung der Linien des zweiten Grades ausgehende Behandlung zu verdienen. Vielleicht möchte auch eine rein geometrische Auflösung derselben zu bemerkenswerthen Resultaten führen.

Digitized by Google

# XXXVI.

## Fibonacci, der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über die Algebra *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Unter der Menge kleiner Staaten, in welche Italien gegen Ende des 12ten Jahrhunderts getheilt war, zeichneten sich besonders die Republiken Venedig, Genua, Pisa aus, deren Hauptstädte während der Zeit der Kreuzzüge sich des ganzen Handels nach dem Orient bemächtigt hatten. Sie waren dadurch reich, mächtig, blühend geworden. Genuesische und Pisanische Kaufleute hatten Niederlagen auf der Nordküste Afrikas, auf den Inseln des Archipelagus, in allen grossen Städten des Orients, und kamen hier überall mit den Arabern in Berührung, die damals die Träger der Wissenschaften waren. Auf ihren Reisen dahin sammelten die italienischen Kaufleute ausser ungeheuern Reichthümern einen Schatz neuer Anschauungen und neuer Kenntnisse, die sie wiederum in ihrer Heimath verbreiteten. So erhielten die Christen von den Arabern fast gleichzeitig die Algebra und die Boussole, so wie auch die Philosophie des Aristoteles.

Ein Kaufmann aus Pisa, Leonardo Fibonacci **), ist der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über Algebra. Von den Lebensumständen dieses Mannes kennen wir nur das Wenige, was er selbst in der Vorrede zu seinem ersten und wichtigsten Werke, dem Abbacus, das im Jahre 1202 lateinisch geschrieben ist, erwähnt. Leonardo war noch Knabe, als ihn sein Vater, der die Rechte der pisanischen Kaufleute an der Douane von Bougia in Afrika wahrnahm, zu sich rief, um ihn seines künftigen Berufes wegen in der Arithmetik unterrichten zu lassen. Die Nordküste Afrika's war damals im Besitz der Araber, welche besonders die

*) Nach Libri hist. des math. en Italie Tom. II. gearbeitet.

**) Der Name Fibonacci ist aus filius Bonacci zusammengezogen, denn das Manuscript des Abbacus in der Magliabechischen Bibliothek zu Florenz aus dem 14ten Jahrhundert beginnt mit den Worten: Incipit liber abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci pisano, in anno 1202. Zahlreiche Beispiele ähnlicher Zusammenziehungen finden sich noch jetzt in toscanischen Familiennamen.



Digitized by Google

Algebra mit Hülfe des indischen Zahlensystems, das sie sich angeeignet, weiter ausgebildet hatten. Hier lernte Leonardo das indische Zahlensystem kennen. Auf seinen Reisen, die er später durch Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und die Provence in Handelsgeschäften unternahm, überzeugte er sich besonders von den Vortheilen, die dasselbe vor allen andern, in jenen Ländern angenommenen Rechnungsweisen voraus hatte. Desshalb beschäftigte er sich ernstlich damit, benutzte die Geometrie des Euklid und verfasste so das oben erwähnte Werk in 15 Capiteln, von denen das letzte eine Abhandlung über Algebra enthält, auf die wir weiter unten zurückkommen werden. Vom Jahre 1202, wo Fibonacci zuerst den Abbacus herausgab, bis 1220 fehlen alle Nachrichten über unsern Schriftsteller; im letztern erschien von ihm ein zweites Werk, practica geometriae *), worauf 1228 eine zweite Ausgabe des Abbacus mit Zusätzen folgte. Ausser diesen beiden Schriften verfasste Fibonacci noch eine Abhandlung über die Quadratzahlen (man weiss nicht, in welchem Jahre), deren Manuscript sich in neuester Zeit nicht wieder hat auffinden lassen, die aber nach den Zeugnissen von Lucas Paciolo und Ghaligai sehr geistreiche Untersuchungen über die Zahlen enthielt.

Das ist Alles, was sich über Fibonacci's Lebensumstände beibringen lässt. Kein gleichzeitiger Historiker gedenkt seiner; desshalb ist auch das Jahr seines Todes unbekannt. Nur das weiss man noch, dass Fibonacci von seinen Mitbürgern mit dem Spottnamen Bigollone belegt wurde, indem er wahrscheinlich ganz seinen liebgewonnenen Studien sich hingab, und den Handel, die beliebteste Beschäftigung seiner Mitbürger, vernachlässigte. Seine Werke blieben bis auf unsere Tage in dem Staube der Bibliotheken vergraben; Commandin, der gelehrte Uebersetzer der griechischen Geometer, gedachte einst die Practica geometriae durch den Druck zu veröffentlichen, aber der Tod hinderte ihn daran.

Unter den Schriften Fibonacci's ist das wichtigste der Abbacus, das, wie schon erwähnt, in 15 Capitel getheilt ist **) und unter

*) Der vollständige Titel desselben ist: Incipit pratica geometrie composita aleonardo Bigollosio fillio Bonacii pisano, in anno MCCXXI.

**) Das Inhaltsverzeichniss derselben möge hier eine Stelle finden:

1) De cognitione novem figurarum Yndorum et qualiter cum eis omnis numeris scribatur, et qui numeri et qualiter retineri debeant in manibus et de introductionis abbaci.
2) De multiplicatione integrorum numerorum.
3) De additione ipsorum ad invicem.
4) De extractione minorum numerorum ex majoribus.
5) De divisione integrorum numerorum per integros.
6) De multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis, atque ruptorum sine sanis.
7) De additione et extractione et divisione numerorum integrorum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.
8) De emptione et venditione rerum venalium et similium.
9) De barattis rerum venalium et de emptione bolsonaliae et quibusdam regulis similibus.
10) De societatibus factis inter consocios.
11) De consolamine monetarum atque eorum regulis quae ad consolamen pertinent.

Digitized by Google

andern eine Darstellung des indischen Zahlensystems und in dem letzten Capitel eine Abhandlung über Algebra enthält. Da dieses Capitel in dem 2ten Theile von Libri's Geschichte der Mathematik in Italien vollständig abgedruckt ist, so können wir uns genau von seinem Inhalte überzeugen. Es besteht aus 3 Theilen: in dem ersten ist über Proportionen, im zweiten über geometrische Probleme, im dritten über Algebra gehandelt. Dieser letzte Theil ist der interessanteste des ganzen Werks; jedoch zeigt eine Vergleichung desselben mit dem bekannten Werke Mohammed ben Musa's, dass Fibonacci bei der Abfassung desselben das berühmte Werk dieses arabischen Schriftstellers vor sich hatte und darnach arbeitete. Er giebt zuerst dieselben Erklärungen, betrachtet darauf dieselben sechs Fälle von Gleichungen, nämlich drei einfache, wohin die Gleichungen von der Form

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = b,\ x = a$$

gehören, und drei zusammengesetzte, d. h. Gleichungen von der Form

$$ax^2 + bx = c,\ x^2 = ax + b,\ x^2 + a = b.$$

Bei der Lösung dieser Fälle verfährt Fibonacci ebenso ganz auf dieselbe Weise, wie Mohammed ben Musa; er giebt immer zuerst numerische Beispiele, darauf die allgemeine Regel für die Lösung jedes einzelnen Falles ohne Beweis. In allen Fällen werden, ebenfalls nach dem Beispiel der Araber, sämmtliche Glieder der Gleichungen als positiv angenommen. Zuletzt folgt der Beweis, der in einer geometrischen Construction der Gleichung besteht. Das Ganze beschliesst eine Menge von Aufgaben, von denen jede auf einen der oben erwähnten sechs Fälle zurückgeführt wird.

Demnach scheint dieser algebraische Theil nur eine Bearbeitung des oben erwähnten arabischen Werkes zu sein. Die Wissenschaft selbst ist hier von Fibonacci nicht weiter gefördert, denn er lässt ebenso wie die Araber, die zweite Wurzel bei der Lösung der Gleichungen des zweiten Grades unberücksichtigt; ja er ist nicht einmal so weit gegangen, als Mohammed ben Musa, der die Existenz der zweiten Wurzel wenigstens für die Gleichung $ax^2 + b = cx$ angedeutet hatte.

Wir sind jedoch weit entfernt, diesen Mangel Fibonacci zum Vorwurf zu machen; seine Schriften zeichnen sich nicht allein vor denen seiner Zeitgenossen, sondern auch vor denen eines Baco, eines Raimundus Lullus, eines Albert des Grossen, die nach ihm schrieben und die ausgezeichnetsten Männer ihrer Zeit waren, rühmlichst aus, indem sie nur Wahrheiten enthalten, anstatt dass man in den Werken der damaligen Zeit den finstersten Aberglauben mit einzelnen richtigen Aussprüchen und Urtheilen gepaart findet.

---

12) De Solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.

13) De regula eleatayin, qualiter per ipsum fere omnes erraticae quaestiones solvantur.

14) De reperiendis radicibus quadratis et cubiis et multiplicatione et divisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicium.

15) De regulis et proportionibus geometriae pertinentibus, de quaestionibus algebrae et almachabelae.

Digitized by Google

Fibonacci hatte auch bei der Abfassung seines Abbacus nur das rein Praktische im Auge *); er wollte seine Mitbürger mit den Vortheilen bekannt machen, die das indische Zahlensystem in der Rechnung vor denen voraus hatte, die bisher in Italien und andern Ländern gebräuchlich waren. Dies ist sein Hauptverdienst, wofür ihm die Nachwelt den grössten Dank schuldig ist. —

Da aber die übrigen Schriften Fibonacci's erwähnt worden sind, so möge jetzt noch eine kurze Beschreibung derselben folgen. Die Practica geometriae ist ein sehr voluminöses Werk, das in 8 Distinctionen eingetheilt ist und von dem verschiedene Manuscripte existiren, die beweisen, dass es der Verfasser mehrmals überarbeitet hat. Den Hauptinhalt desselben bilden Untersuchungen über die Ausmessung der Körper; besonders zu bemerken ist aber, dass darin das Theorem vorkommt, in welchem die Fläche eines Dreiecks durch die 3 Seiten bestimmt wird, ein Satz, der sich schon in den Schriften Brahmeguxta's findet **). Fibonacci hat ihn wahrscheinlich aus einer Schrift des Juden Savosarda entlehnt, der im 12ten Jahrhundert lebte und dessen Werk von Plato von Tivoli ins Lateinische übersetzt ist. Indessen werden auch in der Practica geometriae algebraische Gegenstände abgehandelt; so findet sich in der zweiten Distinction die Ausziehung der Quadratwurzeln, in der fünften die der Cubikwurzeln und am Ende des Werks Probleme aus der unbestimmten Analysis.

Fibonacci hat auch eine Abhandlung über die Quadratzahlen geschrieben, die von ihm selbst, von Lucas Paciolo, Ghaligai, Xylander und Baldi erwähnt wird, die aber in neuester Zeit nicht wieder hat aufgefunden werden können. Paciolo hat einen Theil derselben seiner Summa arithmetica einverleibt, und Ghaligai scheint alles das daraus entnommen zu haben, was er über unbestimmte Analysis sagt. Aus einer Vergleichung beider Schriften lässt sich die Behauptung Xylander's, Fibonacci habe diese Abhandlung aus der Arithmetik des Diophantus entlehnt, zurückweisen; beide haben keine Aehnlichkeit mit einander. Fibonacci giebt unter andern darin die Summe der Reihe der natürlichen Zahlen, die ihrer Quadrate, so wie auch die allgemeine Formel zur Bildung arithmetischer Dreiecke; es findet sich auch daselbst die Lösung eines besondern Falles von dem schwierigen Problem: eine Quadratzahl zu finden, so dass, wenn man zu derselben eine gegebene Zahl addirt oder davon subtrahirt, sie immer ein Quadrat bleibt.

---

*) Sane hic liber magis quam ad theoricam spectat ad practicam, sagt er in der Vorrede.

**) Vergl. die historischen Notizen, die Chasles über dieses Theorem in seiner Geschichte der Geometrie (p. 480 ff. der Uebersetzung von Sohnke) beibringt. Derselbe sagt, dass es sich in der Practica geometriae nach der Art der Araber bewiesen findet; hieraus könnte man schliessen, dass Fibonacci es unmittelbar von den Arabern entlehnt habe, und nicht von Savosarda, wie Libri meint, zumal da in dem Werke des letztern der Beweis fehlt.

Digitized by Google

# XXXVII.

## Ueber den Ursprung und die Verbreitung unseres gegenwärtigen Zahlensystems *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Zwischen Libri und Chasles, dem Verfasser des „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie etc. Brux. 1837" (ins Deutsche übersetzt von Sohnke) ist in neuester Zeit ein heftiger Streit über den Ursprung unseres gegenwärtigen Zahlensystems ausgebrochen. Jener behauptet, dass die Christen dasselbe den Arabern zu verdanken hätten und dass namentlich Fibonacci zuerst die Kenntniss desselben verbreitet habe; dieser meint, dass unser Zahlensystem aus dem der Griechen und Römer entstanden sei, und will das erste Vorkommen desselben den Werken des Boetius vindicirt wissen, der es wiederum den Pythagoräern zuschreibt. Libri hat jedoch die kühnen Hypothesen und irrigen Ansichten des letzteren genügend widerlegt, und Chasles selbst hat in einer Note am Ende seines Werkes seinen Irrthum bekannt. Die Stelle des Boetius, auf welche Chasles seine Ansichten basirt und die man in dem oben genannten Werke vollständig abgedruckt findet, beweist weiter nichts, als dass man sich zur Zeit des Boetius gewisse Abkürzungen in der Multiplication und Division erlaubte, und besonderer Kunstgriffe und Zeichen dabei bediente, wie es schon seit den ältesten Zeiten Sitte war, und die Fibonacci auch auf seinen Reisen fand. Chasles hatte sich durch diese Stelle zu der offenbar irrigen Ansicht verleiten lassen, dass die Zahlensysteme der Griechen und Römer von dem unsrigen nur wenig verschieden wären, denn beiden läge eine Progression nach Zehn zu Grunde und beide drückten irgend eine Zahl auf dieselbe Art durch Einer, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. aus mit Hülfe der neun Grundzahlen Eins, Zwei, Drei, . . . . . Neun. Aber es ist bekannt, dass unser Zahlensystem von denen der Alten sich

*) Ausser Libri hist. des math. en Italie ist hierbei noch benutzt Chasles Geschichte der Geometrie übersetzt von Sohnke, und Hüllmann über das Städtewesen des Mittelalters.

Digitized by Google

hauptsächlich dadurch unterscheidet, dass einmal in dem unsrigen der Werth der Ziffern von ihrer Stellung abhängt, und zweitens dass wir aus den neun Zahlzeichen mit Hülfe der Null, deren lateinischer Name Zephirum offenbar arabischen Ursprungs ist, alle Zahlen bilden, anstatt dass die Griechen und Römer zur Bildung der Zahlen über Zehn hinaus neuer Zeichen sich bedienten. Ausserdem werden auch unsere gegenwärtigen Zahlzeichen von allen christlichen Schriftstellern, die in der frühesten Zeit über Arithmetik und Algebra schrieben, wie Fibonacci, Sacrobosco, Jordanus, Valla, u. a. m. indische genannt.

Eine andere Frage ist aber die, ob nicht vielleicht schon vor Fibonacci unser gegenwärtiges Zahlensystem von den Arabern zu den Christen herübergekommen ist. Libri sagt, es gäbe Manuscripte von ungewissem Datum, die vor dem Jahre 1202 abgefasst zu sein schienen und in welchen sich neun Zahlzeichen fänden, deren Werth von ihrer Stelle abhinge; aber sie schienen sämmtlich von Juden geschrieben oder von Christen während ihres Aufenthaltes bei den Mauren in Spanien, und entschieden desshalb nichts über die erste Einführung unseres Zahlensystems bei den Christen *). Nun ist es aber bekannt, dass es namentlich die Juden waren, welche den Verkehr zwischen Arabern und Christen vermittelten. Ueberall zerstreut und mit Handel beschäftigt hatten sie sich in Asien, in Europa und Afrika ausgebreitet. Die zahlreichen Synagogen, welche sie im Süden Frankreichs, in Spanien und Italien hatten, correspondirten mit einander. Sie übersetzten eine grosse Menge griechischer und arabischer Werke über Astronomie, Philosophie und Medicin. Sollten sie bei diesem Geschäfte sich nicht auch mit dem Inhalte der Werke, die sie unter den Händen hatten, befasst, und die arabischen Zahlzeichen, die überall in diesen Werken vorkommen mussten, bloss copirt haben, ohne ihren Werth kennen zu lernen? Es lässt sich wohl annehmen, dass sie bei ihren fortwährenden Correspondenzen auch einander ihre Kenntnisse mittheilten, und dass eine Mittheilung des arabischen Zahlensystems, das vor allen übrigen damals gebrauchten so grosse Vortheile gewährte, an ihre Glaubensgenossen, bei ihrem entschiedenen Hange zu Handel und Gewinn, gewiss nicht unterblieb. Gleichwohl muss man gestehen, dass alles das, was von den Juden, einem verachteten und mannichfach gedrückten Volke ausging, von den sich erhaben dünkenden Christen verabscheut wurde.

Was nun aber die Christen betrifft, die nach Spanien gingen, um sich bei den Mauren zu unterrichten, so ist wohl nicht wahr-

*) Libri bleibt in seinen Behauptungen nicht consequent; denn auf Seite 298 ff. führt er ein Manuscript an, das im Jahre 1134 mit Hülfe eines Juden aus dem Arabischen übersetzt ist und Arithmetik enthält. Ainsi ce manuscript, fährt er fort, ne peut fournir aucun argument contre la priorité de l'Abbacus de Fibonacci, qui cependant (comme nous le reconnaissons avec la plupart de ceux qui ont discuté ce point de l'histoire des sciences) n'a pas été le premier ouvrage latin où l'on ait employé les chiffres arabes, mais qui, jusqu'à ce que d'autres faits viennent prouver le contraire, doit être considéré comme le premier traité avec date certaine écrit originairement en latin par un Chrétien, où les règles de la nouvelle arithmétique se trouvent exposées.

Digitized by Google

scheinlich, dass sie ihre dort erworbenen Kenntnisse für sich behielten und die Ausbreitung derselben unter ihren Landsleuten unterliessen. Als Beispiel mag hier der bekannte Gerbert erwähnt werden, der zu seiner Ausbildung nach Spanien zu den Sarazenen gegangen war und nach seiner Rückkehr, im Jahre 999 unter dem Namen Sylvester II. den päpstlichen Stuhl bestieg. Auf seinem Rückwege verbreitete er eifrigst seine Kenntnisse, aber die Unwissenheit seiner Zeitgenossen war so ungeheuer, dass man ihn seiner neuen Lehren wegen verketzerte und der Magie anklagte. Seine geometrischen Schriften behandeln zwar nur die elementarsten Gegenstände, aber unmöglich kann diess Anlass zu zweifeln geben, ob Gerbert wirklich seine Kenntnisse den Arabern verdankt, wie Chasles zu behaupten geneigt ist; vielmehr beweist es meiner Meinung nach, dass Gerbert ein guter Pädagog war, der erkannte, dass die hohen Kenntnisse, die er bei den Arabern gewonnen hatte, für seine Landsleute eine zu unverdauliche Speise waren. Von grösserer Wichtigkeit scheinen seine arithmetischen Schriften zu sein, die grösstentheils noch unedirt in der Bibliothek des Vatikan liegen. Es findet sich darin nach der Behauptung Chasles ein Zahlensystem, von dem damals gebräuchlichen lateinischen verschieden ist. Der Thätigkeit und dem Lehreifer Gerberts verdankte namentlich die Schule zu Rheims ihre Blüthe. Wissbegierige Männer strömten aus Frankreich und Deutschland herbei, um sich unter ihm zu bilden, und die hinterlassenen Manuscripte eines Adalboldus, Bischofs von Utrecht, eines Heriger, Abts von Laubes, und Bernelius, die sämmtlich seine Schüler waren, beweisen, dass Gerbert denselben seine bei den Arabern gewonnenen Kenntnisse mittheilte. Sie setzten das angefangene Werk ihres Meisters eifrigst fort, und noch im 12ten Jahrhundert gewährten die Bäume Schatten und Früchte, welche Gerbert im 10ten zu Rheims gepflanzt hatte. Durch Sprösslinge davon sind in Frankreich und Deutschland verschiedene Stämme unmittel- oder mittelbar veredelt worden. Solange jedoch die bisher in dem Staube der Bibliotheken vergraben liegenden Manuscripte nicht veröffentlicht werden, lässt sich über die Thätigkeit und Wirksamkeit Gerberts, wie seiner Schüler, nichts behaupten, und Franzosen und Deutsche müssen vor der Hand zugestehen, dass zuerst von Italien aus durch Fibonacci unser gegenwärtiges Zahlensystem in Europa verbreitet worden ist. Das steht allerdings fest, dass in Deutschland die Geistlichen, denen die Sorge des Unterrichts oblag, im 11ten, 12ten, 13ten Jahrhundert an nichts weniger dachten, als für Bildung thätig zu sein. Seitdem hohe, wie niedrige Stellen käuflich wurden, seitdem die hohe, wie die niedrige Geistlichkeit dahin strebte, immer mehr weltliche Macht sich zu verschaffen, seitdem jene den lebhaftesten Antheil an der Politik nahm, und diese sich sogar mit Handel befasste, da gingen auch die letzten Spuren der ächten, wissenschaftlichen Bildung verloren. Der Unterricht beschränkte sich auf nothdürftiges Lesen und Schreiben. Es blieb ihnen keine Zeit übrig, an ihre eigene Ausbildung zu denken, fortwährende Streitigkeiten mit den Bürgerschaften, in deren Nähe sie wohnten, über Gerichtsbarkeit und weltliche Macht nahmen ihre ganze Thätigkeit in Anspruch, und sie hielten mit aller Gewalt, die ihnen zu Gebote stand, das Volk in Unwissenheit zurück und hinderten jedes kühne Emporstreben.

Digitized by Google

Dies änderte sich jedoch, als in Folge der Kreuzzüge ein kräftiger Bürgerstand sich zu bilden anfing, der sich besonders mit Handel beschäftigte und zur Förderung des Kunstfleisses sehr thätig war. Zur Zeit Friedrichs II, des grossen Hohenstaufen, kam eine grosse Handelsstrasse von Wien nach Venedig in Gang, da um diese Zeit Constantinopel aufhörte, Hauptniederlage der morgenländischen Güter zu sein und die Venetianer dieselbe in ihrer Stadt einrichteten. Schon seit der Mitte des 13ten Jahrhunderts zogen die reichen Kaufleute von Augsburg, Nürnberg, Ulm, Memmingen, über die Alpen nach Venedig, und 1268 dachte man daselbst auf die Anlegung eines eigenen Kaufhauses für die Deutschen. Aber nicht allein gingen deutsche Kaufleute nach Italien und verweilten dort längere oder kürzere Zeit, sondern auch Italiener, besonders Venetianer, Florentiner, Lombarden, besuchten die grossen Handelsplätze Mitteleuropas, und erhielten die Erlaubniss, sich daselbst häuslich niederzulassen. Grösstentheils war das Wechselwesen in Deutschland, Frankreich, England, in den Niederlanden in den Händen Italienischer Kaufleute, von denen die meisten aus der Lombardei und Toscana gebürtig waren, besonders aus Florenz und Siena. Damals, bei diesem wechselseitigen Verkehr, geschah es wahrscheinlich, dass die Deutschen zum zweiten Male mit unserem gegenwärtigen Zahlensysteme bekannt wurden, nachdem der von Gerbert ausgestreute Same längst spurlos verschwunden war. Denn Libri zeigt, dass es damals in allen Städten Italiens Mathematiker gab, besonders in Florenz, wo lange Zeit die von Fibonacci gegründete Schule blühte. Alle Bibliotheken Italiens, Frankreichs, Englands und Deutschlands enthalten eine Menge Manuscripte, die von Italienern über verschiedene mathematische Gegenstände im 14ten und 15ten Jahrhundert geschrieben worden sind, und in einigen wird ausdrücklich bemerkt, dass sie für Kaufleute bestimmt waren, für welche die Kenntniss der Algebra Bedürfniss war. Gewiss brachten damals auch deutsche Kaufleute solche Manuscripte in ihre Heimath oder im Auslande lebende Italiener verbreiteten sie in ihrem neuen Vaterlande. Und wahrlich, es gereicht Deutschland zur Ehre, dass dieser neue Same auf keinen unfruchtbaren Boden fiel; denn in der That, seit dem Anfange des 16ten Jahrhunderts wurde in Deutschland und von Deutschen eine Menge, namentlich arithmetischer Schriften, verfasst, deren Titel „die coss, Wälsche Practica, u. s. w.“ zwar italienischen Ursprung verrathen, die aber nichts destoweniger der Deutschen eigenthümliche Fortschritte in der Behandlung der Arithmetik zeigen *). Hierher gehört besonders der Gebrauch der Zeichen + und —, die nach Libri's ausdrücklicher Bemerkung in den Manuscripten italienischer Mathematiker dieser Zeit nicht vorkommen. Gewiss wird auch noch mehr dergleichen, was den Deutschen zum Ruhme gereicht, zu Tage gefördert werden, wenn ein deutscher Mathematiker, der Gelegenheit hat, die Bibliotheken Nürnberg's, Wien's, München's, Augsburg's u. s. w. zu benutzen, sich mit der Lösung der von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1842 ge-

*) Vergl. Drobisch de Joan. Widmanni Egerani Compendio Arithmeticae mercatorum, wo p. 33. gezeigt wird, dass Rechnungsbeispiele aus dem Abbacus Fibonacci's sich bei Weidmann finden.

Digitized by Google

stellten Preisaufgabe befassen sollte, ob es nämlich vor Rudolff von Jauer deutsche Kossisten gegeben habe, welche die Algebra auf eigenthümliche Weise ausbildeten.

# XXXVIII.

## Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Im ersten Theile von Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben findet sich folgendes Problem in §. 149. vorgelegt: aus den drei Spitzen eines gegebenen Dreieckes wird ein Thurm gesehen, dessen Fuss mit dem Dreiecke in Einer Ebene liegt; die Winkel, unter welchem er aus denselben erscheint, sind gegeben: man soll die Entfernung des Thurmes von jedem dieser drei Punkte finden. Die Lösung hat der Verfasser dadurch erhalten, dass er zwei Hülfslinien einführt, $x$ und $y$, welche zuletzt aus zwei Gleichungen gefunden werden müssen, von denen die eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade ist. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind aber bereits so zusammengesetzt und so wenig elegant oder symmetrisch gebaut, dass Meier Hirsch sich begnügt hat, die erwähnten Endgleichungen aufzustellen und die wirkliche Entwickelung von $x$ und $y$ auf die jedesmalige numerische Rechnung zu verweisen.

Indessen lässt die vorgelegte Aufgabe eine sehr einfache und auch ziemlich elegante Lösung zu. Bezeichnet man nämlich die Winkel des gegebenen Dreieckes mit $ABC$, ihre Gegenseiten mit $abc$, die Höhe des Thurmes mit $h$, seine Abstände von den Dreiecksspitzen $ABC$ bezüglich mit $a_1 b_1 c_1$, ferner die zwischen $a_1$ und $c_1$ und zwischen $b_1$ und $c_1$ am Fusse des Thurmes liegenden Winkel respective mit $o$ und $u$, und nennt endlich die Winkel, unter welchen der Thurm von $ABC$ aus gesehen wird, der Reihe nach $\alpha\beta\gamma$, so ist die Auflösung in folgenden einfachen Formeln enthalten:

$$\cos(C+o+u) = \frac{a^2 \cot^2\alpha + b^2 \cot^2\beta - c^2 \cot^2\gamma}{2ab \cot\alpha \cot\beta}$$

Digitized by Google

$$h^2 = \frac{c^2}{\cot^2\alpha + \cot^2\beta - 2\cot\alpha\cot\beta\cos(o+u)}$$

$$a_1 = h\cot\alpha,\ b_1 = h\cot\beta,\ c_1 = h\cot\gamma.$$

Die Aufgabe hat übrigens eine doppelte Lösung, da $C+o+u$ kleiner oder grösser als 180° sein kann. Die Gründe, auf welchen vorstehende Formeln beruhen, sind sehr einfach. — Es bildet nämlich der Fusspunkt des Thurmes mit den Spitzen des gegebenen Dreieckes ein Viereck. Nun habe ich aber in einem bereits früher in diesem Archive mitgetheilten Aufsatze, die trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes betreffend, den Satz bewiesen, dass in jedem beliebigen Viereck das Quadrat des Produktes beider Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate von den Produkten je zweier Gegenseiten, weniger dem doppelten Produkte aller vier Seiten in den Cosinus der Summe zweier Gegenwinkel. Dies auf das vorliegende Viereck angewendet giebt die Gleichungen:

$$a^2a_1^2 = b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2bb_1cc_1\cos(C+o+u)$$
$$b^2b_1^2 = a^2a_1^2 + c^2c_1^2 - 2aa_1cc_1\cos(B-o)$$
$$c^2c_1^2 = a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2bb_1aa_1\cos(A-u)$$

Substituirt man hierin die Werthe von $a_1b_1c_1$ aus den Gleichungen

$$a_1 = h\cot\alpha,\ b_1 = h\cot\beta,\ c_1 = h\cot\gamma$$

so fällt $h^2$ als gemeinschaftlicher Factor auf beiden Seiten ganz heraus, und man erhält:

$$2bc\cot\beta\cot\gamma\cos(C+o+u) = a^2\cot^2\alpha + b^2\cot^2\beta - c^2\cot^2\gamma$$
$$2ac\cot\alpha\cot\gamma\cos(B-o) = a^2\cot^2\alpha - b^2\cot^2\beta + c^2\cot^2\gamma$$
$$2ab\cot\alpha\cot\beta\cos(A-u) = a^2\cot^2\alpha + b^2\cot^2\beta + c^2\cot^2\gamma$$

woraus die Winkel $o$ und $u$ gefunden werden. Nur bleibt hierbei die in der Natur dieser Aufgabe liegende Zweideutigkeit zurück, ob

$$C+o+u \gtrless 180°\ \text{und mithin}\ B \lessgtr o\ \text{und}\ A \lessgtr u$$

ist, d. h. ob der Fuss des Thurmes innerhalb oder ausserhalb des um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreises liegt. Lässt sich dieser Punkt nicht anders woher entscheiden, so hat die Aufgabe zwei Lösungen. Es ist nun aber ferner

$$c^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos(o+u)$$
$$= h^2(\cot^2\alpha + \cot^2\beta - 2\cot\alpha\cot\beta\cos(o+u))$$

woraus sich sofort $h$ und mit dessen Hülfe unmittelbar $a_1b_1c_1$ ergiebt. Wollte man der Sicherheit der Rechnung halber oder aus einem anderen Grunde alle drei Werthe von $h$ berechnen, so würde die Rechnung am schicklichsten nach folgenden transformirten Ausdrücken angestellt werden. Man setze

$$a\cot\alpha = \mathfrak{a},\quad b\cot\beta = \mathfrak{b},\quad c\cot\gamma = \mathfrak{c}$$

so ist

Digitized by Google

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A-u) = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{(a+b+c)\,(-a+b+c)}}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(B-o) = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(-a+b+c)}{(a+b+c)\,(a-b+c)}}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(C+o+u) = \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)\,(-a+b+c)}{(a+b+c)\,(a+b-c)}}$$

dann berechne man die Hülfswinkel $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ aus den Gleichungen:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos 2\beta \cos 2\gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma \cos u$$

$$\cos 2\varphi_2 = \cos 2\alpha \cos 2\gamma + \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos o$$

$$\cos 2\varphi_3 = \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos (o+u)$$

so wird

$$h = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\varphi_1} = \frac{b \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\varphi_2} = \frac{c \sin\alpha \sin\beta}{\sin\varphi_3}$$

woraus sich wiederum $a_1 b_1 c_1$ unmittelbar ergeben. — Beispielshalber füge ich noch die Resultate einer Rechnung bei, die nach folgenden Daten geführt wurde:

$$c = 1370{,}059 \quad \gamma = 9^\circ\ 54'$$
$$b = 870{,}447 \quad \beta = 10^\circ\ 35'$$
$$a = 707{,}295 \quad \alpha = 12^\circ\ 14'.$$

Dies gab zuvörderst:

$$C = 120^\circ\ 11'\ 8'',88 \text{ und } \mathfrak{c} = 7850{,}085$$
$$B = 33\ 18\ 39{,}66 \qquad \mathfrak{b} = 4658{,}687$$
$$A = 26\ 30\ 11{,}46 \qquad \mathfrak{a} = 3262{,}180.$$

Hieraus ergab sich nun in dem einen Fall, nämlich $A < u$,

$$o+u = 75^\circ\ 23'\ 25'',96 \quad c_1 = 1282{,}52$$
$$o = 42\ 28\ 50{,}00 \quad b_1 = 1197{,}98 \quad h = 223{,}836$$
$$u = 32\ 54\ 35{,}96 \quad a_1 = 1032{,}37$$

für den andern Fall $A > u$ hingegen wurde

$$o+u = 44^\circ\ 14'\ 16'',28 \quad c_1 = 2058{,}26$$
$$o = 24\ 8\ 29{,}32 \quad b_1 = 1922{,}59 \quad h = 359{,}224$$
$$u = 20\ 5\ 46{,}96 \quad a_1 = 1656{,}81$$

gefunden.

---

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass das Pothenot'sche Problem sich mittelst der von mir für das geradlinige Viereck aufgefundenen Relationen ebenfalls sehr schnell und direkt lösen lässt. Behält man nämlich die Bezeichnung des Vorhergehenden bei, indem man den Fusspunkt des Thurmes als vierten Punkt betrach-

Digitized by Google

tet, der durch die gemessenen Winkel $o$ und $u$ gefunden werden soll, so ist jederzeit, wenn man zur Abkürzung die Hülfsgrössen $\alpha\beta\gamma$ mittelst der Gleichungen

$$\alpha \sin (A-u) = a$$
$$\beta \sin (B-o) = b$$
$$\gamma \sin (C+o+u) = c$$

einführt, unmittelbar und ganz allgemein:

$$a_1 = \frac{\beta\gamma \sin (A-u)}{\pm\sqrt{\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos u}}$$

$$b_1 = \frac{\alpha\gamma \sin (B-o)}{\pm\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-2\gamma\cos o}}$$

$$c_1 = \frac{\alpha\beta \sin (C+o+u)}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos (o+u)}},$$

wobei von den beiden Zeichen im Nenner stets dasjenige genommen werden muss, was die Werthe von $a_1 b_1 c_1$ positiv macht.

---

# XXXIX.

## Einige Eigenschaften der binomischen Koeffizienten.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Wien.

---

1. Eine wichtige Rolle spielen die Binomialkoeffizienten bei folgender Untersuchung:

Es sollen die Bedingungen aufgefunden werden, unter welchen die beiden unendlichen Reihen

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots \quad (1)$$

$$b_1\left(\frac{x}{1+x}\right) + b_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + b_3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots + b_{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1} + \ldots \quad (2)$$

deren Convergenz vorausgesetzt wird, identisch sind.

Digitized by Google

Man erhält aus der zweiten Reihe durch Entwickelung aller Glieder:

$$\begin{array}{llll|l} b_1x - b_1x^2 + b_1x^3 - \ldots\ldots & \pm n_0 & b_1 & x^{n+1} & \mp \ldots \\ + b_2 \mid -2b_2 \mid + \ldots\ldots & \mp n_1 & b_2 & & \pm \ldots \\ + b_3 \mid - \ldots\ldots & \pm n_2 & b_3 & & \mp \ldots \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ & + n_{n-2} & b_{n-1} & & - \ldots \\ & - n_{n-1} & b_n & & + \ldots \\ & + n_n & b_{n+1} & & - \ldots \end{array} \qquad (3)$$

Folglich durch Vergleichung mit (1)

$$b_1 = a_1,\ b_2 = b_1 + a_2,\ b_3 = 2b_2 - b_1 + a_3, \ldots \text{u. s. f.}$$
$$= a_1 + a_2 \quad = a_1 + 2a_2 + a_3$$

Diess scheint auf folgendes Gesetz zu deuten:

$$b_n = (n-1)_0 a_1 + (n-1)_1 a_2 + (n-1)_2 a_3 + \ldots + (n-1)_{n-1} a_n. \quad (4)$$

Wir wollen nun annehmen, dass diese Relation für diesen und alle vorhergehenden Koeffizienten richtig sei und dann den folgenden Koeffizienten $b_{n+1}$ daraus ableiten. Durch Vergleichung der allgemeinen Glieder von (1) und (3) erhält man sogleich:

$$b_{n+1} = n_{n-1} b_n - n_{n-2} b_{n-1} + n_{n-3} b_{n-2} - \ldots\ldots + a_{n+1}.$$

Folglich, wenn wir jeden der Koeffizienten $b_n$, $b_{n-1}, \ldots$ aus der Formel (4) bestimmen:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = n_{n-1}[&(n-1)_0 a_1 + (n-1)_1 a_2 + (n-1)_2 a_3 + \ldots\ldots] \\ - n_{n-2}[&(n-2)_0 a_1 + (n-2)_1 a_2 + (n-2)_2 a_3 + \ldots\ldots] \\ + n_{n-3}[&(n-3)_0 a_1 + (n-3)_1 a_2 + (n-3)_2 a_3 + \ldots\ldots] \\ - &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n+1} & \end{aligned}$$

oder, wenn wir diese Reihen in vertikaler Richtung summiren:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = [&n_{n-1}(n-1)_0 - n_{n-2}(n-2)_0 + n_{n-3}(n-3)_0 - \ldots\ldots] a_1 \\ + [&n_{n-1}(n-1)_1 - n_{n-2}(n-2)_1 + n_{n-3}(n-3)_1 - \ldots\ldots] a_2 \\ + [&n_{n-1}(n-1)_2 - n_{n-2}(n-2)_2 + n_{n-3}(n-3)_2 - \ldots\ldots] a_3 \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n+1} & \end{aligned}$$

Da nun $n_{n-1} = n_1$, $n_{n-2} = n_2, \ldots$ ist, so lässt sich jede der eingeklammerten Reihen nach der bekannten Formel

Digitized by Google

$$n_r = n_1(n-1)_r - n_2(n-2)_r + n_3(n-3)_r - \ldots$$

summiren, indem man $r = 0, 1, 2, \ldots$ setzt. So hat man

$$b_{n+1} = n_0 a_1 + n_1 a_2 + n_2 a_3 + \ldots\ldots\ldots + n_n a_{n+1}. \quad (5)\ ^*)$$

Diess ist aber ganz das nämliche Gesetz, wie das in (4) ausgesprochene. Es gilt daher dasselbe für $b_{n+1}$, wenn es für $b_1$, $b_2, \ldots b_n$ richtig war; d. h. allgemein, da es für $n = 1$ gilt.

Diese schon für sich bemerkenswerthe Transformation einer Reihe lässt eine fruchtbare Anwendung auf die Entwickelung verschiedener Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zu. Kann man nämlich unabhängig von diesem Theoreme irgend eine Funktion in zwei Reihen von den Formen (1) und (2) entwickeln, so kennt man die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ und $b_{n+1}$. Da diese zugleich die Gleichung (5) erfüllen müssen, so giebt diese eine Eigenschaft der Binomialkoeffizienten eines positiven ganzen Exponenten. Davon einige Beispiele.

II. Es ist identisch $1 + x = (1 - \frac{x}{1+x})\ (1+x)^2$ folglich $x(1+x)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \frac{x}{1+x})^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{1+x}$; also wenn man beide Binome entwickelt:

$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^4 + \ldots\ldots\ldots \\ = (\frac{x}{1+x}) + \frac{1}{2}(\frac{x}{1+x})^2 + \frac{1.3}{2.4}(\frac{x}{1+x})^3 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}(\frac{x}{1+x})^{n+1} + \ldots \end{array}\right\} +1 > x > -1,$$

Es sind daher die Koeffizienten

$$b_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)},\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1.3}{2.4},$$
$$a_4 = -\frac{1.3.5}{2.4.6}, \ldots$$

und nach (5)

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots(2n)} = n_0 - \frac{1}{2}n_1 + \frac{1.3}{2.4}n_2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}n_3 + \ldots \quad (6).$$

III. Aus der identischen Gleichung $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x}$ folgt $\text{Log}\ \frac{1}{1+x} = -\text{Log}\ (1+x) = \text{Log}\ (1 - \frac{x}{1+x})$ und durch beiderseitige Entwickelung:

---

*) Dieses Theorem wurde mir ohne Beweis von Herrn Professor Kunze zu Weimar mitgetheilt.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} & x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\ldots \\ =&(\tfrac{1+x}{x})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1+x}{x})^2+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1+x}{x})^3+\ldots. \\ & \ldots.+\tfrac{1}{n+1}(\tfrac{x}{1+x})^{n+1}+\ldots \end{aligned}\right\} +1>x>-1$$

also:

$$b_{n+1}=\frac{1}{n+1},\ a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=-\frac{1}{4},\ \ldots.$$

und nach (5):

$$\frac{1}{n+1}=n_0-\frac{1}{2}n_1+\frac{1}{3}n_2-\frac{1}{4}n_3+\ldots \quad (7)$$

Diese schon bekannte Eigenschaft der Binomialkoeffizienten findet sich gewöhnlich mit bei der Integration logarithmischer Differenziale. Will man einmal höhere Analysis zulassen, so kann man alle hier entwickelten Formeln sehr kurz mittelst bestimmter Integrale ableiten, auf welchem Wege sie auch gelegentlich gefunden werden.

IV. Eine andere ähnlich gebildete Relation beruht auf der Summe der Reihe

$$\left.\begin{aligned} S=&x-(1-\tfrac{1}{2})x^2+(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3 \\ &-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})x^4+\ldots,\ +1>x>-1. \end{aligned}\right\} (8)$$

Um dieses $S$ zu finden multipliziren wir die Reihe mit $1+x$, und erhalten so:

$$\begin{array}{l} (1+x)S=x-(1-\frac{1}{2})x^2+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})x^4+.. \\ \qquad\qquad +1 \;\Big|\; -(1-\frac{1}{2}) \;\Big|\; +(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) \;\Big|\; -.. \\ \quad = x+\frac{1}{2}x^2 \qquad +\frac{1}{3}x^3 \qquad +\frac{1}{4}x^4+.. \\ \quad =-\mathrm{Log}\,(1-x) \end{array}$$

mithin

$$S=\frac{-\mathrm{Log}\,(1-x)}{1+x}.$$

Ein zweiter Ausdruck für dieses $S$ findet sich so. Es ist

$$-\mathrm{Log}\,(1-x)=\mathrm{Log}\,(1-\frac{x}{1+x})-\mathrm{Log}\,(1-\frac{2x}{1+x});$$

folglich, wenn man noch mit $1+x$ dividirt und die Logarithmen in Reihen verwandelt,

$$S=\frac{1}{1+x}\left[\frac{2-1}{1}(\frac{x}{1+x})+\frac{2^2-1}{2}(\frac{x}{1+x})^2+\frac{2^3-1}{3}(\frac{x}{1+x})^3+\ldots.\right]$$



Digitized by Google

Multiplizirt man noch beide Werthe von $S$ mit $x$, so kommt:

$$x^2-(1-\tfrac{1}{2})x^3+(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^4-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})x^5+\ldots$$
$$=\frac{2-1}{1}(\frac{x}{1+x})^2+\frac{2^2-1}{2}(\frac{x}{1+x})^3+\frac{2^3-1}{3}(\frac{x}{1+x})^4+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{2^n-1}{n}(\frac{x}{1+x})^{n+1}+\ldots$$

Es sind daher die Koeffizienten:

$$b_{n+1}=\frac{2^n-1}{n},\ a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=-(1-\tfrac{1}{2}),\ a_4=(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}),\ldots$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{2^n-1}{n}=n_1-(1-\tfrac{1}{2})n_2+(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})n_3\\ -(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})n_4+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(9).$$

V. Ein Paar andere Relationen ergeben sich aus den beiden bekannten Reihen:

$$x\ \mathrm{Arctan}x=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^8+\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\left.\begin{aligned}x\ \mathrm{Arctan}x=(\frac{x^2}{1+x^2})+\frac{2}{3}(\frac{x^2}{1+x^2})^2+\frac{2.4}{3.5}(\frac{x^2}{1+x^2})^3+\ldots\ldots\\ \ldots\ldots+\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}(\frac{x^2}{1+x^2})^{n+1}+\ldots\end{aligned}\right\}(11).$$

Nehmen wir zuerst $x^2=x$, so folgt

$$x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{7}x^4+\ldots\ldots$$
$$=(\frac{x}{1+x})+\frac{2}{3}(\frac{x}{1+x})^2+\frac{2.4}{3.5}(\frac{x}{1+x})^3+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}(\frac{x}{1+x})^{n+1}+\ldots$$

also

$$b_{n+1}=\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)},\ a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{3},\ a_3=\frac{1}{5},\ a_4=-\frac{1}{7},\ldots$$

und

$$\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}=n_0-\frac{1}{3}n_1+\frac{1}{5}n_2-\frac{1}{7}n_3+\ldots\ldots(12).$$

VI. Nehmen wir dagegen $\frac{x^2}{1+x^2}=-x$, also $x^2=-\frac{x}{1+x}$, so vertauschen (10) und (11) ihre Rollen und es wird:

$$x-\frac{2}{3}x^2+\frac{2.4}{3.5}x^3-\frac{2.4.6}{3.5.7}x^4+\ldots\ldots$$
$$=(\frac{x}{1+x})+\frac{1}{3}(\frac{x}{1+x})^2+\frac{1}{5}(\frac{x}{1+x})^3+\ldots+\frac{1}{2n+1}(\frac{x}{1+x})^{n+1}+\ldots$$

Digitized by Google

also

$$b_{n+1} = \frac{1}{2n+1},\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{2}{3},\ a_3 = \frac{2.4}{3.5},\ \ldots$$

und

$$\frac{1}{2n+1} = n_0 - \frac{2}{3}n_1 + \frac{2.4}{3.5}n_2 - \frac{2.4.6}{3.5.7}n_3 + \ldots \quad (13)$$

was man als die Umkehrung der vorhergehenden Formel an sehen kann.

# XL.

## Berechnung des Wheatstone'schen Versuches zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des electrischen Lichtes.

Von

**Herrn J. Flesch**

Lehrer der Mathem. und der Naturwissensch. an der Realschule zu Düsseldorf.

### 1.

Eine breite Metallplatte, in Form eines Parallepipedon, mit zwei polirten Grenzebenen bewege sich um eine vertikale Achse, welche die Platte in der Mitte ihrer Dicke, den vier vertikalen Seitenflächen parallel, durchsetze. $A$ (Taf. V. Fig. 6.) sei ein leuchtender Punkt, $AO = a$ seine Entfernung von der Drehungsachse, die in $O$ auf der Ebene der Figur senkrecht stehe; $OS$ der Durchschnitt des Metall-Doppelspiegels mit einer den leuchtenden Punkt enthaltenden Horizontalebene; $A'$ und $A''$ die Bilder des leuchtenden Punktes für die Lagen des Spiegels $OS'$ und $OS''$; es sei ferner der Drehungswinkel des Spiegels $S''OS'' = \alpha$. Dann ist auch $A'AA'' = \alpha$, und $Ap = a \cos \alpha$; folglich $AA'' = 2a \cos \alpha$; mithin ist

$$r = 2a \cos \alpha \ldots \quad (1.)$$

die Polargleichung der Kurve, welche das Bild des leuchtenden Punktes beschreibt, der Pol derselben der leuchtende Punkt selbst. Auf rechtwinklige Coordinaten vom Anfangspunkt $A$ und der Abscissenachse $AO$ bezogen nimmt dieselbe die Gestalt



Digitized by Google

$$y^2 = 2ax - x^2 \ldots . \quad \text{(II.)}$$

an, stellt also einen Kreis dar, dessen Radius $a$ ist. Jeder Punkt einer leuchtenden Linie wird also bei der Umdrehung eines ebenen Spiegels um eine durch seine Mitte gehende Achse einen Kreis beschreiben, dessen Radius gleich ist der Entfernung des Punktes von der Rotationsachse. Ist die leuchtende Linie eine Grade und parallel der Umdrehungsachse des Doppelspiegels, so ist die von ihrem Bilde beschriebene Fläche ein senkrechter Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, der als Radius die Entfernung irgend eines leuchtenden Punktes von der Umdrehungsachse und zur Höhe die Länge der Lichtlinie selbst hat. Das Bild dieser Linie durchstreicht nach und nach alle Seiten der Cylinderfläche. Geschieht die Bewegung des Spiegels so schnell, dass zu einer ganzen Umdrehung höchstens so viel Zeit erfordert wird, als der Lichteindruck auf der Netzhaut des Auges andauert: so sehen wir auf einmal alle Cylinderseiten, folglich die ganze Cylinderfläche, erleuchtet. Nennen wir das eben bezeichnete Maximum der Umdrehungszeit $t$, so werden wir für die Umdrehungszeit $\frac{t}{n}$ nur den $n$ten Theil der ganzen Cylinderfläche erleuchtet sehen, welcher über die ideale Fläche eine progressive Bewegung hat. Wäre die Empfindung des Lichteindruckes im Momente des Entstehens augenblicklich auch wieder verschwunden, so würden wir bei jeder beliebig schnellen Bewegung des Spiegels immer nur eine leuchtende Seite der Cylinderfläche wahrnehmen.

2.

Es sei nun (Taf. V. Fig. 7.) $AB = a$ der von dem leuchtenden Punkt zu durchlaufende Weg, $v$ dessen Geschwindigkeit, $t'$ die Zeitdauer des Lichteindruckes; dann ist $AM = vt'$ der Weg, den der leuchtende Punkt in der Zeit $t'$ durchläuft; wenn derselbe also in $M$ anlangt, erlischt sein Eindruck in $A$ und die leuchtende Linienlänge $AM = vt'$ scheint sich jetzt mit der Geschwindigkeit $v$ längs $AB$ nach $B$ hin zu bewegen; denn nach einer gewissen Zeit $t$ hat der Punkt $A$ den Weg $vt$ zurückgelegt und das vom Punkte $A$ angerechnete, schon erloschene Stück der leuchtenden Linie beträgt offenbar $(t - t')v$; folglich ist

$$vt - (t - t')v = vt'$$

die übrig bleibende leuchtende Linienlänge, also unabhängig von $t$. Für

$$t' = 0$$

ist dieselbe auch $= 0$, und der leuchtende Punkt scheint sich also mit der Geschwindigkeit $v$, ohne eine Spur zu hinterlassen, von $A$ nach $B$ hin zu bewegen. Es sei nun

$$t' = 0$$

und $c$ die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels; dann hat nach einer gewissen Zeit $t$ der leuchtende Punkt den Weg

$$AM = vt$$

und der Spiegel den Bogen

$$MN = ct$$

Digitized by Google

beschrieben; folglich scheint der leuchtende Punkt durch die Bewegung des Spiegels statt in $M$ in $N$ sich zu befinden und den Weg $AN$ durchlaufen zu haben, während er doch wirklich den Weg $AM$ zurückgelegt hat. Seine scheinbare Geschwindigkeit auf dem Wege $AP$ zur wahren Geschwindigkeit auf dem eigentlich durchlaufenen Wege $AB$ verhält sich wie

$$\frac{\sqrt{v^2+c^2}}{v}, \ldots . \text{(III.)}$$

ist also grösser geworden.

Ist nun aber

$$t' > 0,$$

dauert also der Lichteindruck eine Zeit lang fort, so erscheint z. B. wenn der leuchtende Punkt in $M$ anlangt, sein Bild in $N$. Nun dauert aber der Lichteindruck in $N$ während $t'$ Sekunden fort; der Spiegel beschreibt während dieser Zeit den Bogen $ct'$, folglich beschreibt auch das Bild des leuchtenden Punktes $M$ von $N$ aus einen gleichen Bogen $ct'$. Der leuchtende Lichtweg, welcher für $t'=0$ eine blosse Linie $AP$ ist, wird also für $t'>0$ ein Parallelogramm sein, dessen andere Dimension folglich $ct'$, gleich dem Produkte der Rotationsgeschwindigkeit in die Zeitdauer des Lichteindruckes ist; also unabhängig von $v$.

Es sei nun $\alpha$ der Winkel, um welchen das Bild der leuchtenden Linie von der vertikalen Lage abgelenkt erscheint; dann ist offenbar

$$c = v \text{ tang } \alpha \ldots . \text{(IV.)}$$

und hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes

$$v = \frac{c}{\text{tang } \alpha} \ldots . \text{(V.)}$$

Macht z. B. der Doppelspiegel in 1 Sekunde $n$ Rotationen, so wird das Bild eines leuchtenden Punktes in derselben Zeit $2n$ Kreisumfänge durchlaufen; ist der Radius des Kreises $= r$, so ist also der in 1 Secunde von dem Bilde des leuchtenden Punktes beschriebene Weg

$$c = 4\pi nr$$

und dieser Werth, in die Formel (V.) substituirt, gibt

$$v = \frac{4\pi nr}{\text{tang } \alpha} \ldots . \text{(VI.)}$$

3.

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass unter übrigens gleichen Umständen die zu bestimmende Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes um so grösser ist, je weniger sich das Bild seines Lichtweges von der vertikalen Lage entfernt. Bliebe letzteres bei jeder beliebig grossen Rotationsgeschwindigkeit des Metallspiegels und jeder möglichen Entfernung der leuchtenden Linie von der Umdrehungsachse stets senkrecht, so könnte die gesuchte Geschwindigkeit nur unendlich gross sein. Da aber eine absolut unendliche

Digitized by Google

Geschwindigkeit in der Natur kaum denkbar ist, so muss in jedem besondern Falle eine, wenngleich für unser Auge selbst nicht wahrnehmbare und für unsere Instrumente nicht messbare, Abweichung des leuchtenden Bildes von der normalen Lage nothwendig vorhanden sein; und es wird nunmehr blos darauf ankommen, durch eine geschickte Wahl der bedingenden Umstände dieselbe möglichst gross zu machen. Dieses erreicht man aber in vorliegendem Falle, wie Formel (VI.) zeigt, wenn man $n$ und $r$, d. h. die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels und die Entfernung der leuchtenden Linie von der Rotationsachse so gross nimmt, als es angeht. Will es aber dennoch nicht gelingen, eine merkliche Abweichung des Bildes von der vertikalen Lage mit Bestimmtheit nachzuweisen, und weiss man ausserdem, dass ein gewisser Deklinationswinkel $\varphi$ den Messungen nicht entgehen könnte: so hat man wenigstens ein Maximum, welches die wirklich vorhandene Abweichung nicht erreicht, und hieraus ergiebt sich mittelst der Gleichung (VI.) ein Minimum, welches die verlangte Geschwindigkeit nothwendig übertrifft. Es ist dieses dasselbe Verfahren, wozu man bei Untersuchung der Phänomene der Natur so oft seine Zuflucht nimmt, wenn direktere Wege noch nicht zu Gebote stehen, so z. B. bei Bestimmung der Parallaxe und Entfernung der Fixsterne.

4.

Bekanntlich hat Wheatstone, dem wir so manche sinnreiche Versuche im Gebiete der Naturwissenschaften verdanken, die im Vorhergehenden besprochene Idee zuerst angeregt und zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität benutzt. Denkt man sich nämlich die Lichtlinie $AB$ (Art. 2.) erzeugt durch einen elektrischen Funken, der zwischen zwei senkrecht über einander liegenden Metallkugeln von $A$ nach $B$ überspringt, lässt jedoch im Uebrigen Alles ungeändert und giebt nun jeder der beiden Kugeln eine Entfernung $r = 4$ Meter von der Umdrehungsachse und dem Doppelspiegel eine Geschwindigkeit von $n = 50$ Rotationen während 1 Zeitsekunde: so ist also

$$v = \frac{4\pi nr}{\text{tang } \alpha} = \frac{800 \,.\, 3{,}1415926}{\text{tang } \alpha}.$$

Der Winkel $\alpha$ der Abweichung des leuchtenden Bildes von der vertikalen Lage ist durch direkte Messung zu ermitteln. Hier folgen einige correspondirende Werthe von $\alpha$ und $v$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Für $\alpha = 30'$ | ist nämlich | $v =$ | 38 | geographische | Meilen |
| $\alpha = 20'$ | - - | $v =$ | 58 | - | - |
| $\alpha = 10'$ | - - | $v =$ | 116 | - | - |
| $\alpha = 5'$ | - - | $v =$ | 211 | - | - |
| $\alpha = 1'$ | - - | $v =$ | 1164 | - | - |
| $\alpha = 30''$ | - - | $v =$ | 2328 | - | - |
| $\alpha = 10''$ | - - | $v =$ | 6980 | - | - |
| $\alpha = 1''$ | - - | $v =$ | 69800 | - | - |

die geographische Meile zu 7420 Meter gerechnet. Dieses ist Re-

Digitized by Google

sultat der Rechnung; der Versuch aber zeigt unter den angeführten Bedingungen das Bild der leuchtenden Linie vollkommen vertikal, was uns also zu dem Schlusse berechtigt, dass die Geschwindigkeit des elektrischen Lichtes ausserordentlich gross sein müsse, so dass wir auf diesem Wege nicht im Stande zu sein scheinen, dieselbe numerisch zu bestimmen. Wheatstone hat deshalb diesen Versuch dahin abgeändert, dass er dem oben beschriebenen Spiegelapparate 6 gleich grosse, auf derselben Vertikallinie befindliche, Metallkugeln gegenüberstellt (Taf. V. Fig. 8.), von denen die erste *a* mit der äusseren Belegung eines geladenen Condensators, z. B. einer Leidener Flasche, die beiden folgenden *b* und *c*, so wie *d* und *e*, aber durch 2 Messingdrähte von gleicher und möglichst bedeutender Länge mit einander verbunden sind. In dem Augenblicke nun, wo man die Kugel *f* mit der inneren Belegung der Flasche in Verbindung setzt, zeigen sich 3 elektrische Funken, welche von *a* nach *b*, von *c* nach *d* und von *e* nach *f* überspringen. Jeder derselben bildet eine senkrechte Lichtlinie, deren Bild vollkommen vertikal erscheint. Das Auge erkennt die 3 Funken als gleichzeitige, aber der Spiegel zeigt durch Reflexion die Bilder der beiden äusseren in derselben Vertikallinie, das Bild des mittleren hingegen merklich von dieser Linie entfernt. Hieraus schliessen wir, dass die beiden äusseren Funken genau in demselben Augenblicke überspringen, der mittlere dagegen um eine nicht zu vernachlässigende Zeitgrösse gegen die andern verspätet ist. Und dieser Zeitraum ist offenbar derselbe, den die Electricität gebraucht, um einen der beiden Metalldrähte $bge = dhe = p$ Meter zu durchlaufen. Misst man nun den Bogen $cc' = q$ Meter, den während derselben Zeit der Spiegel durchlaufen, so findet man die gesuchte Geschwindigkeit des elektrischen Fluidums durch die Proportion

$$v : 4\pi nr = p : q;$$

folglich ist

$$v = \frac{4\pi nrp}{q} \text{ Meter.} \quad \text{(VII.)}$$

Auf diesem Wege fand Wheatstone, dass die Electricität auf einem Messingdrahte von 0,002 Meter Dicke mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 460000000 Meter=62000 geographischen Meilen in 1 Secunde, also bei weitem schneller als das Licht, sich fortpflanze. Man vergleiche Lamé Cours de physique de l'école polytechnique. 717.

Ich weiss nicht, ob ich mich täusche; aber mir scheint dieser Versuch ein nicht unwichtiges Element zu Gunsten der Symmer'schen Hypothese über die Elektricität zu enthalten; denn die Gleichzeitigkeit der beiden äusseren Funken und die Verspätung des mittleren gegen jene, so wie überhaupt die Symmetrie der Erscheinung, von der Mitte aus betrachtet, scheinen auf zwei verschiedene, einander gegenseitig entgegenströmende und in der Mitte sich neutralisirende Fluida hinzudeuten; — jedoch sei diese alte Streitfrage Männern von gediegenerem Urtheil übergeben.

Digitized by Google

# XLI.

## Mathematische Bemerkungen.

Von

Herrn J. Flesch

Lehrer der Mathem. und der Naturwissensch. an der Realschule zu Düsseldorf.

---

Es seien $a$, $b$ und $c$ die drei Seiten eines Dreieckes und der Kürze halber

$$a+b+c=2u,$$

so ist der Inhalt des Dreieckes

$$J=\sqrt{u(u-a)\ (u-b)\ (u-c)}.$$

Bezeichnet man nun die Radien derjenigen drei Kreise, von denen der erste mit dem Dreieck gleichen Inhalt, der andere gleichen Umfang hat und der dritte demselben eingeschrieben ist, respective durch $r$, $\varrho$ und $\varrho'$, so hat man zur Bestimmung dieser drei Grössen bekanntlich die Gleichungen

$$r=\frac{\sqrt[4]{u(u-a)\ (u-b)\ (u-c)}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\varrho=\frac{u}{\pi}\text{ und}$$

$$\varrho'=\frac{\sqrt{(u-a)\ (u-b)\ (u-c)}}{\sqrt{u}}$$

und hieraus folgt

$$r^2=\varrho\varrho'.$$

Der Radius desjenigen Kreises, welcher mit einem Dreieck gleichen Inhalt hat, ist also die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Radien derjenigen beiden Kreise, von denen der eine mit dem Dreieck gleichen Umfang hat, der andere demselben eingeschrieben ist.

---

Es sei $P$ eine durch eine Parallelebene mit der Basis abgestutzte $n$seitige Pyramide, $B$ und $b$ ihre Grundflächen und $h$ ihre Höhe, so ist

Digitized by Google

$$P=\frac{h}{3}\{B+b+\sqrt{Bb}\} \quad (1)$$

Denn zerlegt man dieselbe in $n$ dreiseitige Pyramiden, so hat man (Éléments de géométrie par Legendre liv. VI. prop. 21) unter ähnlichen Bezeichnungen folgende Gleichungen:

$$p'=\frac{h}{3}\{B'+b'+\sqrt{B'b'}\},$$

$$p''=\frac{h}{3}\{B''+b''+\sqrt{B''b''}\}, \quad (2)$$

$$p'''=\frac{h}{3}\{B'''+b'''+\sqrt{B'''b'''}\} \text{ u. s. w.}$$

mithin

$$p'+p''+p'''+\text{etc.}=\frac{h}{3}\{B'+B''+B'''+\text{etc.})+(b'+b''+b'''+\text{etc.})$$
$$+(\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.})\} \quad (3)$$

Nun aber ist offenbar

$$p'+p''+p'''+\text{etc.}=P$$
$$B'+B''+B'''+\text{etc.}=B$$
$$b'+b''+b'''+\text{etc.}=b$$

folglich ist

$$P=\frac{h}{3}\{B+b+(\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.})\}. \quad (4)$$

Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$\sqrt{Bb}=\sqrt{(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})}$$
$$=\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.} \quad (5)$$

Aber

$\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''}=\frac{B'''}{b'''}=\text{etc.}$, mithin (Archiv. Th. I. S. 292.) ist auch

$$\frac{B'+B''+B'''+\ldots}{b'+b''+b'''+\ldots}=\frac{B'}{b'} \text{ und}$$

wenn man beiderseits mit $(b'+b''+b'''+\text{etc.})^2$ multiplizirt,

$(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})=\frac{B'}{b'}(b'+b''+b'''+\text{etc.})^2$; also

$\sqrt{(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})}=(b'+b''+b'''+\text{etc.})\sqrt{\frac{B'}{b'}}$

$$=\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.},$$

da

$$\sqrt{\frac{B'}{b'}}=\sqrt{\frac{B''}{b''}}=\sqrt{\frac{B'''}{b'''}}=\text{etc.}$$

Es gilt also dieser merkwürdige Satz (1), welcher in den Lehrbüchern der Geometrie gewöhnlich nur für dreiseitige Pyramiden bewiesen wird, für jede beliebige Anzahl von Seitenflächen.

Digitized by Google

# XLII.

## Miscellen.

In Nr. 446. der astronomischen Nachrichten hat Herr Thomas Clausen eine sehr bemerkenswerthe Auflösung des irreducibeln Falls bei den cubischen Gleichungen durch die Kettenbrüche gegeben, welche ich im Folgenden mittheilen, und mit einigen zur strengen Begründung dieser schönen Methode mir nöthig scheinenden Zusätzen begleiten werde.

Die gegebene cubische Gleichung sei

$$x^3 - ax - b = 0,$$

wo $a$ und $b$ positive Grössen sind, und $27b^2 < 4a^3$ ist. In diesem Falle hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen jederzeit die eine positiv ist, die beiden andern negativ sind, welches am einfachsten aus der bekannten Lösung dieser Gleichung durch die goniometrischen Formeln erhellet, welche wir daher hier im Kurzen recapituliren wollen *):

Man bestimme den zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen $\varphi$, welcher der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{3b}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}}$$

genügt, welches immer möglich ist; dann sind

$$2\cos\tfrac{1}{3}\varphi \,.\, \sqrt{\frac{a}{3}},\quad -2\cos\tfrac{1}{3}(\pi+\varphi) \,.\, \sqrt{\frac{a}{3}},\quad -2\cos\tfrac{1}{3}(\pi-\varphi) \,.\, \sqrt{\frac{a}{3}}$$

die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Setzt man nun

$$x = y\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ und } \frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = c,$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung, wie man leicht findet, in die folgende:

$$y^3 - 3y - 2c = 0.$$

Weil $27b^2 < 4a^3$ ist, so ist

$$\frac{b^2}{4} \cdot \frac{27}{a^3} < 1, \text{ d. i. } \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{a}\right)^3 < 1,$$

und folglich auch

*) M. s. u. A. meine Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. S. 325.

Digitized by Google

$$\frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \text{ d. i. } c < 1,$$

woraus sich leicht ergiebt, dass die Gleichung

$$y^3 - 3y - 2c = 0$$

auch zum irreduciblen Falle gehört, und daher drei reelle Wurzeln hat, von denen die eine positiv ist, die beiden andern negativ sind, welches übrigens auch unmittelbar aus der Formel

$$x = y\sqrt{\frac{a}{3}}$$

geschlossen werden kann, da $x$ nur einen reellen positiven Werth, und zwei reelle negative Werthe haben kann. Setzt man jetzt

$$y = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1+c}{2}}}{y_1},$$

und führt dies in die obige Gleichung für $y$ ein, so erhält man zur Bestimmung von $y_1$ nach leichter Rechnung die Gleichung

$$y_1^3 - 3y_1 - 2\sqrt{\frac{1+c}{2}} = 0,$$

oder, wenn man

$$\sqrt{\frac{1+c}{2}} = c_1$$

setzt, die Gleichung

$$y_1^3 - 3y_1 - 2c_1 = 0.$$

Da nach dem Obigen $c < 1$ ist, so ist offenbar auch $c_1 < 1$, und die vorhergehende Gleichung gehört folglich wieder zum irreduciblen Falle, so dass also auch $y_1$ drei reelle Werthe hat, von denen der eine jederzeit positiv ist, die beiden andern negativ sind. Setzt man nun ferner

$$y_1 = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1+c_1}{2}}}{y_2},$$

und führt dies in die obige Gleichung für $y_1$ ein, so erhält man ganz wie vorher zur Bestimmung von $y_2$ die Gleichung

$$y_2^3 - 3y_2 - 2\sqrt{\frac{1+c_1}{2}} = 0,$$

oder wenn man

$$\sqrt{\frac{1+c_1}{2}} = c_2$$

setzt, die Gleichung

$$y_2^3 - 3y_2 - 2c_2 = 0.$$

Weil nach dem Vorhergehenden $c_1 < 1$ ist, so ist offenbar auch $c_2 < 1$, und die vorstehende Gleichung gehört folglich wieder zum irreduciblen Falle, so dass also $y_2$ drei reelle Werthe hat, von de-

Digitized by Google

nen der eine positiv ist, die beiden andern negativ sind. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann unterliegt keinem Zweifel. Setzt man also

$$\frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = c,$$

$$\sqrt{\frac{1+c}{2}} = c_1,$$

$$\sqrt{\frac{1+c_1}{2}} = c_2,$$

$$\sqrt{\frac{1+c_2}{2}} = c_3,$$

u. s. w.

$$\sqrt{\frac{1+c_{n-1}}{2}} = c_n,$$

und lässt jetzt

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

die reellen positiven Wurzeln der Gleichungen

$$y^3 - 3y - 2c = 0,$$
$$y_1^3 - 3y_1 - 2c_1 = 0,$$
$$y_2^3 - 3y_2 - 2c_2 = 0,$$
$$y_3^3 - 3y_3 - 2c_3 = 0,$$
u. s. w.
$$y_n^3 - 3y_n - 2c_n = 0$$

bedeuten, was offenbar verstattet ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$y = 1 + \frac{2c_1}{y_1},$$

$$y_1 = 1 + \frac{2c_2}{y_2},$$

$$y_2 = 1 + \frac{2c_3}{y_3},$$

u. s. w.

$$y_{n-1} = 1 + \frac{2c_n}{y_n};$$

folglich

$$y = 1 + \frac{2c_1}{1 + \frac{2c_2}{1 + \frac{2c_3}{1 + \ldots + \frac{2c_{n-1}}{1 + \frac{2c_n}{y_n}}}}}.$$

Digitized by Google

Weil nach dem Vorhergehenden $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_n$ und auch $y_n$, wie gross man auch $n$ annehmen mag, lauter positive Grössen sind; so ist, wenn man

$$y = 1 + \frac{2c_1}{1 + \frac{2c_2}{1 + \frac{2c_3}{1 + \frac{2c_4}{1 + \ldots}}}}$$

setzt, nach der Theorie der Kettenbrüche $y$ zwischen jeden zwei einander benachbarten Partialbrüchen des Kettenbruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens als Gränzen enthalten, und dieser Kettenbruch kann also zur annähernden Berechnung von $y$ sehr zweckmässig gebraucht werden. Hat man aber auf diese Weise $y$ gefunden, so erhält man ferner mittelst der Formel

$$x = y\sqrt{\frac{a}{3}}$$

sehr leicht die reelle positive Wurzel, welche die Gleichung

$$x^3 - ax - b = 0$$

im irreduciblen Falle jederzeit haben muss.

Zur Berechnung der Zähler und Nenner

$$m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \ldots;$$

$$n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \ldots$$

des oben für $y$ gefundenen Kettenbruchs hat man nach der Theorie der Kettenbrüche bekanntlich die folgenden Formeln:

$$m_0 = 1,$$
$$m_1 = 1 + 2c_1,$$
$$m_2 = m_1 + 2c_2 m_0,$$
$$m_3 = m_2 + 2c_3 m_1,$$
$$m_4 = m_3 + 2c_4 m_2,$$
$$m_5 = m_4 + 2c_5 m_3,$$

u. s. w.

und

$$n_0 = 1,$$
$$n_1 = 1,$$
$$n_2 = n_1 + 2c_2 n_0,$$
$$n_3 = n_2 + 2c_3 n_1,$$
$$n_4 = n_3 + 2c_4 n_2,$$
$$n_5 = n_4 + 2c_5 n_3,$$

u. s. w.

Setzt man

Digitized by Google

$$m_0 = 2c_1 \cdot \mu_2,$$
$$m_1 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot \mu_3,$$
$$m_2 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot \mu_4,$$
$$m_3 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot \mu_5,$$
$$m_4 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot \mu_6,$$
$$m_5 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot 2c_6 \cdot \mu_7,$$

u. s. w.

so ist nach dem Vorhergehenden

$$m_2 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot (\mu_2 + \mu_3),$$
$$m_3 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot (\mu_3 + \mu_4),$$
$$m_4 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot (\mu_4 + \mu_5),$$
$$m_5 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot (\mu_5 + \mu_6),$$

u. s. w.

und folglich, wenn man diese Ausdrücke von $m_2, m_3, m_4, m_5, \ldots$ mit den vorhergehenden Ausdrücken derselben Grössen vergleicht, offenbar

$$2c_2 \cdot \mu_4 = \mu_2 + \mu_3,$$
$$2c_4 \cdot \mu_5 = \mu_3 + \mu_4,$$
$$2c_5 \cdot \mu_6 = \mu_4 + \mu_5,$$
$$2c_6 \cdot \mu_7 = \mu_5 + \mu_6,$$

u. s. w.

folglich

$$\mu_4 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2c_2},$$
$$\mu_5 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2c_4},$$
$$\mu_6 = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2c_5},$$
$$\mu_7 = \frac{\mu_5 + \mu_6}{2c_6},$$

u. s. w.

Weil nach dem Obigen offenbar

$$\mu_2 = \frac{1}{2c_1}, \quad \mu_3 = \frac{1 + 2c_1}{2c_1 \cdot 2c_2}$$

ist; so ist, wenn man $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$ setzt,

$$\mu_2 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2c_1}, \quad \mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2c_2}.$$

Setzt man auf ähnliche Art

Digitized by Google

$$n_0 = 2c_1 \cdot \nu_2,$$
$$n_1 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot \nu_3,$$
$$n_2 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot \nu_4,$$
$$n_3 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot \nu_5,$$
$$n_4 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot \nu_6,$$
$$n_5 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot 2c_6 \cdot \nu_7,$$

u. s. w.

so ist nach dem Obigen

$$n_2 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot (\nu_2 + \nu_3),$$
$$n_3 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot (\nu_3 + \nu_4),$$
$$n_4 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot (\nu_4 + \nu_5),$$
$$n_5 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 \cdot 2c_4 \cdot 2c_5 \cdot (\nu_5 + \nu_6),$$

u. s. w.

und folglich

$$2c_2 \cdot \nu_4 = \nu_2 + \nu_3,$$
$$2c_4 \cdot \nu_5 = \nu_3 + \nu_4,$$
$$2c_5 \cdot \nu_6 = \nu_4 + \nu_5,$$
$$2c_6 \cdot \nu_7 = \nu_5 + \nu_6,$$

u. s. w.

also

$$\nu_4 = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2c_2},$$
$$\nu_5 = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2c_4},$$
$$\nu_6 = \frac{\nu_4 + \nu_5}{2c_5},$$
$$\nu_7 = \frac{\nu_5 + \nu_6}{2c_6},$$

u. s. w.

Weil nach dem Obigen offenbar

$$\nu_2 = \frac{1}{2c_1}, \quad \nu_3 = \frac{1}{2c_1 \cdot 2c_2}$$

ist; so ist, wenn man $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$ setzt,

$$\nu_2 = \frac{\nu_0 + \nu_1}{2c_1}, \quad \nu_3 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2c_2}.$$

Ueberhaupt hat man also zur Berechnung der Grössen

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \ldots;$$
$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots$$

die folgenden Ausdrücke:

Digitized by Google

$$\mu_0 = 0, \qquad \nu_0 = 1;$$
$$\mu_1 = 1, \qquad \nu_1 = 0;$$
$$\mu_2 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2c_1}, \quad \nu_2 = \frac{\nu_0 + \nu_1}{2c_1};$$
$$\mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2c_2}, \quad \nu_3 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2c_2};$$
$$\mu_4 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2c_3}, \quad \nu_4 = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2c_3};$$
$$\mu_5 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2c_4}, \quad \nu_5 = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2c_4};$$
$$\mu_6 = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2c_5}, \quad \nu_6 = \frac{\nu_4 + \nu_5}{2c_5};$$
u. s. w. u. s. w.

Hat man auf diese Weise die in Rede stehenden Grössen berechnet, so sind die Partialbrüche des oben für $y$ gefundenen Kettenbruchs offenbar nach der Reihe:

$$\frac{\mu_2}{\nu_2}, \frac{\mu_3}{\nu_3}, \frac{\mu_4}{\nu_4}, \frac{\mu_5}{\nu_5}, \frac{\mu_6}{\nu_6}, \ldots\ldots$$

Clausen hat seine Methode erläutert und ihre Zweckmässigkeit nachgewiesen an dem aus dem Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 390. entlehnten Beispiele

$$x^2 - 2100\,x - 24000 = 0,$$

wobei wir jedoch hier nicht länger verweilen wollen, da die Rechnung nach den obigen Formeln keine Schwierigkeit hat.

Nach dem Obigen sind die Grössen $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, .... sämmtlich kleiner als die Einheit. Leicht kann man aber auch zeigen, dass dieselben fortwährend wachsen, und sich daher der Einheit immer mehr und mehr nähern. Es ist nämlich überhaupt

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}},$$

und folglich

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2c_n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2}}.$$

Weil nun $c_n < 1$, also auch $c_n^2 < 1$ ist, so ist $2c_n < 2$, so wie $2c_n^2 < 2$, und folglich

$$\frac{1}{2c_n} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2c_n^2} > \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2} > 1, \quad \sqrt{\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2}} > 1,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} > 1 \text{ oder } c_{n+1} > c_n,$$

wie behauptet wurde. G.

Digitized by Google

# VI.
# Literarischer Bericht.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Von des Herausgebers des Archivs bekanntem Lehrbuche der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten. 4 Theile. Brandenburg bei Wieseke erscheint jetzt die dritte Auflage, und zwar zuerst von dem zweiten, die Stereometrie enthaltenden Theile. Die neue Auflage dieses Theils wird in den nächsten Tagen versandt werden.

Die Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Als Leitfaden für den mathematischen Unterricht an den Königl. Artillerie-Brigade-Schulen, so wie zum Selbstunterricht für die Avancirten der Artillerie bearbeitet von F. M. Rost, Prem. Lieut. und Lehrer. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr.

H. Forir: Essai d'un cours de mathématiques à l'usage des élèves du collège communal de Liège. 1841. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

## Arithmetik.

Elementi di Aritmetica, di G. B. Rostagno della compagnia di Gesù, ad uso delle scuole della medesima compagnia. Torino. 1841. 12.

Dr. G. F. Ursin: Arithmetik, udarbeidet med stadigt Hensyn til den praktiske Anwendelse. 1841. 8. 80 sch.



Digitized by Google

Grundriss der elementaren Algebra zum Gebrauch bei Vorträgen und dem Selbstunterrichte. Von R. Simesen. Altona. 1841. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

The Elements of Algebra. Designed for the Use of Students in the University. By John Hind, M. A. late Fellow and Tutor of Sidney Sussex College, Cambridge. Fifth edition. 1841. 8. 12 s. 6 d. boards.

Trattatello elementare di Algebra, composto ad uso del collegio e liceo di Lugano. Del p. d. G. B. Giuliani c. r. somasco. Lugano. 1841. 12.

C. Jürgensen: Elementair Arithmetik og Algebra. Anden Udgave. 1841. 8. 1 Rbd.

Aufgaben für Anfänger in der Buchstabenrechnung, Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. G. A. Jahn. Leipzig. 1842. 8. 1 Thlr.

Algebraical Problems, producing simple and Quadratic Equations, with their Solutions; designed as an Introduction to the higher branches of Analytics. To which is added an Appendix, containing a collection of Problems on the Nature and Solution of Equations of higher dimensions. By Millies Bland. Eighth edition. 1841. 8. 10 s. 6 d. boards.

Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen und zur Ausziehung der dritten und der höhern Wurzeln aus bestimmten Zahlen. Zunächst nach englischen Quellen bearbeitet von Dr. L. C. Schulz von Strassnicki, ö. o. Prof. der Elementar-Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien. Wien. 1842. 8.

Die von dem Vf. in dieser Schrift dargestellte und entwickelte Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln der numerischen Gleichungen verdankt man im Wesentlichen dem vor zwei Jahren verstorbenen englischen Mathematiker W. G. Horner, welcher dieselbe zuerst in den Philosophical Transactions. 1819 bekannt machte, aber durch einen sehr dunkeln Vortrag ihrer weitern Verbreitung schadete. Ausserdem findet sich Einiges über dieselbe in J. R. Young's theory and solution of algebraical equations. London. 1835., und in zwei ebenfalls mit sybillinischer Kürze verfassten Aufsätzen von Horner in Leybourn's new series of mathematical Repository. Nach diesen Schriften, die aber eigentlich nur als Bruchstücke zu betrachten sind und selten die Beweise der aufgestellten Regeln liefern, hat der Herr Vf. der obigen Schrift die Hornersche Methode sehr deutlich und vollständig dargestellt, weiter entwickelt und durch eine grosse Anzahl vollständig ausgerechneter Beispiele erläutert, wodurch sich derselbe allerdings ein wesentliches Verdienst erworben hat, da die im Ganzen sehr einfache und in mehreren Rücksichten andern bekannten Methoden vorzuziehende Horner'sche Methode wenigstens

Digitized by Google

in Deutschland bis jetzt so gut wie gar nicht bekannt gewesen ist. Eine selbst auch nur kurze Darstellung dieser Methode hier zu geben liegt natürlich gar nicht in dem Zwecke dieser literarischen Berichte; jedoch hoffen wir im Archive selbst auf dieselbe zurückzukommen, und die Leser mit ihrem Wesen bekannt zu machen. Für jetzt müssen wir uns begnügen, auf die von dem Herrn Vf. selbst in der Vorrede angegebenen Vorzüge der Horner'schen Methode vor andern Methoden hinzuweisen. Derselbe sagt nämlich: „Die Vorzüge der Horner'schen Methode vor der Fouriers sind in Kürze folgende:

1. Die ungemeine Leichtigkeit der Substitution einzelner Werthe sowohl, als bei der Substitution einer arithmetischen Reihe von Werthen, wodurch die Trennung der einzelnen Wurzeln sehr erleichtert wird.

2. Viel zureichendere und schneller fördernde Kennzeichen für die Imaginarität der Wurzeln.

3. Bei der Horner'schen Methode braucht man nicht früher die gleichen Wurzeln wegzuschaffen, die Wiederholung derselben ergiebt sich selbst im Verlaufe der Rechnung.

4. Der Rechnungsprocess der einzelnen Wurzeln nach der Horner'schen Methode ist zusammenhängend, Ziffer für Ziffer wird bestimmt, und hier ist es viel mehr als bei'm Fourier'schen Verfahren der Fall, dass nicht eine einzige Ziffer mehr berechnet wird, als nothwendig ist.

Wissenschaftlich höher als unsere Methode steht die Gräffe'sche, besonders nach ihrer Verbesserung und Erweiterung durch Herrn Encke, da diese auch die imaginären Wurzeln liefert, was mir bisher nach der Horner'schen nicht gelingen wollte, obwohl ich sicher hoffe, dass für die imaginären Wurzeln ein eben so einfacher Rechnungsprocess sich auffinden lassen werde.

Was aber die reellen Wurzeln betrifft, so wird hoffentlich niemand anstehen, in Hinsicht auf praktische Berechnung derselben, der Horner'schen vor der Gräffe'schen den Vorzug einzuräumen, um so mehr, da man bei der Gräffe'schen Methode alle Wurzeln zugleich suchen muss, während doch nur die reellen für den Praktiker einen Werth haben.

Zum Schluss wollen wir den Herrn Vf. nur noch auf die Schrift:

Neue Methode, die reellen rationalen und irrationalen Wurzeln numerischer Gleichungen zu finden, von C. A. Bretschneider, Professor am Realgymnasium zu Gotha. Leipzig. 1838. 4. 12 ggr.

aufmerksam machen, in welcher gleich von vorn herein ein dem Horner'schen ganz ähnlicher Algorithmus zur Bestimmung der, gewissen gegebenen Werthen ihrer unabhängigen veränderlichen Grössen entsprechenden Werthe der ganzen rationalen algebraischen Functionen gelehrt wird, und die daher überhaupt bei diesem Gegenstande genauer verglichen zu werden verdient.

Teorica e Pratica del Probabile, dell' abate Giuseppe Bravi. Seconda edizione notabilmente accresciuta. Bergamo. 1840. 8. Due vol.

Observationes, diversa calculi differentialis princi-



Digitized by Google

pia stringentes, quas speciminis loco publicae censurae defert Mag. Carolus Dan. Arosenius, ad Schol. Triv. Fahlun. Collega. Resp. Petr. Gust. Tengman. Arosiae. 1840. 1½ ark. 4.

Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus. Collected by D. F. Gregory, M. A. Fellow of Trinity College. London (und Cambridge.) 1841. 8. 18 s.

---

## Geometrie.

Leitfaden für den Vorbereitungsunterricht in der Geometrie. Von Dr. E. W. Grebe. Cassel. 1840. 8. ¼ Thlr.

Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrerseminarien von J. W. Straub, Lehrer an der Bezirksschule zu Baden im Aargau und Gemeindeschulinspector. Zürich. 1841. 8. 15 ggr.

Lehrbuch der Geometrie. Ausgearbeitet von Dr. C. L. A. Kunze, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Weimar. Erster Band. Planimetrie. Jena. 1842. 8. 1 Thlr.

Dieses Lehrbuch der Geometrie ist uns eine sehr erfreuliche Erscheinung gewesen und verdient nachdrücklichst empfohlen und allgemeiner bekannt zu werden. Ueberall befleissigt sich der Verfasser der euclidischen Strenge, ohne an irgend einem Orte zu weitläufig oder für den Anfänger zu schwierig zu werden. Das Hauptverdienst dieses Buchs finden wir aber in den verschiedenen, den einzelnen Kapiteln beigefügten Anhängen, in denen der Verfasser von den Ergebnissen der sogenannten neuern Geometrie eine sehr zweckmässige Auswahl getroffen und einen sehr verständigen Gebrauch gemacht, aber auch manches aus eignen Mitteln hinzugethan, namentlich mehrere Sätze bloss mit den ihm durch das Lehrbuch selbst dargebotenen Hülfsmitteln auf eigenthümliche Weise und meistens, so weit die Natur des Gegenstandes es zuliess, sehr einfach bewiesen hat. Sehr werden dem Verfasser mit uns viele Lehrer auch für die an vielen Orten eingestreuten interessanten historischen Notizen dankbar sein, die, wie jeder erfahrene Lehrer weiss, immer sehr zur Belebung des mathematischen Unterrichts beitragen. Leider verbietet uns hier der Raum, aus dem reichen in den verschiedenen Anhängen enthaltenen Schatze viele Einzelnheiten namhaft zu machen, jedoch können wir uns nicht versagen, den Leser u. A. auf Folgendes besonders hinzuweisen. So ist z. B. in dem Anhange zum neunten Kapitel ein neues sehr einfaches und sinnreiches Verfahren, die Seite eines in einen gegebenen Kreis zu beschreibenden regelmässigen Vielecks näherungsweise zu finden,

Digitized by Google

mitgetheilt, welches eine sehr artige Erfindung Sr. Hoheit des Herzogs Carl Bernhard zu Sachsen Weimar-Eisenach ist, und eine weit schnellere Annäherung und grössere Genauigkeit als die oft, z. B. in Kästner's geometrischen Abhandlungen. I. S. 266, besprochene Regel von Renaldini gewährt. Der Vf. hat die neue Regel mit Hülfe trigonometrischer Rechnung für alle Vielecke mit ungerader Zahl bis zum 23eck geprüft, und sie immer mit Ausnahme des 3ecks und 5ecks, wo sie nicht anwendbar ist, sehr nahe richtig gefunden. Ferner machen wir aufmerksam auf den Beweis der Steiner'schen Construction des Malfatti'schen Problems, die man auch in dem Anhange zum neunten Kapitel findet, auf die ganze Behandlung des Fall's der Incommensurabilität in der Lehre von den Proportionen u. s. w., auf die Rectification und Quadratur des Kreises und vieles Andere, was hier besonders anzuführen der Raum nicht zulässt. In einer Zugabe am Ende des Buchs hat der Verfasser auch die im 2ten Hefte des ersten Theils des Archivs (S. 193) ausführlich besprochene Aufgabe von der Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche sich ein Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt, auf eigenthümliche Weise aufgelöst, wobei er zwei recurrirende Formeln findet, durch deren Vergleichung mit einander sich dann die Euler'sche independente Formel ergiebt. Wir wiederholen, dass uns hier der Raum fehlt, auf alle Vorzüge dieses Lehrbuchs speciell aufmerksam zu machen, empfehlen es aber namentlich auch denen, welche sich etwas weiter als im Kreise der gewöhnlichen Elemente mit der Geometrie bekannt machen wollen, nochmals aus voller Ueberzeugung, und wünschen, dass der Verfasser Zeit und Musse haben möge, recht bald den zweiten Theil, welcher die Stereometrie, nebst der ebenen und sphärischen Trigonometrie, umfassen wird, nachfolgen zu lassen.

Nur in einem Punkte können wir mit dem Verfasser nicht ganz einverstanden sein, nämlich in Bezug auf seine Darstellung der Lehre von den Parallellinien. Er geht nämlich dabei von der folgenden Definition aus:

> Eine Linie von der Beschaffenheit, dass alle ihre Punkte (in einerlei Ebene) von einer Geraden gleichweit abstehen, heisst eine Parallellinie oder eine Parallele zu derselben;

und fügt hierauf den Grundsatz:

> Die Parallele zu einer Geraden ist selbst eine Gerade

bei, auf welchem er dann das Gebäude der Lehre von den Parallellinien allerdings mit völliger Consequenz aufführt. Dass man in dieser Lehre von einem eigenthümlichen, derselben allein angehörenden, Grundsatze ausgehen müsse: damit sind wir völlig einverstanden. Dass aber der obige Satz die zu einem Axiome nöthige innere Evidenz habe, möchten wir bezweifeln, so wie uns auch in der obigen, bekanntlich schon von ältern Mathematikern vielfach benutzten, Definition der Parallelen das Princip der Gleichheit der gegenseitigen Lage zweier geraden Linien, auf welches es nach unserer Ueberzeugung in der Lehre von den Parallellinien doch vorzüglich und eigentlich nur allein ankommt, nicht gehörig ausgesprochen zu sein scheint. Hält man dieses Princip fest, so hat es uns immer geschienen, dass der Satz:

> Zwei gerade Linien, die beide einer dritten parallel sind (d. h. die beide gegen eine dritte gleiche Lage haben), sind jeder-

Digitized by Google

zeit einander selbst parallel (d. h. haben gegen einander gleiche Lage)

keinen mindern Grad innerer Evidenz besitzt als der Satz:

Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind jederzeit einander selbst gleich;

welchem noch Niemand den Namen eines Grundsatzes streitig gemacht hat; und den obigen Satz, oder einen demselben analogen, möchten wir daher vorzugsweise der Lehre von den Parallellinien als Axiom, ohne welches man nun doch einmal nicht auskommen kann, zum Grunde gelegt sehen. Indess wir brechen hier ab, da uns zur ausführlichen Darlegung unserer Ansicht der Raum fehlt, und eine Uebereinstimmung der Mathematiker in dieser vielbesprochenen Lehre doch schwerlich jemals herbeizuführen sein wird; keineswegs aber haben wir durch die vorhergehenden Bemerkungen den von uns vollkommen anerkannten Werth des Buchs des Herrn Professors Kunze auch nur im Geringsten zu schmälern beabsichtigt.

Besonders hervorheben wollen wir noch die grosse Nettigkeit und Zierlichkeit, mit welcher die diesem Buche beigegebenen Tafeln von dem geschickten geographischen Kupferstecher Herrn Adolph Mädel zu Weimar ausgeführt worden sind, der für dergleichen Arbeiten recht sehr allgemein empfohlen zu werden verdient, welches wir daher, jedes Verdienst gebührend anerkennend, auch an diesem Orte zu thun nicht unterlassen wollen.

G.

Ragionamento di Giuliano Villanis sull' area d'un segmento determinato. Torino. 1841. 8. (E una nuova ricerca della quadratura del circolo.)

The Elements of Descriptive Geometry. By the Rev. Prof. Hall, King's College, 80 Illustrations. London. 1841. 8. 6 s. 6 d.

Scienza geometrica delle construzioni, ovvero geometria descrittiva di G. Scaffnit, capitano d'artiglieria professore etc. del granducato di Assia Darmstadt. Versione dal tedesco con illustrazioni ed aggiunte Vincenzo dr. Tuzzi professore supplente d'introduzione al calcolo sublime presso l'i. r. universita di Padova. Padova. 1841. 8.

Die Lehre von den Kegelschnitten, dargestellt für das Bedürfniss des Forstwirths. Programm zur Eröffnung der Vorlesungen an dem land- und forstwirthschaftlichen Institut in Hohenheim im Herbst 1841. Von Dr. Fr. J. P. Riecke, Professor der Mathematik und Physik. Stuttgart. 1841. 8.

Dem Herausgeber des Archivs ist diese kleine Schrift namentlich deshalb sehr interessant gewesen, weil der Herr Vf. in derselben von der Definition der Kegelschnitte ausgeht, welche der Herausgeber des Archivs in seinen Beiträgen zur reinen und an-

Digitized by Google

gewandten Mathematik. Theil I. Braudenburg. 1838. 4. S. 222. als Grundlage für den elementaren Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten angelegentlichst zu empfehlen sich erlaubt hat, nämlich von der folgenden Definition:

„Wenn eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben „gegeben sind, so heisst der Ort aller Punkte in dieser Ebene, „deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte und der gegebe„nen geraden Linie immer dasselbe Verhältniss zu einander haben, „ein Kegelschnitt, und zwar eine Parabel, wenn das constante „Verhältniss Verhältniss der Gleichheit ist, eine Ellipse, wenn es „ein Verhältniss des Kleinern zum Grössern ist, eine Hyperbel, „wenn es Verhältniss des Grössern zum Kleinern ist."

Aus dieser Definition leitet der Herr Vf. die Haupteigenschaften der Kegelschnitte fast durchgängig nach rein geometrischer Methode auf sehr einfache Weise ab, giebt Regeln zu ihrer Construction, lehrt die Quadratur der Parabel und die Cubatur des ganzen und abgekürzten Paraboloids, welche für den Forstwirth aus hinreichend bekannten Gründen von besonderer Wichtigkeit ist. Abgesehen von der speciellen Bestimmung der Schrift empfehlen wir dieselbe überhaupt Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten zur Beachtung bei dem Vortrage der Lehre von den Kegelschnitten, und würden uns sehr freuen, wenn dieselbe einen geeigneten Gelehrten zur Abfassung eines zwar kurzen, aber doch möglichst vollständigen Lehrbuchs der Kegelschnitte für Schulen nach rein geometrischer Methode, mit Ausschliessung aller algebraischer Rechnung und mit Zugrundelegung der obigen allgemeinen Definition der Kegelschnitte, veranlassen sollte, ein Unternehmen, von welchem wir uns sehr wesentliche Förderung des Unterrichts in der Lehre von den Kegelschnitten auf Schulen versprechen. Zunächst möchten wir natürlich den geehrten Herrn Vf. selbst zur Erweiterung seiner Schrift in der so eben näher angedeuteten Weise und für den in Rede stehenden Zweck uns aufzufordern erlauben, wozu derselbe schon als Würtemberger jedenfalls besonders befähigt ist, da bekanntlich in seinem Vaterlande die rein geometrische Methode immer besonders cultivirt worden ist und noch cultivirt wird. Dass diese Methode stets die Hauptgrundlage des mathematischen Unterrichts auf Schulen bilden und immer bleiben muss, kann nicht genug eingeschärft werden, da man, wie es uns scheint, jetzt schon bei'm mathematischen Unterrichte auf Schulen hin und wieder der Rechnung ein zu grosses Feld einräumt.

**H. P. Hamiltons Analytiska Framställning af Koniska Sektionerne. Ofwersatt af C. W. Enoberg. Med Fyra Plancher. Stockholm. 1841. 8. 1 Rdr. 30 sk.**

**Sopra i circoli osculatori delle curve, memoria letta nella pontificia accademia dei Lincei, dal dott. L. Bruned sacerdote romano. Roma. 1840. 8.**

Digitized by Google

## Trigonometrie.

Trigonometria plana et theses quas pro munere Lectoris edidit Mag. Joh. Wersäll, Gymnasii Adjunctus. Resp. Christ. Högman. Scarae. 1840. 8.

Quaestiones tetragonometricae. Dissertatio inauguralis quam etc. scripsit Julius Hartmann, Marburgensis. Marburgi. MDCCCXLI. 8.

Diese kleine empfehlenswerthe Gelegenheitsschrift giebt, nach einer Einleitung, in dem ersten Kapitel die Aufzählung aller in der Tetragonometrie vorkommenden Fälle, wobei der Vf. findet, dass sich dieselben auf sieben, oder eigentlich nur auf vier, Hauptprobleme zurückführen lassen, deren vollständige Auflösung sodann im zweiten Kapitel gegeben und durch einige vollständig ausgerechnete Beispiele hinreichend erläutert wird. Wer u. A. Biörnsen's dickleibige Introductio in Tetragonometriam ad mentem Lamberti analytice conscripta. Hafniae. 1780. 8. kennt, oder gar einmal das schwierige Unternehmen, dieselbe durchzuarbeiten, begonnen hat, wird dem Verf. für seine einfache Darstellung gewiss Dank wissen.

## Praktische Geometrie.

Travaux de la Commission pour fixer les mesures et les poids de l'Empire de Russie par A. Th. Kupffer. II Tomes, gr. in 4. St. Petersbourg. 1841. 5 Thlr. 8 ggr.

Crocker's Elements of Landsurveying. New Edition, corrected throughout, and considerably improved and modernized, by T. G. Bunt, Land-Surveyor, Bristol. To which are added Tables of Sixfigure Logarithms, superintended by Richard Farley, of the Nautical Establishment. 1842. Post 8. Price 12 s. cloth lettered.

The Tables of Six-Figure Logarithms, containing the Logarithms of Numbers from 1 ad 10000, and of Sines and Tangents for every Minute of the Quadrant and every Six Seconds of the first Two Degrees, with a Table of Constants, and Formulae for the Solution of Plane and Spherical Triangles, may be had separately, 4 s. 6 d. cloth.

Digitized by Google

## Mechanik.

The Elements of Mechanics; designed for the use of Students in the University. By James Wood, D. D. formerly Master of St. John's College Cambridge, and Dean of Ely. A New Edition, revised, re-arranged, and enlarged, by J. C. Snowball, M. A. Fellow of St. John's college, Cambridge. 1841. 8. 8 s. 6 d.

Dissertatio de pendulo et theses quas pro munere Lectoris edidit Mag. Andreas Holmstrand Collega scholae; Resp. Carol. Petro Lindström. Scarae. 1840. 4.

De motu globuli homogenei rigidi progressivo in superficee semicylindri recti concava, ratione frictionis atque resistentiae aeris posthabita dissertatio. Praes. J. G. Björling, in Reg. Acad. Ups. Mechan. Docens; Resp. J. C. Polheimer. Holmiae. 1840. 4.

## Praktische Mechanik.

Die Maschinen-Elemente und die Hydraulik. Letztere besonders auf die Berechnung und die Construction der Wasserräder angewendet. Ein Handbuch für Mechaniker, Fabrik-Dirigenten, Techniker u. s. w. von C. G. Kuppler, Prof. an der polytechnischen Schule zu Nürnberg. Auch unter dem Titel: Industrielle Mechanik. Nach Poncelet u. s. w. deutsch bearbeitet und mit Anmerkungen begleitet von C. G. Kuppler. II. Theil. Die Maschinen-Elemente und die Hydraulik. Mit 19 Kupfertafeln. Nürnberg. 1841. 8. 3 Thlr.

Von Dr. J. A. Hülsse's Maschinen-Encyclopädie (S. No. I. S. 11. des Literarischen Berichts) ist die 6ste Lieferung (1 Thlr.) erschienen.

Morin: Notice sur divers appareils dynamométriques. 2e. édit. Paris. 1841. 8. 1¼ Thlr.

Digitized by Google

## Astronomie.

J. H. Mädler's sehr empfehlenswerthe Populäre Astronomie ist nun vollständig erschienen. Das ganze Werk kostet jetzt 2⅔ Thlr.

Die Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. von Littrow. Zweite verbesserte Auflage in Einem Bande. Zweiter Abdruck. Mit dem Portrait des Verfassers und 117 Figuren. Stuttgart. 1842. 8. 3 Thlr.

Es genügt die Anzeige, dass von diesen allgemein bekannten Werke die dritte Auflage erschienen ist, die übrigens ganz mit den frühern Auflagen übereinzustimmen scheint.

Compendio di Astronomia, o sia Esposizione della natura e dei movimenti de' corpi celesti, preceduto da una introduzione storica, seguita da una biografia de' più celebri astronomi, da una bibliografia e da un vocabolario astronomico. Di Bailly. Milano. 1841. In-32.

Mathematische Geographie. Ein Leitfaden beim Unterrichte dieser Wissenschaft in höheren Lehranstalten. Von Dr. H. A. Brettner. 2te verb. und vermehrte Aufl. Breslau. 1840. 8. 8 ggr.

Kalender für alle Stände 1842. Herausgegeben von C. L. von Littrow, Adjunkten der K. K. Sternwarte zu Wien. Wien. 8. 12 ggr.

Dieser Kalender enthält neben den gewöhnlichen Kalender-Angaben auch eine kleine Ephemeride, deren Angaben aber nur bis auf Minuten gehen. Indess ist derselbe Liebhabern der Astronomie, die es bloss mit der Beschauung des Himmels zu thun haben, immerhin zu empfehlen, und verdient allgemeiner bekannt zu sein.

Kirchenrechnung von F. Piper. Berlin. 4. 1 Thlr.

Eine aus dem 2ten Hefte des 22sten Bandes des Crelle'schen Journals für die reine und angewandte Mathematik besonders abgedruckte sehr empfehlenswerthe Abhandlung.

Connaissance des tems ou des mouvements célestes, pour 1844; avec additions. Paris. 1841. 8. 3 Thlr.

Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1842. Con appendice di osservazioni e memorie. Milano. 1841. 8.

L'appendice contiene: Ascensioni rette della luna osservate negli anni 1835, 36, 37, 38 al circolo meridiano di Stark e paragonate colle tavole da Roberto Stambucchi. — Declinazioni della

Digitized by Google

luna dedotte dalle osservazioni fatte al circolo meridiano di Stark nel dicembre 1834 e negli anni 1835, 36, 37, 38 e paragonate colle tavole da Roberto Stambucchi.

Dien: Atlas des phénomènes celestes donnant le tracé des mouvements apparens des planètes. Paris. 1841. 4. 6 Thlr.

Dien: Atlas du Zodiaque. Paris. 1841. 4. 6 Thlr.

Annalen der K. K. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von J. J. und C. L. von Littrow. 20r Thl. Wien. 1840. gr. Fol. 3 Thlr. 14 ggr.

Wir werden später eine ausführliche Anzeige dieses bis jetzt uns noch nicht zugegangenen Werkes liefern.

---

## Physik.

Ueber den relativen Werth der Naturwissenschaften für die formelle Bildung der Jugend. Fest-Rede vom Prof. Dr. Jäger. Stuttgart. 1841. 3 ggr.

Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim Unterrichte. Von W. Eisenlohr. 3te Aufl. Mannheim. 1841. 8. 2 Thlr. 8 ggr.

Es wird hier die Anzeige genügen, dass von diesem längst allgemein bekannten trefflichen Lehrbuche die 3te Aufl. erschienen ist.

Lärobok i Fysiken af W. Eisenlohr, Professor i Matem. och Fysik i Mannheim. Från Andra Originalupplagan på Swenska Utgifwen af G. A. Lundhquist, Auskultant i Kongl. Bergs-Kollegium. Med 10 Planscher. Stockholm. 1841. 8. 3 Rdr.

Die Experimental-Physik, ein geistiges Bildungsmittel, in ihren Beziehungen zum praktischen Leben. Ein Handbuch für Lehrer an gehobenen Volks- und Bürgerschulen und technischen Anstalten von Dr. K. F. R. Schneider, Oberlehrer etc. Zweite Abtheilung: Mechanik, Atmometrie. Akustik. Dresden. 1841. 8. 16 ggr.

Das in Nr. III. S. 59 des Literarischen Berichts über die erste Abtheilung gefällte günstige Urtheil gilt auch von dieser zweiten Abtheilung.

Lehrbuch der Experimental-Physik für Real- und Gymnasial-Anstalten von Dr. C. H. Nagel, Professor der

Digitized by Google

Mathematik und Physik an dem obern Gymnasium und der höhern Bürgerschule zu Ulm. I. Abtheilung. Allgemeine Naturlehre für Gymnasial- und niedere Real-Anstalten. Ulm. 1842. 8. 20 ggr.

Wir halten dieses Buch für ein mit pädagogischem Takt sehr verständig angelegtes Lehrbuch der Physik für den ersten Unterricht in dieser Wissenschaft auf Schulen, welches in klarer Darstellung nur die Hauptgesetze giebt, mehreres Detail in mit kleinerer Schrift gedruckten Anmerkungen nur ganz kurz andeutet, und, den Weg der mathematischen Begründung verlassend, bloss den Experimentalweg betritt, weshalb dasselbe Lehrern für den Unterricht in den untern Klassen zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Bei dem physikalischen Unterrichte in den obern Klassen ist es dagegen nach unserer Ueberzeugung sehr zweckmässig, und dient zugleich sehr zur Unterstützung und Förderung des mathematischen Unterrichts, wenn den Schülern so häufig wie möglich gezeigt wird, wie viele wichtige Anwendungen sich schon bloss von den von ihnen bereits erlernten Lehren der Mathematik in der Physik machen lassen.

The mathematical Principles of Mechanical Philosophy, and their Application to the Theory of Universal Gravitation. By John Henry Pratt, M. A. Fellow of Gonville and Caius College, and of the Cambridge Philosophical Society. 2d Edition. Cambridge. 1841. 8. Ll. 1 s. boards.

Unterhaltungen aus dem Gebiete der Naturkunde. Von D. Fr. Arago. Fünfter Theil. Aus dem Französischen übersetzt von Dr. C. F. Grieb. Stuttgart. 1841. 8. 23 ggr.

Dieser Theil enthält die folgenden Aufsätze: Bericht an die Akademie der Wissenschaften über die während der Reise der von dem Schiffskapitäne Dü-Petit-Thouars befehligten Fregatte, die Venus, ausgeführten wissenschaftlichen Arbeiten.

Rede am Grabe Prony's.

Rede am Grabe Poisson's.

Bericht über das Daguerréotyp.

Von den Kometen.

Von der Temperatur der Erde.

Vom Kalender.

Breiten- und Längentabelle für die bedeutendsten Städte Frankreichs.

Verzeichniss der Tage des mittleren Jahres, an welchen eine regulirte Uhr Mittags um 12 Uhr um eine ganze Anzahl von Minuten vor- oder nachgehen muss.

Zeit des Hochwassers oder Stunden der Fluth in den bedeutendsten Häfen der Küsten Europa's; die Tage des Neu- und Vollmonds und die Länge dieser Häfen in Zeitminuten.

Von der Atmosphäre und ihren Verhältnissen zur Astronomie.

Physische Konstitution des Mondes.

Geschichte der Astronomie.

Vom Thierkreise.

Von den Fixsternen.

Digitized by Google

Physische Konstitution der Sonne.
Von den Planeten.
Anblick des Himmels.

Ueber die Berechnung von Beobachtungen durch die Methode der kleinsten Quadratsummen. Vom Prof. Dr. J. A. Hülsse. Leipzig. gr. 4. ⅓ Thlr.

Tables psychrométriques et barométriques à l'usage des observatoires météorologiqes de l'Empire de Russie. gr. in 8. St. Petersbourg. 1841. 13 ggr.

Dass auf allen meteorologischen Observatorien in Russland alle Rechnungen und Reductionen nach denselben Tafeln gemacht werden, ist eine höchst zweckmässige Einrichtung, und wir möchten hier wohl den Wunsch aussprechen, dass auch Beobachter in andern Ländern sich zu dem Gebrauche dieser Tafeln entschliessen und vereinigen möchten. Uebereinstimmende Instrumente und Reductions-Elemente scheinen uns bei allen meteorologischen Beobachtungen ein sehr wesentliches Erforderniss zu sein.

A Manual of Electricity, Magnetism and Meteorology. By Dionysius Lardner, D. C. L. F. R. S. etc. Vol. I. 1841. 8. 6 s. cloth. Being Vol. 130 of the Cabinet Cyclopaedia. (To be completed in Three more Volumes).

Beiläufig bemerken wir hierbei, dass die Cabinet Cyclopaedia auch die folgenden früher erschienenen Abtheilungen enthält:

A Treatise on Geometry. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Hydrostatics and Pneumatics. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Arithmetic. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Heat. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Mechanics. By Capt. Kater and Dr. Lardner. 6 s.
A Treatise on Astronomy. By Sir John Herschel. 6 s.
A Preliminary Discourse on the study of Natural-Philosophy. By Sir J. Herschel. 6 s.
The History of Natural Philosophy. By Baden Powell. 6 s.
A Treatise on Optics. By Sir David Brewster. 6 s.
A Treatise on Chemistry. By Prof. Donovan. 6 s.
Essay on Probabilities. By Prof. Dr. Morgan. 6 s.

Geschichte der Fortschritte der Geologie und Einleitung in diese Wissenschaft. Von Carl Lyell. A. d. Engl. von Carl Hartmann. Auch unter dem Titel: Grundsätze der Geologie oder die neuen Veränderungen der Erde und ihrer Bewohner in Beziehung zu geologischen Erläuterungen. I. Band. Weimar. 1842. 8. 2 Thlr.

Den zweiten Band dieses Werkes bilden die in Nr. III. S. 61 des Literarischen Berichts angezeigten neuen Veränderungen der unorganischen Welt u. s. w., weshalb dem obigen ersten Bande auch ein besonderer Titel zu dem früher angezeigten, unmittelbar vorher namhaft gemachten Werke beigelegt worden ist.

Digitized by Google

## Vermischte Schriften.

Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, tome XIV, un fort vol in 4. avec gravures et une lithographie. Bruxelles. 1841. 4 Thlr.
contenant:

Crahay: Résumé des observations météorologiques faites en 1840 à Louvain.

Quetelet: Résumé des observations sur la météorologie, sur le magnétisme, sur les températures de la terre, sur la floraison de fleurs, plantes etc., suivi des comparaisons barométriques faites à Bruxelles et dans le nord de l'Europe, par Bravais et Ch. Martins.

Mémoires couronnés par l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettre de Bruxelles, tome XV, 1re partie, 1840—1841. gr. in 4. Bruxelles. 1841. 2 Thlr.
contenant:

Moriz Stern: Recherches sur la théorie des résidus quadratiques; mémoire en reponse à la question suivante: On demande un mémoire d'analyse algébrique, dont le sujet est laissé au choix des concurrens.

## Preisaufgaben.

Aufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris für 1843.

„Perfectionner les méthodes par lesquelles on résout le problè„me des perturbations de la lune ou des planètes, et remplacer les „développements ordinaires en séries de sinus et de cosinus par „d'autres développements plus convergents, composés de termes pé„riodiques que l'on puisse calculer facilement à l'aide de certaines „tables construites une fois pour toutes."

Le prix consistera en une medaille d'or de la valeur de 3000 Fr. Les mémoires devront être arrivés au secrétariat de l'Académie avant le 1er avril 1843. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté, qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée.

Digitized by Google

## Vorläufige Nachricht über eine neue Zeitschrift für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände.

In München erscheint vom Anfange dies Jahres an eine neue Zeitschrift unter dem Titel:

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont, Conservator der Königlichen Sternwarte bei München, ordentl. Mitgliede der Königl. Academie der Wissenschaften in München, u. s. w.

Der Gedanke, welchem diese Zeitschrift ihre Entstehung verdankt, ist in neuerer Zeit schon oft zu realisiren versucht worden, ohne dass diese Versuche bis jetzt mit dem Erfolge des Gelingens gekrönt worden wären. Jeder, wer sich lebhaft für Meteorologie interessirt, kennt die grossen Dienste, welche die ehemalige sogenannte Societas Palatina zu Mannheim dieser Wissenschaft geleistet hat, und weiss, dass die von derselben herausgegebenen Ephemeriden *) noch immer die wichtigste Fundgrube für meteorologische Untersuchungen sind, wobei auch der Kurfürst Carl Theodor von der Pfalz, welcher diese meteorologische Gesellschaft stiftete, den Abt Hemmer als deren Director an ihre Spitze stellte, und dieselbe in den Stand setzte, nach fernen Gegenden meteorologische Instrumente zu senden, die alle bis dahin verfertigten an Genauigkeit übertrafen und vollkommen übereinstimmend waren, stets in dem dankbarsten Andenken fortleben und in den Annalen der Meteorologie immer mit Hochachtung genannt werden wird. Ein ähnlicher allgemeiner meteorologischer Verein ist im vorigen Jahre in München gestiftet worden. Sämmtliche mitarbeitende Meteorologen erhalten sorgfältigst regulirte meteorologische und magnetische Instrumente, die in der Werkstätte der Königlichen Sternwarte bei München verfertigt und bloss gegen Erstattung der Auslagen, d. h. ungefähr zu dem dritten Theile des gewöhnlichen Preises, geliefert werden, wonach ein Barometer zu dem höchst geringen Preise von 6 Gulden, ein Doppelthermometer (eine Art Psychrometer) zu dem ebenfalls äusserst niedrigen Preise von 3 Gulden 30 Kr. abgelassen wird **). Die Beobachtungen wer-

*) Ephemerides Soc. meteorolog. palatinae. Historia et observationes. Manh. 1783—1792. XII. T. 4.

**) Die magnetischen Instrumente sind natürlich verhältnissmässig theurer, im Ganzen jedoch die Preise, welche einem Jeden auf Verlangen bereitwilligst mitgetheilt werden, so niedrig als nur irgend möglich gestellt, so dass durch dieselben bloss die Auslagen einigermassen gedeckt werden. Die sogenannten Differential-Instrumente können in jedem Hause, wenn nur in der Nähe keine veränderlichen Eisenmassen sind, aufgestellt und gebraucht werden. Natürlich kann man sich aber dem Vereine auch bloss für eigentliche meteorologische Beobachtungen, ohne sich zugleich zu magnetischen Beobachtungen zu verpflichten, anschliessen.

Digitized by Google

den an allen Stationen nach einem gemeinschaftlichen Plane gemacht und in den verschiedenen Ländern durch besondere dazu bestimmte Meteorologen redigirt. Die Redaction für Bayern hat Herr Dr. Lamont, die Redaction für Oesterreich haben die Herren Astronomen Koller zu Kremsmünster und Kreil zu Prag, die Redaction für Würtemberg hat Herr Prof. Plieninger, für Baden Herr Prof. Stieffel übernommen, und dem nördlichen Deutschland hofft der Unterzeichnete seine Kräfte zu widmen. Die oben genannten Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, deren Herausgabe, so wie die oberste Leitung des ganzen Unternehmens, Herr Doctor Lamont in München besorgt, sind zur Bekanntmachung der von den Redactoren nach München als dem Centralpunkte für das gesammte Unternehmen, gesandten Beobachtungsjournale, zur Mittheilung geeigneter Aufsätze, Abhandlungen u. dergl. durch den Druck bestimmt, so dass man dieselben alle an einem Orte beisammen findet. Die Druckkosten werden entweder ganz oder wenigstens so weit dieselben nicht durch den Absatz gedeckt werden, von der Königlich Bayerischen Regierung getragen, so dass also das Unternehmen durch diesen neuen Beweis der Munificenz, mit welcher von jeher die Königlich Bayerische Regierung sich die Förderung der Wissenschaften angelegen sein lässt, vollkommen gesichert erscheint, und nur zu wünschen übrig bleibt, dass noch recht viele Meteorologen in den verschiedensten Ländern und den entferntesten Gegenden sich dem Vereine anschliessen, weshalb sie sich entweder unmittelbar nach München an Herrn Doctor Lamont oder an den ihnen zunächst wohnenden Redacteur zu wenden haben, um auf dem kürzesten und wohlfeilsten Wege die ihnen nöthigen Instrumente, Instructionen, u. s. w. zu erhalten. Dies für jetzt nur als vorläufige Nachricht über ein Unternehmen, welches, wie wir wenigstens wünschen und hoffen, der Meteorologie und verwandten Wissenschaftszweigen die schönsten Früchte tragen wird.

Greifswald den 11. März 1842.

Grunert.

Digitized by Google

# VII.
# Literarischer Bericht.

## Philosophie der Mathematik.

Die Philosophie der Mathematik. Zugleich ein Beitrag zur Logik und Naturphilosophie von Const. Franz. Leipzig. 1842. 8. 1½ Thlr.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A Course of Mathematics, principally designed for the Use of Students in the East India Company's Military Seminary at Addiscombe. By the Rev. J. Cape, M. A. etc. Professor of Mathematics and Classics at Addiscombe. Vol. 2. 8. 16 s. cloth. Vol. 1. 8. 15 s. cloth.

## Arithmetik.

Bourdon: Ausführliches Lehrbuch der Algebra. Aus dem Franz. von E. W. Müller. Quedlinburg. 1842. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

The Analysis and Solution of cubic and biquadratic Equations; forming a Sequel to „The Elements of Alge-



Digitized by Google

bra" and an Introduction to „The Theory and Solution of the Higher Orders." By J. R. Young, Prof. of Mathematics in Belfast College. 1842. 6 s.

Theoretisch en Practisch Leerboek der Algebra, of Stelkunst voor de Scholen. Eerste deel. Te Dordrecht. gr. 8. f 1, 80. 1842.

J. Badon Ghijben en H. Strootman (Leeraren der 1ste Klasse in de Wiskunde, bijde Koninklijke Militaire Akademie te Breda) Vervolg op de beginselen der Stelkunst, bevattende de leerwijze der onbepaalde coefficienten; eene korte beschouwing der permutatien en combinatien; de ontwikkeling van het binomium; iets over de gedurige breuken; de theorie der hoogermagts vergelijkingen, die der rekenkunstige reeksen van hoogeren rang, en eindelijk de ontwikkeling der logarithmische en exponentiale functien; gr. 8. Te Brede. 1841. f 1, 40.

Arithmetical Tables. 19 th Edition, with Additions, by Thomas Bourn, 1842. 8d. sewed.

Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bearbeitet von Jakob Friedrich Fries. Braunschweig. 1842. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Diese Schrift eines der scharfsinnigsten, zugleich mit ausgezeichneten mathematischen Kenntnissen ausgerüsteten Philosophen verdient jedenfalls der Aufmerksamkeit der Mathematiker sehr empfohlen zu werden. Eine Beurtheilung derselben würde viel mehr Raum in Anspruch nehmen, als unsere Literarischen Berichte darzubieten bestimmt sind, weshalb wir uns begnügen müssen, den Zweck, welchen der Vf. durch seine Schrift zu erreichen beabsichtigte, mit seinen eignen Worten aus der Vorrede anzugeben. Der Verf. sagt nämlich: „Durch den Naturalismus der Encyclopädisten wurde den ruhigeren Gebildeten in Frankreich eine gleichsam Epikurische Begeisterung für Aufklärung, Wahrheit und Menschenrechte gegen alle Arten der Vorurtheile und des Aberglaubens zu Theil, welche zur Zeit der Revolution die edle Geistesanregung für weltbürgerliche wissenschaftliche Interessen brachte, nicht nur Einheit von Maass und Gewicht zu bestimmen suchte, sondern sich aller grossartigen naturwissenschaftlichen Interessen annahm. Aber die übertriebenen politischen Hoffnungen dieser Begeisterung wurden durch den jakobinischen Pöbel an den meisten ihrer nach der Gironde benannten edlen Vertreter blutig gestraft. Zu den Lieblingsideen dieser Aufklärung gehörte dann auch, wie vorzüglich Condorcet, einer der Erschlagenen, lehrte, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer der wichtigsten Gegenstände des öffentlichen Unterrichts sei, denn sie sei die Rechnung des gesunden Menschenverstandes, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluss von Hoffnung, Furcht und allen Gemüthsbewegungen auf unser Gemüth vernichtet und somit Vorurtheil und Aberglaube aus dem Urtheil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne. Damit ist uns denn auch eine höchst wichtige Wahrheit angeregt

Digitized by Google

worden; aber die Begründung der ganzen Lehre ist eigentlich philosophisch, und darin blieben jene Lehrer sehr einseitig und erregten deswegen überspannte Hoffnungen, denen nie entsprochen werden kann. Die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht nämlich auf der Theorie der Inductionen, und hier gehen jene Lehrer von dem Sensualismus des Locke, Condillac und Hume aus, und wollen alle Inductionen nur als empirische nachweisen, welche ohne alle Erkenntnisse a priori gelten sollen. Dagegen hat uns Kant belehrt, dass jede Erfahrung erst a priori erkannte Bedingungen ihrer Möglichkeit voraussetze, und wir leiten daraus ab, dass jede taugliche Induction eine rationelle werden müsse, welche nicht nur durch die Erwartung ähnlicher Fälle, sondern zuhöchst immer durch leitende Maximen gelte, deren oberste a priori erkannt werden.

So wird es nothwendig für die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Metaphysik des Calculs, wie die Franzosen sagen, eine andere Grundlage zu geben. Dazu kommt nun noch, dass die Franzosen, durch die einseitige Begründung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein viel zu weites Feld geben wollen, indem im Grunde alle unsre Erkenntniss allgemeiner Gesetze von ihren Regeln abhängen soll. Dadurch ist es gekommen, dass sie viele Aufgaben stellen, und Lehren ausführen, die gar keinen wahren Grund haben, und dagegen beabsichtige ich hier meine Rede zu richten, wiewohl ich damit vielen der grössten Mathematiker streitend entgegentrete. Ich behaupte, dass der Grundbegriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau bestimmt sei; ich behaupte, dass die ganze herkömmliche Lehre von der Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen und der richterlichen Entscheidungen falsch sei, und, was das Wichtigste ist, ich muss einen grossen Theil der Lehren von der Wahrscheinlichkeit a posteriori ganz zu beseitigen suchen.

Dies sind die Zwecke der hier vorliegenden Arbeit. Am Schluss der Vorrede sagt der Verf. endlich noch: „Während ich an dieser Abhandlung arbeite, ist Poissons grosses Werk: recherches sur la probabilité des jugemens; nicht nur erschienen, sondern auch in meine Hand gelangt. Die grosse Kunst der mathematischen Analysis, welche ihm eigen war, zeigt sich darin auf eine glänzende Weise, daneben hat er manchen besondern von den Fehlern gerügt, gegen welche ich meine Kritik richte; aber die Grundgedanken trifft er doch nicht, ein wichtiger Theil meiner tadelnden Kritik bleibt auch gegen ihn stehen.

## Geometrie.

Geometrie für Realschulen von J. A. Pflanz. Dritter Theil. Stuttgart. 1842. 8. 6 ggr.

Die beiden ersten Theile sind in Nr. V. des Literarischen Berichts S. 76 kurz angezeigt. Dieser dritte Theil enthält die prak-



Digitized by Google

tische Geometrie, d. h. nicht die Feldmesskunst, sondern eigentlich bloss Flächen- und Körperberechnungen, wobei sich der Verf. auch der Algebra bedient.

**Populäre Geometrie für Künstler und Professionisten, welche die nöthigsten Lehren und Aufgaben der Geometrie leicht kennen lernen und sie mit Erfolg für ihre Arbeiten benutzen wollen. Nebst einer Beschreibung einiger Messapparate, Vergleichung deutscher Maasse und Gewichte, u. s. w. Von Dr. G. A. Jahn. Leipzig. 1842. 8. 1 Thlr. 8 ggr.**

Dieses Buch leistet das, was es verspricht, auf eine zweckmässige Weise, und kann auch bei'm Unterrichte auf Bürger- und niedern Realschulen als eine Anleitung zu geometrischen Zeichnungen und Rechnungen zweckmässig gebraucht werden. Tafeln zur Vergleichung der verschiedenen Maasse, so wie Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 in drei Decimalstellen sind angehängt, und Erläuterungen über Maassstäbe, über den Nonius, über die verschiedenen Arten von Setzwagen, Niveau's und Libellen sind nicht übergangen, so dass dieses Buch in dem Kreise, für welchen es bestimmt ist, recht nützlich werden kann.

**Theorie der periodisch-homologen Punkte, Geraden und Ebenen in Bezug auf das System dreier Kegelschnitte, welche einen vierten doppelt berühren, und auf das von vier Flächen der zweiten Ordnung oder Klasse, welche eine fünfte umhüllen, von Fr. Seidewitz. Heiligenstadt. 1842. 4.**

Dieses Programm des Gymnasiums zu Heiligenstadt von Ostern 1842 zeugt von einer sehr genauen Kenntniss und vieler Uebung seines Verfs. in der sogenannten neuern Geometrie, und verdient allgemeiner bekannt und beachtet zu werden. Die beiden Aufgaben, deren Lösung der Verf. vorzüglich zum Zweck hat, drückt derselbe in der Vorrede auf folgende Art aus:

I. Wenn ein beliebiger Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, und wenn drei andere Kegelschnitte der Bedingung unterworfen sind, ein jeder den ersteren doppelt zu berühren und durch drei Punkte zu gehen oder drei Gerade zu berühren, welche beliebig in seiner Ebene gegeben sind, was also dreimal drei gegebene Punkte oder Gerade macht: einen fünften zu zeichnen, welcher jeden der drei letzteren einfach, und den ersteren ebenfalls doppelt berühre; das Ganze mittelst des Lineals allein.

II. Wenn eine beliebige Fläche des zweiten Grades gezeichnet vorliegt, und wenn vier andere Flächen desselben Grades der Bedingung unterworfen sind, eine jede die erstere zu umhüllen und durch vier Punkte zu gehen oder vier Ebenen zu berühren, welche beliebig im Raume gegeben sind, was also viermal vier gegebene Punkte oder Ebenen macht: eine sechste zu zeichnen, welche jede der vier letzteren berühre und die erstere ebenfalls umhülle; das Ganze mittelts des Lineals allein.

Alle, welche sich für die sogenannte neuere Geometrie überhaupt, und das Problem von den Berührungen insbesondere interessiren, machen wir wiederholt auf dieses Programm aufmerksam.

---

Digitized by Google

## Praktische Geometrie.

A Treatise on Land Surveying and Levelling, illustrated by copious Field Notes, Plans, and Diagrams, in Four Parts, by the Chain, Theodolite, Circumferentor, and Spirit Level; with Drawings, explaining their use, and exhibiting their adjustment: together with introductory chapters on Geometry, Logarithms, Mensuration and Trigonometry; and an Appendix of Tables of Logarithms, Sines, Cosines, Tangents etc. to Six Places; and a Troverse Table to any Distance, and to Three Minutes of Bearing. By H. J. Castle, Surveyor and Civil Engineer, Lecturer on Practical Geometry and Levelling to King's College, London. 1842. 8. 14 s. cloth.

Der geschwind und richtig rechnende Markscheider. Von K. W. Böbert. 2te Aufl. Quedlinburg. 1842. 8. 1½ Thlr.

## Trigonometrie.

Plain and spherical Trigonometry. By H. W. Jeans, F. R. A. S. Royal Naval College, Portsmouth, late Mathematical Master, in the Royal Military Academy, Woolwich. Part I, containing Rules, Examples, and Problems, 1842. 3 s. 6d. cl. Portsea: Woodward. London: Longman, Brown and Co.

## Mechanik.

Lehrbuch der Mechanik nebst einem Anhange über Pendel und Wage. Gemeinfasslich dargestellt von Dion. Lardner und H. Kater. Aus dem Englischen v. Heinrich Kossmann. Stuttgart. 1842. 8. 1 Thlr. 18 ggr.

Digitized by Google

## Praktische Mechanik.

Mechanik für Gewerbetreibende. Enthaltend: Die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, den Mittelpunkt der Schwere und die mechanischen Potenzen. Erläutert durch Beispiele und Figuren. Von LL. D. Alex. Jamieson. In 3 Abtheilungen. Wien. 1841. 8. 4⅔ Thlr.

Jolly, Prof. Dr. Ph.. Specimen primum ad doctrinam de machinarum effectu pertinens. 8 maj. Heidelbergae. 1841. ⅓ Thlr.

Der praktische Maschinenbauer. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Mechaniker, Kunstdrechsler und Fabrikbesitzer. Nach den besten Werken über diesen Gegenstand bearbeitet von Andr. Valent. Demme. Achte Lieferung. Mit Abbildungen. Quedlinburg und Leipzig. 1842. 8. 1 Thlr. 20 ggr.

---

## Astronomie.

Populäres astronomisches Hand-Wörterbuch oder Versuch einer Erklärung der vornehmsten Begriffe und Kunstwörter der Astronomie, sammt Nachrichten von der Geschichte der astronomischen Entdeckungen und Erfindungen, biographischen und literarischen Notizen, und einer kurzen Andeutung der Methoden und Werkzeuge. Mit Ausschluss aller irgend entbehrlichen analytischen Formelsprache. Von Dr. J. E. Nürnberger. Kempten. 1842. 8.

Von diesem populären astronomischen Handwörterbuche sind bis jetzt das erste von Abend bis Bahnen der Planeten, Kometen und Doppelsterne und das zweite bis Compass reichende Heft in unsere Hände gelangt. Eine Beurtheilung, die jetzt voreilig sein würde, müssen wir bis zur Vollendung des ganzen Werks versparen. Der Preis jedes dieser beiden zwölf Bogen starken Hefte ist 8 ggr.

Recreations in Astronomy with a Glossary. By the Rev. Lewis Tomlinson, M. A. 2d. Edition, with 50 Illustrations, 1842. 4s. 6d

Digitized by Google

Anfangsgründe der mathematischen Geographie, ein Lehrbuch für höhere Gymnasien und Realschulen. Von B. Studer. 2te verb. Ausg. Bern und Chur. 1842. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Die erste Ausgabe dieses empfehlenswerthen und ziemlich vollständigen, nur elementare mathematische Kenntnisse voraussetzenden Lehrbuchs der mathematischen Geographie erschien im Jahre 1836.

Anleitung zur genauen Bestimmung des Ganges und Standes der Uhren. Ein unentbehrliches Handbuch für Uhrmacher und Freunde der Astronomie, so wie für Alle, die einer sichern Zeitkenntniss bedürfen, als Gutsbesitzer, Geistliche und Schullehrer auf dem Lande. Von Dr. G. A. Jahn. Leipzig. 1842. 8. 1¼ Thlr.

J. H. W. Lehmann: die Sonnenfinsterniss am 8. Juli 1842, nach allen astronomischen und physischen Umständen für die Orte der Erde, wo sie sehr gross oder total erscheint, auf's Sorgfältigste berechnet und in einem vollständigen Ueberblick, mit Berücksichtigung früherer Erscheinungen dieser Art, gemeinfasslich dargestellt. Nebst einer in Stein gezeichneten graphischen Darstellung für Europa. Brandenburg. 1842. 8. 12 ggr.

Ueber die Bestimmung der Entfernungen im Weltgebäude. Ein Vortrag im wissenschaftlichen Vereine zu Berlin gehalten von J. F. Encke. Berlin. 1842. 8. 4 ggr.

Ein sehr ansprechender gemeinverständlicher, auch die neuern Arbeiten von Bessel und Struve über die Bestimmung der Parallaxe der Fixsterne zweckmässig berücksichtigender Aufsatz.

---

## Physik.

---

Die Experimental-Physik, methodisch dargestellt von Jacob Heussi. Erster Cursus. Kenntniss der Phänomene. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin. 1839. 8. Zweiter Cursus von den physikalischen Gesetzen. Berlin. 1838. 8. Dritter Cursus von den physischen Kräften. Berlin. 1840. 8. Alle drei Cursus. 3 Thlr.

Dieses methodisch abgefasste Lehrbuch der Physik für den Schulunterricht ist leider erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangt; weil wir aber die Ueberzeugung haben, dass dasselbe den Lehrern an Gymnasien und andern Lehranstalten recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient, so holen wir hier eine kurze An-

Digitized by Google

zeige nach, und wünschen, dass dieselbe zur weitern Verbreitung dieser empfehlenswerthen Schrift beitragen möge. In der Vorrede zum ersten Cursus sagt der Verf.: „betrachten wir irgend eine Naturerscheinung, so bietet sich uns dreierlei dar: erstlich die Erscheinung selbst, die wir beobachten; zweitens die Art und Weise, auf welche sie vor sich geht, und drittens die Ursachen, welche sie hervorrufen. Die Erfahrungsnaturlehre muss nothwendig diese drei Dinge von einander trennen; der Stein fällt zur Erde, das sieht jedes Kind; er fällt aber mit beschleunigter Bewegung und nach einem bestimmten Gesetze; dies kennen zu lernen erfordert eine genauere Untersuchung und eine höhere Bildungsstufe als ersteres; endlich frägt sich, warum der Stein nach der Erde fällt, und woher es kommt, dass er gerade das durch die Erfahrung ausgemittelte und nicht ein anderes Gesetz befolgen müsse. Eine noch höhere Bildungsstufe, mathematische Vorkenntnisse u. s. w. sind zur Beantwortung dieser Fragen unumgänglich nöthig.“ Hierdurch sind, wie es uns scheint, schon die Principien deutlich genug bezeichnet, welche den Verf. bei der Bearbeitung seiner drei Cursus geleitet haben. Ehe ein Naturgesetz richtig aufgefasst werden kann, muss der Sinn dafür geweckt, das Streben danach angeregt werden. Der erste Cursus ist ganz dieser Uebung des Beobachtungsvermögens gewidmet. Im zweiten Cursus werden dann die Naturgesetze betrachtet; der dritte endlich enthält theils solche mathematische Entwickelungen physikalischer Gegenstände, die mit Hülfe der Elementar-Mathematik durchgeführt werden können, theils ist derselbe der Betrachtung des innern Zusammenhangs der Naturerscheinungen gewidmet, so weit die Wissenschaft darin gekommen und der Gegenstand für die Schule passend ist. Wir sind mit dem Verf. darin ganz einverstanden, dass nur auf diesem von ihm vorgezeichneten Wege, oder auf einem ähnlichen, der physikalische Unterricht auf Schulen gute Früchte tragen kann, worin uns auch eine mehrjährige Erfahrung zur Seite steht. Den ersten Cursus des vorliegenden Buchs möchten wir für die unteren, den zweiten für die mittlern, den dritten für die obern Klassen bestimmen. Letzterer setzt allerdings ein ziemliches Maass mathematischer Elementar-Kenntnisse voraus, jedoch nur solcher, auf welche sich der mathematische Unterricht auf Gymnasien und höhern Bürgerschulen zu erstrecken pflegt. Freilich aber wird bei dem Unterrichte nach diesem Cursus in den obern Klassen immer noch der Umstand hindernd entgegentreten, dass nicht alle Schüler schon die mathematischen Kenntnisse, welche dieser Cursus voraussetzt, besitzen, weil dieselben zum grössten Theile erst aus den Theilen der Mathematik entnommen werden können, welche in den obern Klassen gelehrt werden. Dies ist indess ein Uebelstand, der überhaupt nur mit grossen Schwierigkeiten beseitigt werden kann, und vielleicht ganz nie zu beseitigen ist. Jedenfalls sind wir aber der Meinung, dass der physikalische Unterricht in den obern Klassen so viel als irgend möglich auf einer strengen mathematischen Basis ruhen muss, möchten jedoch auch hier wegen des oben erwähnten Uebelstandes einen Mittelweg für den geeignetsten und besten halten, welches weiter auszuführen uns hier die Beengtheit des Raums verbietet. Jedenfalls verdient aber, was wir hier nochmals wiederholen, das vorliegende Lehrbuch von allen Lehrern der Physik recht sehr beachtet zu werden. Dasselbe wird in den

Digitized by Google

Händen eines geschickten Lehrers insbesondere dann, wenn demselben vornehmlich bei dem Unterrichte nach dem dritten und zweiten Cursus ein guter, wenn auch keineswegs sehr glänzender, aber doch zweckmässig eingerichteter physikalischer Apparat zu Gebote steht, dem Gedeihen des physikalischen Unterrichts gewiss sehr förderlich sein.

Lehrbuch der Physik, nach dem gegenwärtigen Standpunkte dieser Wissenschaft bearbeitet, zum Gebrauche bei Vorlesungen auf höheren Gymnasien und mit besonderer Berücksichtigung für Militairbildungsanstalten. Von C. F. Peschel, Hauptmann und Lehrer der Kriegs- und Naturwissenschaften an der Königl. Sächsischen Militairbildungsanstalt. Erste Abtheilung: Physik der wägbaren Stoffe. Dresden und Leipzig. 1842. 8. 2 Thlr.

Der Vortrag in diesem Werke ist deutlich und setzt nur die ersten Elemente der Mathematik bis etwa einschliesslich zur Trigonometrie voraus. Besondere Eigenthümlichkeiten sind uns nicht aufgefallen.

Astronomisch-meteorologisches Jahrbuch für Prag von K. Kreil. Erster Jahrgang. 1842. Prag. 1842. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Nach Erläuterungen über die Einrichtung dieses Jahrbuchs und der gewöhnlichen astronomischen Ephemeride folgt eine gemeinfassliche Darstellung der Resultate der Prager Beobachtungen über Magnetismus und Meteorologie, und hierauf Monatmittel der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen zu Prag, Mailand, Ofen, Gratz. Die gemeinfassliche Darstellung der Resultate der Prager Beobachtungen kann zugleich als eine recht zweckmässige, allgemeinverständliche Anleitung zu meteorologischen und magnetischen Beobachtungen betrachtet werden.

Die Witterungsverhältnisse von Berlin. Eine Vorlesung von H. W. Dove. Berlin. 1842. 8. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Diese im Vereine für wissenschaftliche Vorträge zu Berlin gehaltene Vorlesung ist von allgemeinem Interesse und kann nach unserer Ueberzeugung überhaupt als ein Muster für solche allgemein verständliche, für ein grösseres Publikum bestimmte wissenschaftliche Vorträge betrachtet werden, da dieselbe gewiss jedem Gebildeten ansprechen wird.

Meteorography; or the Perpetual Weather Almanac. Contains nearly 50 of the Signs which occur before every change of weather, engraved and coloured from nature. 1842. 2s. 6d.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber. Leipzig. 1841. 8. 2 Thlr.

Dieser Jahrgang enthält die folgenden Abhandlungen:

Zur Bestimmung der Constanten des Bifilarmagnetometers. Von Gauss.



Digitized by Google

Vorschriften zur Berechnung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in der Ferne ausübt. Von Gauss.

Vorschlag die Variationen des Stabmagnetismus beim Bifilarmagnetometer unabhängig von der Kenntniss der Temperatur zu bestimmen. Von Weber.

Ueber magnetische Friction. Von Weber.

Ueber die absolute horizontale Intensität in Christiania. Von Hansteen.

Untersuchung über die mittlere Declination in Göttingen. Von Goldschmidt.

Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse. Von Weber.

Ueber das electrochemische Aequivalent des Wassers. Von Weber.

Magnetische Beobachtungen. Von Hansteen.

Auszug aus den täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Göttingen im Jahre 1840. Von Goldschmidt.

Ueber die Bestimmung der absoluten Intensität. Von Goldschmidt.

Resultate aus den in den Jahren 1834 — 1836 von Sartorius von Waltershausen und Listing in Italien angestellten Intensitätsmessungen. Von Listing.

Vergleichung magnetischer Beobachtungen mit den Ergebnissen der Theorie. Von Goldschmidt.

Erläuterungen zu den Terminszeichnungen und Beobachtungszahlen.

Beobachtungszahlen von den Variationen der Declination und Intensität in den Terminen vom 28 — 29. Februar, 29 — 30. Mai, 28 — 29. August und 27 — 28. November 1840.

---

## Vermischte Schriften.

Dreihundert Aufgaben aus der höhern und angewandten Mathematik. Von D. E. L. Lehmus. Berlin. 1842. 8. 18 ggr.

Das Programm der Petrischule zu Danzig von Michaelis 1841 enthält S. 9 — 14 wieder mehrere sehr beachtungswerthe wissenschaftliche Bemerkungen des Herrn Professors und Directors F. Strehlke zu Danzig, mathematischen und physikalischen Inhalts, welche denselben Zweck haben, wie die Aufgaben, von denen im ersten Theile des Archivs. S. 435 Nr. LV. und in Nr. IV. S. 67 des literarischen Berichts die Rede gewesen ist. So bald es der Raum gestattet, werden wir wieder Mehreres aus diesen Bemerkungen im Archive unter der Rubrik: Uebungsaufgaben für Schüler, mittheilen.

Digitized by Google

Auch in dem Programm des Catharineums zu Lübeck von Ostern 1842 sind auf S. 34—40 von Herrn Chr. Scherling mehrere bei'm Unterrichte wirklich vorgekommene geometrische Aufgaben, die mit Hülfe der Algebra ohne Anwendung der Goniometrie lösbar sind, mitgetheilt. Auch von diesen Aufgaben sollen mehrere, so bald es der Raum erlaubt, im Archive mitgetheilt werden.

Zu wünschen ist, dass mehrere Lehrer dem von den Herren Strehlke und Scherling gegebenen Beispiele, solche Aufgaben, die bei'm Unterrichte wirklich vorgekommen sind, in den Programmen mitzutheilen, folgen. In dem Archive werden dieselben gewiss immer möglichste Berücksichtigung finden.

Gelegentlich mag hierbei noch bemerkt werden, dass das Programm des Catharineums zu Lübeck von Michaelis 1840 folgende Abhandlung enthält:

Ueber die Curven, die enthalten sind in der Polargleichung $u = a\,F.\,\mathrm{trig}\,(\varphi)$ und über diejenige, welche dargestellt wird durch die Polargleichung $u = a \sec \varphi + b$. Von Chr. Scherling, Coll. für Mathem. und Naturw.

Der Verf. hat nämlich in dieser Abhandlung den Zweck: die Curven zu untersuchen, welche die Eigenschaft haben, dass der Radius Vector eines jeden Punktes gleich sei dem Produkte aus einer constanten Grösse $a$ in irgend eine trigonometrische Function des Winkels, den der Radius Vector mit einer festen durch den Pol gehenden Linie macht.

Mathematical Tracts: 1. Lunar and Planetary Theories. 2. Figure of the Earth. 3. Precession and Nutation. 4. Calculus of Variations. 5. Undulatory Theory of Optics, and Theory of Polarization. Designed for the use of Students in the Universities. By G. Biddell Airy, M. A. F. R. S. Astronomer Royal. 3d. Edition, corrected, 1842. 8. 15s. London: John W. Parker West Strand. Cambridge: Deightons.

---

## Educationel Models etc. sold by Taylor et Walton, 28, Upper Gower Street.

A Pyrometer for shewing the expansion of metals. 15 s.

Atwood's Machine for explaining the laws of falling bodies, with apparatus attached for illustrating the theory of the pendulum. Price of Atwood's Machine with a „Companion" L. 2. 2 s.; additional apparatus for the pendulum L. 1. 1 s.

A set of mechanical powers; containing the Lever — Wheel and Axle — series of Pulleys — the Inclined Plane — Wedge — Screw — with Examples of the Parallelogram of For-



Digitized by Google

ces — Centre of Gravity — Friction — Collision of Elastic Bodies — Compound Lever. Price L. 5. 5 s. in a Box.

A Second Set, omitting the Parallelogram of Forces and Collision of Elastic Bodies. Price in a Box L. 2. 12 s. 6 d. A commoner Set L. 1. 6 s. 3 d. in a Box.

Philosophical Diagrams; illustrating the various branches of Natural Philosophy. By Frederick J. Minasi, Lecturer of Natural Philosophy etc. Designed for the use of Lecturers, Philosophical Classes, and Schools. 1 st Series — Mechanics. In Monthly Numbers each containing 3 Sheets of Diagrams, price 3 s. each Number. — Number 1 is just published.

Geometrical solids to illustrate Reiner's Lessons on form, and other works on Geometry. The Set, in a Box, 9 s.

An Instrument for teaching Geometry, convertible into a Theodolite, Spirit Level, Hadley's Sextant, and Wollastons Goniometer. Price L. 2. 12 s. 6 d.

Diagrams in Wood, to illustrate Dr. Lardner's Euclid. Solid Geometry, Book 1. The Set of Nine, in a Box, 7 s. 6 d.

Digitized by Google

# VIII.
# Literarischer Bericht.

## Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Matheseos Universalis formulae fundamentales Caroli Joh. Ds. Hill, a C. A. Augustinson MDCCCXLI publice defensae. Lundae. XDCCCXLI. 4. 4 gg.

Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht an Gymnasien, höhern Bürger- und Militair-Schulen. Bearbeitet von Dr. Martin Ohm. Dritte, durchgesehene und theilweise umgearbeitete Auflage. Leipzig. 1842. 8. 22 ggr.

Dieses seiner Einrichtung und den Ansichten seines Vfs. über den mathematischen Unterricht nach aus den beiden ersten Auflagen hinreichend bekannte Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht enthält die Arithmetik und Algebra, die ebene Geometrie mit Einschluss der ebenen Trigonometrie, die körperliche Geometrie mit Einschluss der sphärischen Trigonometrie, und in einem Anhange Einiges über Reihen und über Permutationen und Combinationen, nebst dem Beweise des binomischen Lehrsatzes. Da, wie gesagt, die Ansichten des Vfs. schon bekannt genug sind, und allerdings auch schon bei vielen Lehrern Eingang gefunden haben, wie am besten durch die wiederholten Auflagen des vorliegenden Werkchens bewiesen wird, so würde eine nicht überall beifällige Kritik derselben, wobei wir übrigens manches Treffliche in denselben keineswegs verkennen und dem Vf. deshalb immer unsere besondere Achtung gezollt haben, in diesen bloss für kurze Anzeigen- und literarische Notizen bestimmten literarischen Berichten nur unpassend erscheinen. Unterdrücken aber können wir in Bezug auf §. 177. — §. 181. die Bemerkung nicht, dass die Formeln

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

und die aus denselben gezogenen Herleitungen, auch wenn sie nur gelegentlich beigebracht sein sollten, in einem für erste Anfänger



Digitized by Google

bestimmten Lehrbuche nach unserer Ueberzeugung gewiss ganz am unrechten Orte sind, und den Anfänger nur verwirren. Solche eigentlich nur symbolische Ausdrücke in ihr rechtes Licht zu stellen und ihre richtige Anwendung zu zeigen, muss nach unserer Ueberzeugung ganz einem höhern Unterrichte aufbehalten bleiben.

---

## Arithmetik.

Die neue Multiplication oder Anweisung, die unmittelbare Berechnung der Producte aus zwei- bis achtzifferigen Factoren nach einer einfachen, von der bisher gebräuchlichen ganz verschiedenen Methode auszuführen. Für Freunde der Arithmetik, für alle Classen von Rechnern, namentlich aber zur Einführung in Gymnasien und Bürgerschulen zum Druck befördert. Zweite, ganz umgearbeitete Auflage. Oldenburg. 1842. 8.

Bei der gewöhnlichen Art zu multipliciren bildet man bekanntlich, wenn im Allgemeinen $a+b+c+d+\ldots.$ der Multiplicand, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.$ der Multiplicator ist, nach und nach die Producte

$$(a+b+c+d+\ldots.)\alpha,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\beta,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\gamma,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\delta,$$

u. s. w.

indem man jedes derselben wieder in seine einzelnen Theile auflöst, und erhält durch Addition aller dieser Producte das gesuchte Product des gegebenen Multiplicandus und Multiplictors. Der Verf. setzt dagegen

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)\ (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots) &= a\alpha+b\alpha+c\alpha+d\alpha+\ldots.\\ &+a\beta+b\beta+c\beta+d\beta+\ldots.\\ &+a\gamma+b\gamma+c\gamma+d\gamma+\ldots.\\ &+a\delta+b\delta+c\delta+d\delta+\ldots.\end{aligned}$$

u. s. w.

ordnet die einzelnen Theile der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach den Diagonalreihen, wodurch er

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)\ (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots) &= a\alpha\\ &+(a\beta+b\alpha)\\ &+(a\gamma+b\beta+c\alpha)\\ &+(a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha)\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}$$

Digitized by Google

erhält, bildet die sämmtlichen einzelnen Theile dieses Aggregats, und erhält durch deren Addition das gesuchte Product, wobei er übrigens die einzelnen Theile nicht vom ersten bis zum letzten, in der Ordnung wie sie vorher geschrieben worden sind, sondern in umgekehrter Ordnung vom letzten bis zum ersten bildet und zu einander addirt. Hierin besteht das ganze Kunststück! Soll man z. B. 786 mit 543 multipliciren, so sagt man 6 . 3 ist 18, schreibt die 8 hin, und behält 1 im Sinne; hierauf sagt man 8 . 3 + 6 . 4 ist 48, und 1 dazu ist 49, schreibt die 9 hin und behält 4 im Sinne; dann sagt man 7 . 3 + 8 . 4 + 6 . 5 ist 83, und 4 dazu ist 87, schreibt die 7 hin und behält 8 im Sinne; hierauf sagt man 7 . 4 + 8 . 5 ist 68, und 8 dazu ist 76, schreibt die 6 hin und behält 7 im Sinne; endlich sagt man 7 . 5 ist 35 und 7 dazu ist 42, welche Zahl nun auch hingeschrieben wird. Hiernach erhält das Exempel folgende Gestalt:

786
543
426798
7841

So unbedeutend die Sache auch an sich nach unserer Ueberzeugung ist, und so wenig wir glauben, dass dieselbe sich einer günstigen Aufnahme erfreuen wird, so hielten wir es doch für unsere Pflicht, diese neue Multiplicationsmethode hier etwas näher zu characterisiren, weil der Verf. dieselbe namentlich zur Einführung in Gymnasien und Bürgerschulen bestimmt und empfiehlt. Wir haben unsere Pflicht gethan und unser Zweck ist erreicht, wenn durch das Obige jeder Lehrer in den Stand gesetzt wird, sich über diese neue Multiplicationsmethode selbst ein Urtheil zu bilden.

Tafeln zur Verwandlung aller Brüche von $\frac{1}{1000} - \frac{100000}{1000}$ und von $\frac{1}{1000} - \frac{100}{100000}$ in fünf bis siebenziffrige Decimalbrüche, oder: Tafeln zur Berechnung der siebenziffrigen Quotienten aller oben angegebenen Dividenden und Divisoren. Nebst einigen auf benannte Zahlen bezüglichen Decimaltabellen und einer Anweisung zur allgemeinsten Anwendung der Decimalbruchrechnung auf die Auflösung der gewöhnlichsten arithmetischen Aufgaben. Für Mathematiker und Geschäftsleute sowohl, als auch Lehrer und Lernende eingerichtet und berechnet. Oldenburg. 1842. 4.

Diese neuen zur Erleichterung der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche bestimmten Tafeln, deren Verf. sich nirgends genannt hat, haben die folgende Einrichtung. Auf 198 Seiten enthalten dieselben alle gemeinen Brüche, welche aus dem Bruche $\frac{a}{b}$ entstehen, wenn man für den Zähler $a$ alle ganze Zahlen von 1 bis 99 setzt, und mit jedem einzelnen dieser Zähler als Nenner $b$ alle ganze Zahlen von 1 bis 999 verbindet, in Decimalbrüche mit sieben Decimalstellen verwandelt. Einem jeden der



Digitized by Google

99 Zähler von 1 bis 99 sind zwei einander gegenüberstehende Seiten gewidmet. Der Zähler steht auf jeder Seite oben am weitesten links, unter demselben in der ersten vertikalen Spalte findet man auf der einen Seite die Nenner 1 bis 49, auf der andern Seite die Nenner 50 bis 99, unmittelbar neben diesen Nennern stehen in der zweiten vertikalen Spalte die entsprechenden siebenstelligen Decimalbrüche. So findet man z. B. auf S. 98 und S. 99 oben links den Zähler 49: Neben dem Nenner 29 auf S. 98 findet sich der dem Bruche $\frac{49}{29}$ gleiche Decimalbruch 1,6896552, und eben so findet sich neben dem Nenner 79 auf S. 99 der dem Bruche $\frac{49}{79}$ gleiche Decimalbruch 0,6202532. Auf ganz ähnliche Weise wie in den Logarithmentafeln findet man nun in der ersten horizontalen Reihe auf jeder Seite die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, welche, um bei dem vorher gebrauchten Beispiele stehen zu bleiben, auf S. 98 die letzten Ziffern in den Nennern der Brüche $\frac{49}{10}$, $\frac{49}{11}$, $\frac{49}{12}$, $\frac{49}{13}$ bis $\frac{49}{499}$, auf S. 99 die letzten Ziffern in den Nennern der Brüche $\frac{49}{500}$, $\frac{49}{501}$, $\frac{49}{502}$, $\frac{49}{503}$ bis $\frac{49}{999}$ sind, und bei dem Aufsuchen der diesen Brüchen gleichen siebenziffrigen Decimalbrüche hat man sich auf ganz ähnliche Art wie bei dem Gebrauche der Logarithmentafeln zu verhalten. Um z. B. den dem Bruche $\frac{49}{867}$ gleichen Decimalbruch zu finden, sucht man auf S. 99 den Zähler 49 oben links, in der ersten vertikalen Spalte den Nenner 86, in der ersten horizontalen Reihe die Ziffer 7 auf, und findet in dem Punkte, wo die durch die Zahlen 86 und 7 gezogenen beiden horizontalen und vertikalen Linien sich schneiden den dem Bruche $\frac{49}{867}$ gleichen Decimalbruch 0,0565167. Wir hoffen, dass man hieraus die einfache, zweckmässige und für den praktischen Gebrauch bequeme Einrichtung dieser Tafeln erkennen wird.

In der Einleitung zeigt der Verf., wie man den Gebrauch der Tafeln über die ihnen nach dem Vorhergehenden gesteckte eigentliche Gränze hinaus ausdehnen kann, welche Anweisung natürlich in ganz einfachen und einem Jeden sich von selbst ergebenden Regeln besteht.

Will man, um zuerst den Fall zu betrachten, wenn der Zähler die Gränze der Tafeln übersteigt, ohne dass dies auch bei dem Nenner der Fall ist, z. B. den dem Bruche $\frac{9867}{979}$ gleichen Decimalbruch finden, so setzt man, weil die Tafeln sich unmittelbar bloss auf ein- und zweiziffrige Zähler erstrecken,

$$\frac{9867}{979} = \frac{98}{979} \cdot 10 + \frac{67}{979}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 10{,}01021 \\ 0.0684372 \end{array} \right.$$

$$= 10{,}0786472.$$

Digitized by Google

Auf ähnliche Art ist

$$\frac{98766}{887} = \frac{98}{887} \cdot 1000 + \frac{76}{887} \cdot 10 + \frac{6}{887}$$
$$= \left\{\begin{matrix} 110,4848 \\ 0,856821 \\ 0,0067644 \end{matrix}\right.$$
$$= 111,3483854$$

Dass diese Resultate nun aber nicht mehr bis auf sieben Stellen richtig sind, versteht sich von selbst, weshalb auch der Verf. in §. 14. der Einleitung noch ein anderes bei diesen Verwandlungen anzuwendendes Verfahren lehrt.

Uebersteigt der Nenner des in einen Decimalbruch zu verwandelnden gemeinen Bruchs die Gränze der Tafeln, ohne dass dies auch bei dem Zähler der Fall ist, so hat man sich auf folgende Art zu verhalten. Der gegebene gemeine Bruch sei z. B. $\frac{86}{17862}$. Unmittelbar aus den Tafeln ergiebt sich zuvörderst

$$\frac{86}{17800} = 0,0048315.$$

Ferner findet man aus den Tafeln leicht als Differenz zwischen den beiden Brüchen

$$\frac{86}{178} \text{ und } \frac{86}{179}$$

die Grösse 0,0026992, folglich als Differenz zwischen den Brüchen

$$\frac{86}{17800} \text{ und } \frac{86}{17900}$$

die Grösse 0,000026992, oder, wenn die Ziffer unmittelbar vor dem Komma sich auf Einheiten der siebenten Decimalstelle bezieht, die Grösse 269,92.

Ueberhaupt ist nun, wenn $\frac{n}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist, näherungsweise

$$\frac{a}{m+n} = \frac{a}{m}(1+\frac{n}{m})^{-1} = \frac{a}{m}(1-\frac{n}{m}) = \frac{a}{m} - \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{m};$$

und eben so, wenn $\frac{100}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist, näherungsweise

$$\frac{a}{m+100} = \frac{a}{m}(1+\frac{100}{m})^{-1} = \frac{a}{m}(1-\frac{100}{m}) = \frac{a}{m} - \frac{a}{m} \cdot \frac{100}{m}.$$

Ueberlegt man jetzt, dass

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{a}{m} \cdot \frac{100}{m} \cdot \frac{n}{100}$$

ist, so ist klar, dass in Bezug auf den obigen speciellen Fall

$$\frac{86}{17862} = 0,0048315 - 0,000026992 \cdot \frac{62}{100},$$

oder, weil

Digitized by Google

$$269,92 \times 62 = 16735,04$$

also

$$269,92 \times \frac{62}{100} = 167,3504$$

ist

$$\frac{86}{17862} = \begin{cases} 0,0048315 \\ \quad - 167 \end{cases} = 0,0048148.$$

Wenn sowohl der Zähler, als auch der Nenner des gegebenen, in einen Decimalbruch zu verwandelnden gemeinen Bruchs die Gränze der Tafeln übersteigt, so hat man auf folgende Art zu verfahren. Der gegebene Bruch sei z. B. $\frac{866}{97287}$. Weil zuvörderst

$$\frac{866}{973} = \frac{86}{973} \cdot 10 + \frac{6}{973}$$

ist, so findet man mittelst der Tafeln leicht

$$\frac{866}{97300} = \begin{cases} 0,0088386 \\ 0,0000617 \end{cases} = 0,0089003.$$

Für $\frac{86}{973}$ und $\frac{6}{973}$ sind die Differenzen nach den Tafeln 0,0000910 und 0,0000063. Also ist die Differenz für $\frac{866}{97300}$

$$= \begin{cases} 0,00000910 \\ 0,000000063 \end{cases} = 0,000009163.$$

Multiplicirt man dies, weil $97300 - 97287 = 13$ ist, mit 13, so erhält man als Product 0,000119119, und, dies durch 100 dividirt, giebt 0,0000012. Also ist

$$\frac{866}{97287} = \begin{cases} 0,0089003 \\ \quad 12 \end{cases} = 0,0089015$$

Wie man dies in der Praxis abzukürzen hat, wird sogleich erhellen.

Angehängt sind den Tafeln zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche noch Verwandlungstabellen einiger Maasse, Verwandlungstabellen einiger Gewichte und Verwandlungstabellen einiger Münzen.

Kann nun auch über ein sehr wesentliches Erforderniss solcher Tafeln, nämlich über ihre Correctheit, erst nach längerm Gebrauch derselben entschieden werden, so glauben wir doch durch die vorhergehenden Bemerkungen hinreichend nachgewiesen zu haben, dass

Digitized by Google

die obigen Tafeln zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, ungeachtet schon mehrere ältere Schriften, die eine ähnliche Tendenz haben, wie z. B. die Rechnung mit Decimalbrüchen und Logarithmen nebst dazu gehörigen ganz neu berechneten Tafeln. Von F. A. Schröter. Helmstädt. 1799. 4. und W. F. Wucherer's Beiträge zum allgemeinern Gebrauche der Decimalbrüche oder Tafeln u. s. w. Karlsruhe. 1795. 8., existiren, verdienen, von praktischen Rechnern, denen sie sich vorzüglich durch ihre einfache Einrichtung empfehlen werden, und Lehrern nicht unbeachtet zu bleiben.

Lehrbuch der Arithmetik, allgemeinen Grössenlehre und Algebra für die mittlern und obern Klassen der Gymnasien und höhern Bürgerschulen von J. W. Elsermann, Oberlehrer der Math. und Naturw. an dem Gymnasium und der Realschule in Saarbrücken. Saarbrücken. 1842. 8. 20 ggr.

Dieses Lehrbuch schliesst sich im Allgemeinen und Wesentlichen den Ansichten an, welche M. Ohm in seinen verschiedenen Lehrbüchern geltend zu machen gesucht hat.

Young's Analysis and Solution of Cubic and Biquadratic Equations. 1842. 12. 6s.

Table des logarithmes des nombres depuis 1000 jusqu'à 10000. Par Croizet. in 4. Chez Petissonnier. 1842. 6 Fr.

Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule von Dr. Martin Ohm. Auch als Anhang zu seinen verschiedenen Lehrbüchern. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr.

Der Herr Verf. theilt, um uns hier seiner eignen Worte aus der Vorrede zu bedienen, in dieser Schrift „so kurz als es ihm „nur immer möglich gewesen ist, das Wesen der Ansichten mit, „welche derselbe in seinen Schriften seit 1816, besonders aber seit „1822 gelehrt hat und lehrt, — Ansichten, welche das Glück ge„habt haben, in seinen verschiedenen Lehrbüchern vielfachen Bei„fall zu finden, welche aber auch vielfach missverstanden worden „sind, und wahrscheinlich deshalb leichter missverstanden werden „konnten, weil ein Lehrbuch noch so manches andere zu berück„sichtigen hat, welches das Auffassen des Wesens der Sache er„schwert. Gegenwärtige kleine Schrift setzt voraus, dass der Le„ser alles Material selbst einschalte, und beschäftigt sich bloss mit „der Aufstellung logisch bestimmter, schärfer und entschiedener „Begriffe und zwar aller derer, um welche sich die mathematische „Analysis herumdreht.“ Auf Seite 15 spricht sich der Herr Verf. über seine Schrift ferner in folgenden Worten aus: „Der Verf. ist „in diesem Augenblicke überzeugt, dass er seine Lehrbücher nur „ruhig wirken lassen dürfe, um nach längerer Zeit seine Ansichten „von den meisten Pädagogen adoptirt zu sehen, weil sie sich ne„benbei (eben wegen der darin vorwaltenden wissenschaftlichen „Einheit) durch eben so grosse Einfachheit als Bequemlichkeit aus„zeichnen. In so fern sich aber Mathematiker von Fach, wie z. B. „Abel es gewesen ist, mit dem Lesen von Elementar-Lehrbüchern,

Digitized by Google

„auch wenn sie in ihnen die Quellen ihrer Klagen*) „verstopft finden könnten, in der Regel nicht befassen, so „versucht es der Verf. in diesen Bogen denselben seine Ansichten „auf eine möglichst kurze und übersichtliche Weise vor Augen zu „legen, und zugleich die wichtigsten Folgerungen hervorzuheben, „welche sich für das sichere und nothwendig richtige Arbeiten mit „unendlichen Reihen daraus ergeben." Diese eignen Worte des Herrn Verfs. müssen der Beschränktheit des Raums wegen hier hinreichen, um den Lesern des Archivs den Zweck, welchen der Herr Verf. durch seine Schrift zu erreichen beabsichtigte, vor die Augen zu führen.

Wichtig für die Theorie der bestimmten Integrale sind die folgenden uns neuerlichst aus Schweden zugekommenen Abhandlungen.

De seriebus periodicis auctore Adolpho Ferdinando Svanberg. (Ex Actis Reg. Soc. Scient. Upsal.) Upsaliae. 1836. 4.

Diese Abhandlung ist auch für Astronomie von besonderm Interesse.

Deux Mémoires sur les intégrales définies par C. J. Malmstén. Extrait des Acta Reg. Soc. Upsal. A Upsal. 1841. 4.

1. Mémoire sur les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{(1-p\cos tx)f(x)dx}{1-2p\cos tx+p^2} \text{ et } \int_0^\infty \frac{p\sin tx\, f(x)dx}{1-2p\cos tx+p^2}.$$

2 Mémoire sur les integrales définies entre $x=0$ et $x=\infty$.

Om Integralen $\int_0^\infty \frac{\cos axdx}{(1+x^2)^n}$ af Carl J. Malmsten. Aus den K. V. Acad. Handl. 1841.

Theoremata nova de integralibus definitis, summatione serierum earumque in alias series transformatione. Auctore Carol. Joh. Malmsten, Phil. Mag. ad Reg. Acad. Upsal. Math. infer. Doc. Upsaliae. 1842. 8.

Wir werden künftig aus allen diesen vieles Interessante enthaltenden Abhandlungen im Archive Auszüge mittheilen.

Disquisitio academica, integrationem aequationis cujusdam differentialis exhibens, quam consent. ampl. ord. philos. Lundens., praeside Carolo Joh. Ds. Hill, Math. prof. reg. et ord., pro gradu philosophico publico examini subjicit C. A. Ehrensvärd. Comes. Lundae. 1841. 4.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Integration der Differentialgleichung des 2ten Grades $A(y'dx'-x'dy')+Bdx'+Cdy'=0$ wo $A=a_0+a_1x'+a_{11}y'$, $B=b_0+b_1x'+b_{11}y'$, $C=c_0+c_1x'+c_{11}y'$ ist, und die Coefficienten von $x'$ und $y'$ constant sind, nach verschiedenen Methoden.

---

*) M. vergl. hierbei Archiv Theil I. Literarischer Bericht Nr. I. S. 20. Gr.

Digitized by Google

# Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie, enthaltend die ebene Geometrie und die Stereometrie nebst Anwendung der Algebra auf dieselben. Von Friedrich Pross, Professor der Mathematik an der Königlichen polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit neun Figurentafeln. Stuttgart. 1842. 8. 2 Thlr.

Ein recht vollständiges in deutlicher Darstellung, mit steter Rücksicht auf praktische Anwendung verfasstes, und einen ziemlich grossen Reichthum einzelner auch vielfach die Praxis berücksichtigender, auch hin und wieder neue Relationen darbietender Aufgaben enthaltendes Lehrbuch der ebenen und körperlichen Geometrie, welches in seinem Kreise gewiss vortheilhaft wirken wird. Besondern Fleiss scheint der Verf. mit Recht auf die für viele praktische Anwendungen so wichtigen Körperberechnungen verwandt zu haben. Dass in diesem Lehrbuche nicht besondere Rücksicht auf descriptive Geometrie genommen worden ist, wie man seiner sonstigen Anlage nach wohl hätte erwarten können, hat seinen Grund jedenfalls darin, dass auf polytechnischen Lehranstalten in diesem Theile der Geometrie mit Recht wohl durchgängig ein besonderer ausführlicher und in's Einzelne gehender, mit vielfachen Uebungen im Zeichnen verbundener Unterricht ertheilt wird, für welchen daher in diesem Lehrbuche der Geometrie doch kein hinreichendes Material hätte geliefert werden können, weshalb es allerdings am besten war, denselben von den gewöhnlichen Elementen der ebenen und körperlichen Geometrie zu trennen. Tabellen zur Vergleichung der Maasse verschiedener Länder und eine Tafel der specifischen Gewichte sind dem Buche beigegeben.

Éléments de Géométrie par Eugène Lionnet. in 4. Chez Dézobry. 1842.

Die Lehre von den Polyedern. Rein-geometrisch dargestellt von Dr. Hohl, ausserordentlichem Prof. der Math. an der Univ. zu Tübingen. Mit 11 Figurentafeln. Tübingen. 1842. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Diese Schrift leistet das, was ihr Titel verspricht, in ziemlicher Vollständigkeit, und verdient Lehrern deshalb empfohlen zu werden, weil sie in derselben eine grosse Anzahl in verschiedenen Schriften zerstreuter Sätze, — durchgängig nach rein-geometrischer Methode, ohne Einmischung des Calculs, behandelt, — an einem Orte beisammen finden. Ohne des allgemeiner Bekannten zu gedenken erwähnen wir hier nur u. A. die das Grösste und Kleinste betreffenden Eigenschaften der Prismen und Pyramiden, wobei der Verf. Lhuilier's bekanntes Werk: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata. Varsaviae. 1782. benutzt, statt der zum Theil algebraischen Beweise aber geometrische substituirt hat; die Lehre von den archimedischen Polyedern mit zweierlei und dreierlei Seitenflächen; die

Digitized by Google

Lehre vom rhombischen Dodekaeder und rhombischen Triakontaeder; den für den in Euclid's Definition congruenter Polyeder enthaltenen Lehrsatz, dass nämlich zwei convexe Polyeder congruent sind, d. h. zur Deckung gebracht werden können, wenn sie von lauter congruenten Figuren in gleicher Aufeinanderfolge eingeschlossen werden, von Cauchy gegebenen höchst sinnreichen Beweis; u. s. w. Dass die Fälle der Congruenz und Symmetrie gehörig unterschieden, und immer besonders betrachtet worden sind, verdient schliesslich hier auch noch besonders hervorgehoben zu werden.

Problèmes de géometrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique avec les solutions, par G. Ritt. 2 édit. Paris. 1842. 8. 5 Fr.

Application de l'algèbre à la géometrie, suivie de la discussion des courbes par Jacob. 2 vols. 8. 1842. 3½ Thlr.

---

## Praktische Geometrie.

Das Aufnehmen des Terrains und dessen Darstellung durch Projection horizontaler Flächen, zunächst für den Unterricht an Militair-Bildungsanstalten und zur Selbstbelehrung bearbeitet von Aug. v. Schele, Hauptmann im Königl. würtemb. Generalstab. Mit 18 lithogr. Tafeln. Stuttgart. 1842. 8. 2 Thlr. 12 ggr.

Dieses Buch enthält eine recht gute und deutliche Anweisung zu topographischen Aufnahmen, mit besonderer Rücksicht auf militairische Zwecke. Vorzüglich ist, wie es recht war, der Gebrauch des Messtisches gelehrt worden, wobei jedoch auch die übrigen Instrumente, insbesondere Boussole und Kreuzscheibe, nicht ganz unberücksichtigt geblieben sind. Dass neben den übrigen gewöhnlichen mit dem Messtische aufzulösenden Elementar-Aufgaben das sogenannte Rückwärtseinschneiden nicht fehlt, versteht sich von selbst. Von den verschiedenen zur Auflösung dieser wichtigen und schönen Aufgabe in Vorschlag gebrachten Methoden hat der Verf. nur die Lehmann'sche mittelst der sogenannten fehlerzeigenden Dreiecke aufgenommen, welche allerdings auch nach unserer aus Erfahrung entsprungenen Ueberzeugung in der Praxis die meisten Vortheile gewährt, obgleich sie eigentlich nur eine Näherungsmethode ist. Dessenungeachtet möchte es aber namentlich für den Unterricht zweckmässig und für viele Leser interessant und belehrend gewesen sein, wenn der Verf. auch auf einige andere Methoden gebührende Rücksicht genommen hätte, insbesondere auf die von Bohnenberger angegebenen, von denen übrigens die eine auch eigentlich nur eine Näherungsmethode ist, welche sich aber, wenn ihrer Anwendung in der Praxis allerdings auch zuweilen

Digitized by Google

Hindernisse in den Weg treten, doch häufig mit besonderer Eleganz mittelst des Messtisches in Ausführung bringen lassen, und nach unserer Erfahrung namentlich von den befähigtern Zuhörern immer mit besonderm Interesse aufgenommen werden. Tafeln zur Vergleichung der Maasse sind auch beigegeben. Mit besonderer Ausführlichkeit verbreitet sich die vorliegende Schrift über das topographische Zeichnen, wobei der Verf. ganz Lehmann folgt, und es sind zugleich eine grössere Anzahl recht gut ausgeführter lithographirter Tafeln beigegeben, die, wie wir glauben, zweckmässig als Vorlegeblätter bei'm Unterrichte im Zeichnen gebraucht werden können. In dieser Beziehung verdient daher das vorliegende Buch vorzüglich bei dem hohen Preise des bekannten Lehmann'schen Werkes, für diejenigen, welche sich eine hinreichende Kenntniss der Lehmann'schen Methode erwerben wollen, noch besondere Empfehlung.

Traité d'aréage et de métrage. Par Croizet. in 12. Chez Petissonnier. 1842. 1 Fr. 2 s.

Practical Geodesy, comprising Chain Surveying, the Use of Surveying Instruments, together with Levelling, and Trigonometrical, Mining, and Maritime Surveying. Adapted to the use of Land-Surveyors, and for Students in Civil, Military, and Naval Engineering. By Butler Williams, C. E. F. G. S. Professor of Geodesy in the College for Civil Engineers, London. 1842. 8. with numerous Illustrations. 12 s. 6 d.

---

## Praktische Mechanik.

Cours élémentaire de Mécanique industrielle par Jariez. 2 vols. et Atlas. 8. 1842. 5¼ Thlr.

Théorie géometrique des engrenages par Olivier; avec 4 planches. 4. 1842. 4 Thlr.

---

## Astronomie.

Leichtfassliche Vorlesungen über Astronomie für jene, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. Von August Kunzek, Doctor der Phil., ord. öffentl. Prof.

Digitized by Google

der Physik und angewandten Mathematik an der Univ. in Lemberg. Wien. 1842. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Der Zweck dieses zwar nur kurzen, aber deutlich verfassten populären Lehrbuchs der Astronomie ist durch seinen Titel hinreichend bezeichnet. Die Vorrede beginnt der Verf. mit den folgenden schönen Worten Jean Paul's aus der Levana. „Ich „verarg' es euern Eltern, dass sie euch nicht Astronomie lernen „liessen, sie, die dem Menschen ein erhabenes Herz giebt, und ein „Auge, das über die Erde hinaus reicht, und Flügel, die in die „Unermesslichkeit heben, und Einen Gott, der nicht endlich, son„dern unendlich ist.“ Angehängt dem aus 23 Vorlesungen bestehenden Werke sind einige arithmetische und geometrische Begriffe und Sätze, und einige trigonometrische Betrachtungen über Parallaxe, Aberration, Berechnung der Länge der Tage und Nächte, der Dauer der Dämmerung, u. s. w.

Erläuterungen zu J. J. v. Littrow's Vorlesungen über Astronomie (Wien 1830 bei J. G. Heubner) von C. L. v. Littrow, Adjuncten an der Sternwarte der K. K. Universität zu Wien, u. s. w. Mit 5 lithographirten Tafeln. Wien. 1842. 8. 1 Thlr.

Diese Erläuterungen zu J. J. v. Littrow's bekannten Vorlesungen über Astronomie, von denen (oder von der theoretischen und praktischen Astronomie desselben Verfs. Wien 1821—1827), wie wir aus der Vorrede zu den Erläuterungen zu unserer Freude ersehen, auf Sir John Herschel's Veranlassung bald eine englische Uebersetzung erscheinen wird, werden minder geübten Lesern des genannten in mehrfacher Beziehung ausgezeichneten Werkes, wegen der Kürze der Darstellung an den meisten Orten in demselben, gewiss sehr willkommen sein, und zwar um so mehr, weil Herr C. L. v. Littrow auch mehrere werthvolle Zusätze zu demselben, wohin wir z. B. auf S. 112—117 Ivory's von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung unabhängige, und sonach für erste Anfänger recht wohl geeignete Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate rechnen, geliefert, und an mehreren Orten veränderte Darstellungen, wie z. B. bei der Bestimmung der Fehler des Theodoliten auf S. 187—190, eingeschaltet hat. Mit kindlicher Pietät hat Herr C. L. v. Littrow seine empfehlenswerthe Schrift dem Andenken seines der Wissenschaft und den Seinigen leider zu früh entrissenen, in so vielen Beziehungen ausgezeichneten und verdienten Vaters gewidmet, auf dessen in den Annalen der Wiener Sternwarte für 1841 sich findende Lebensbeschreibung wir die Leser hier noch besonders aufmerksam machen.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. Edlen von Littrow, Adjuncten an der k. k. Sternwarte, Doctor der Philosophie, der philosophischen Facultät zu Wien und mehrerer gelehrter Gesellschaften Mitgliede. Ein und zwanzigster Theil. Neuer Folge Erster Band. Mit einer lithographirten Tafel. Wien. 1841. 4.

Diesen ersten Band der neuen Folge der trefflichen Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien, die, weil von ihnen nur 150 Exem-

Digitized by Google

plare gedruckt werden, nicht in die Hände vieler Leser kommen können, und daher, so wie überhaupt ihrer Wichtigkeit für die Wissenschaft wegen, in diesem Archive jedenfalls eine ausführlichere Anzeige verdienen, eröffnet mit Recht die Lebensbeschreibung des Begründers dieses Werkes und der neuen Wiener Sternwarte, des der Wissenschaft leider zu früh entrissenen J. J. von Littrow.

Joseph Johann Edler von Littrow wurde geboren zu Bischof-Teinitz in Böhmen, am 13ten März 1781, in derselben Stunde, wo Herschel den Uranus entdeckte. Sein Vater lebt noch gegenwärtig als Kaufmann daselbst, seine Voreltern stammen aus Liefland. Nach fast fortdauernder Kränklichkeit in den drei ersten Lebensjahren bezog er mit dem fünften Jahre die Schule seiner Geburtsstadt, und legte schon hier den Grund zu der Eleganz des Stils, die späterhin alle seine Schriften so sehr auszeichnete. Nach Vollendung dieses Cursus bemächtigten sich religiöse Zweifel des neunjährigen Knaben, die nur erst dann wieder einem ruhigen Gemüthszustande Raum liessen, als er im Jahre 1794 das Gymnasium zu Prag bezog, auf welchem er sich vorzugsweise mit dem Studium der Classiker beschäftigte. Nachdem er die Universität zu Prag bezogen, schloss er sich besonders an den Aesthetiker A. G. Meissner an, und beschäftigte sich in freien Stunden mit dem Studium der griechischen Literatur und der Mathematik. Im Jahre 1800 versuchte er sich zum ersten Male als Schriftsteller, und gab unter dem Titel: Propyläen eine Zeitschrift heraus, die aber im folgenden Jahre wieder einging, weil er in die sogenannte Legion, einem vom Erzherzog Carl errichteten militärischen Corps von 2200 Mann, eintrat. Nachdem nach geschlossenem Frieden die Legion aufgelöst worden war, kehrte Littrow zu den Studien zurück, und beschäftigte sich nach und nach mit den verschiedenartigsten Wissenschaften, bis er im Jahre 1803 die Erziehung der beiden Grafen Rénard, aus dem berühmten Hause Colonna, das dem römischen Stuhle mehrere Päpste gegeben hatte, auf deren Gütern in Schlesien übernahm, wo er zuerst ganz der schönen Literatur, später aber ausschliesslich der Mathematik und Astronomie lebte, in welchen letztern Wissenschaften er ganz Autodidact war. Im Jahre 1807 wurde er in Folge eines schriftlichen Concurs-Elaborates zum Professor der Astronomie an der Universität Krakau ernannt, und nahm hier die Namen Joseph Johann an, weil er durch die früher geführten Namen Joseph Samuel in den Anschein, der jüdischen Religion anzugehören, gerathen war, und sich vor seiner Anstellung erst urkundlich als katholisch hatte ausweisen müssen. Zugleich änderte er seinen Zunamen, der ursprünglich Lyttroff geschrieben worden war, in Littrow um. In Krakau verband er sich mit Caroline von Ullrichsthal, aus welcher im Jahre 1833 durch den Tod der Gattinn getrennten glücklichen Ehe ihm eine zahlreiche Nachkommenschaft hervorging, von welcher noch fünf Söhne am Leben sind. Im Jahre 1809 ging er, einem Rufe des damaligen kaiserl. russ. Minister des Cultus, Grafen Razumowsky, folgend, als Professor der theoretischen Astronomie nach Kasan, nahm im Jahre 1816 seinen Abschied, um einem Rufe an die eben vollendete Sternwarte auf dem Bloksberge bei Ofen zu folgen, und vertauschte im Jahre 1819 diese Stelle mit der durch Triesnecker's Tod (1817) erledigten Stelle des Directors der

Digitized by Google

Sternwarte und Professors der Astronomie an der Universität zu Wien, welche er bis zu seinem, als Folge einer heftigen Bauchfell- und Leberentzündung, die bald in ein gichtisches Fieber überging, am 30sten November 1840 gegen 4½ Uhr Morgens erfolgten Tode bekleidete.

Dies ist der kurze Abriss der äussern Lebensumstände eines Gelehrten, welcher, wie von Allen, die ihn persönlich zu kennen das Glück hatten, einstimmig versichert wird, auch durch einen edlen und liebenswürdigen Character im höchsten Grade ausgezeichnet war. Was ihm die Wissenschaft verdankt, ist bekannt genug, und würde, um es weiter aus einander zu setzen, hier zu viel Raum erfordern. Als eben so bekannt darf vorausgesetzt werden, dass ihm die Wiener Sternwarte ganz ihre jetzige Gestalt, und deren Annalen, von welchen er zwanzig Theile theils in Verbindung mit L. Mayer, theils in Verbindung mit C. L. v. Littrow herausgab, ihre Begründung verdanken.

Ein vollständiges Verzeichniss der von Littrow herausgegebenen grössern, selbstständigen Schriften ist seiner Biographie am Schlusse beigegeben.

Auf J. J. v. Littrow's Lebensbeschreibung folgt eine Abhandlung über die geographische Position der neuen Sternwarte des k. k. Marine-Collegiums zu Venedig von B. L. von Wüllerstorf-Urbair, k. k. Linienschiffs-Fähnrich.

Die neue Sternwarte des k. k. Marine-Collegiums zu Venedig, durch deren Errichtung die österreichische Regierung sich ein neues Verdienst um die Astronomie erworben hat, trat mit Anfange des Frühjahrs 1840 in's Leben, und wurde der Direction des Herrn Linienschiffs-Fähnrich B. L. von Wüllerstorf, eines durch Kenntnisse und Thätigkeit gleich ausgezeichneten Officiers, anvertraut. Diese Sternwarte, von welcher in den Annalen auf S. XIII auch eine Abbildung geliefert worden ist, hat den doppelten Zweck, theils den Zöglingen der k. k. Marine Gelegenheit zu besonderer Ausbildung in der Astronomie zu geben, theils der activen Marine einen fixen Ort zur Vergleichung ihrer Chronometer und Aufbewahrung ihrer sonstigen nautisch-astronomischen Instrumente zu verschaffen. Nach Herrn von Wüllerstorf's Bestimmung ist für die neue k. k. Marine-Sternwarte zu Venedig:

Oestliche Länge von Paris in Bogen 10°. 0'. 59″

in Zeit 0ʰ. 40ᵐ. 3ˢ,93;

Nördliche Breite . . . . . 45°. 25'. 49″,5.

Hierauf folgt eine interessante Relation des jetzigen Herrn Herausgebers der Annalen: Ueber den Zustand der praktischen Astronomie in Italien, wovon jedoch die Sternwarten zu Palermo, Mailand und Modena, die der Herausgeber nicht durch eigne Anschauung kennen zu lernen Gelegenheit hatte, ausgeschlossen sind.

Höhe von Wien über dem adriatischen Meere. Der Fundamentalpunkt für die Meereshöhe Wiens ist die Uhrzeiger-Axe oder der Uhrblatt-Mittelpunkt des St. Stephansthurms. Die Höhe dieses Punktes über dem adriatischen Meere ist trigonometrisch auf drei Linien, deren eine von Aquilea, eine zweite von Triest, eine dritte von Fiume bis Wien geführt wurde, mit

Digitized by Google

einer merkwürdigen Uebereinstimmung zu 127,78 Wiener Klaftern (eine Wiener Klafter = 1,8966138 Meter) bestimmt worden, so dass Wien jedenfalls als einer derjenigen Punkte betrachtet werden muss, deren Meereshöhe am Genauesten bestimmt ist. Die Meereshöhe des mittlern Spiegels der Donau ist 81,10 Wiener Klaftern, die Meereshöhe des Nullpunkts am Mittelpfeiler der Franzensbrücke ist 80,43 Wiener Klaftern.

Höhe des Herrmannskogel, Leopolds- und Kahlenberges über dem adriatischen Meere, aus barometrischen Messungen. Von F. C. Hallaschka.

Horizont der Leopoldskirche auf dem Leopoldsberge über dem adriatischen Meere 217,907 Par. Klaftern;

Höhe des Hermannskogel über dem adriatischen Meere 279,201 Par. Klaftern;

Höhe des Josephsbergs über dem adriatischen Meere 231,877 Par. Klaftern.

Vorschlag eines neuen Fernrohr-Micrometers mit hellen Linien und Punkten im dunkeln Gesichtsfelde. Von Simon Stampfer, Prof. der prakt. Geom. am k. k. polytechn. Institute in Wien.

Beiträge zur nautischen Astronomie von C. L. v. Littrow.

I. Ueber ein Mittel, die Breitenbestimmung zu erleichtern, und zugleich näherungsweise die Zeit zu bestimmen.

II. Ueber die Genauigkeit der gebräuchlichsten Ortsbestimmungen zur See.

III. Ueber die unmittelbare Verbindung bei fahrendem Schiffe angestellter Beobachtungen.

Auszüge aus den beiden letzten bemerkenswerthen Aufsätzen der Herren Stampfer und C. L. v. Littrow, die in diesem literarischen Berichte einen zu grossen Raum in Anspruch nehmen und dessen Zwecke entgegen sein würden, werden wir nach und nach unter den Miscellen geben.

Resultate der Planetenbeobachtungen im Jahre 1840.

Beobachtungen des Mondes und von Mondsternen im Jahre 1840.

Beobachtete Sternbedeckungen bis Ende 1841.

Sonnenfinsterniss des 18ten Juli 1841.

Beobachtungen am Meridiankreise vom 21. Januar bis 29. September 1836.

Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen von 1840 und 1841.

Für 1840 ist

mittlere Barometerhöhe bei 0° Réaumur 27″,527 Par. M.

mittlere Temperatur + 6°,87 R.

Für 1841 ist

mittlere Barometerhöhe bei 0° Réaumur 27″,501 Par. M.

mittlere Temperatur + 8°,53 R.

Stand des Barometers über dem mittlern Spiegel der Donau 101,7 Wiener Fuss. Als mittlere Jahrestemperatur von Wien giebt der

Digitized by Google

Herr Herausgeber im Allgemeinen + 8°,46 R. an, so dass also im Jahre 1840 die Jahrestemperatur 1°,59 unter der mittlern geblieben ist, eine Abweichung, die seit 1775 nur von dem Jahre 1829, wo sie — 2°,37 betrug, übertroffen wurde.

Den Schluss dieses Bandes der Annalen machen:

Hülfstafeln für die Wiener Sternwarte. Zusammengestellt im Jahre 1842;

wobei wir bemerken, dass der Herr Herausgeber es sich zum Gesetz gemacht hat, diese Hülfstafeln alle fünf Jahre erscheinen zu lassen, um das Publikum sowohl von der Art, wie auf der Wiener Sternwarte die Rechnungen ausgeführt werden, zu unterrichten, als auch in den Stand zu setzen, weitere Reductionen vorzunehmen, eine Einrichtung, die gewiss allgemeiner nachgeahmt zu werden verdient.

Aus der obigen Relation werden die Leser den in so vielen Beziehungen interessanten und wichtigen Inhalt des vorliegenden neuesten Bandes der Annalen der Wiener Sternwarte erkennen, und es uns gewiss Dank wissen, wenn wir, wie schon oben versprochen worden ist, künftig unter den Miscellen weitere Mittheilungen aus denselben machen.

Karte der totalen Sonnenfinsterniss am 8. Juli 1842 nach J. H. W. Lehmann für die östreichische Monarchie entworfen von C. L. Littrow. Verlag der lithographischen Anstalt des Ludwig Mohn in Wien.

---

## Physik.

---

Anfangsgründe der Naturlehre mit logischen, arithmetischen und geometrischen Vorbereitungslehren für angehende Thierärzte und Oekonomen. Von Anton L. Buchmüller. Zweite verbesserte Auflage. Wien. 1842. 8. 2 Thlr.

Wo sich zu Anwendungen physikalischer Lehren in Bezug auf den speciellen Zweck, welchen dieses Buch zu erreichen sucht, Gelegenheit darbot, hat der Verf. dieselbe immer benutzt, und wir brauchen wohl nicht erst zu erinnern, dass dies u. A. in der Lehre vom Hebel in Bezug auf die Wirkung der Muskeln, in der Lehre von den Haarröhrchen, in der Lehre von der Wärme, in der Lehre vom Schall, in der Lehre vom Lichte, u. s. w. der Fall gewesen ist. Als ganz speciell auf den Zweck des Buchs Bezug habend erwähnen wir die Beschreibung und Abbildung einer eigenthümlichen Beschlagmaschine in §. 247. und Fig. 210. Der Vortrag ist uns überall deutlich und dem beabsichtigten Zwecke entsprechend erschienen, in Bezug auf welchen gewiss auch die vorausgeschickten allerdings nur höchst elementaren, logischen, arithmetischen und geometrischen Vorbereitungslehren ganz an ihrem Orte sind. Dass sich das Buch überhaupt nur in dem Kreise der ersten Elemente hält, braucht wohl

Digitized by Google

kaum noch besonders erinnert zu werden; jedenfalls aber ist es erfreulich zu sehen, wie sich die Anwendung der Naturlehre immer mehr und mehr in sehr verschiedenen Kreisen und nach sehr verschiedenen Richtungen hin geltend macht, und wie die hohe Wichtigkeit der Kenntniss der Hauptgesetze der Physik nach und nach immer allgemeiner erkannt wird. Das Buch kann, wie es uns scheint, auch landwirthschaftlichen Lehranstalten zur Beachtung empfohlen werden.

Lettres de L. Euler à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie, précédées de l'Eloge d'Euler par Condorcet et annotées par Cournot. 2 vols. 8. Paris. 1842. 4½ Thlr.

Jedenfalls ist es erfreulich zu sehen, wie alle Schriften des grossen Leonhard Euler auch jetzt immer noch fortwirken und neu herausgegeben werden.

The Hand-Book of Natural Phenomena, containing full Accounts of the following Natural Appearances: — Aurora Borealis, Changes in the Weather, Climates, Clouds, Comets, Dew, Earthquakes, Eclipses, Fixed Stars, Frost, Hail, Ice, Lakes, Lightning, Meteorites, Mirage, Moon, Mountains, Nebulae, Phosphorescence of the Sea, Planets, Rain, Rainbow, Refraction, Rivers, Seasons, Shooting, Stars, Snow, Springs, Summer Evening Lightning, Thunder, Twilight, Valleys, Volcanoes, Winds, etc. etc. 1842. 1 s.

Om fluiders rörelse; af A. F. Svanberg.

Ueber die Theorie des Lichtes. Nach einem lithographirten Memoire des Freiherrn Augustin Luis Cauchy frei bearbeitet von Franz Xaver Moth, k. k. Prof. am Lyceum zu Linz. Wien. 1842. 8. 1 Thlr.

Herr Prof. Moth hat sich durch die Uebersetzung des in Rede stehenden nur in sehr wenigen Exemplaren vorhandenen lithographirten Memoires von Cauchy jedenfalls ein besonderes Verdienst erworben, weil dasselbe bis jetzt gewiss vielen Mathematikern und Physikern ganz unbekannt geblieben ist. Dieses Memoire enthält eine kurze Darstellung der allgemeinen Gleichungen, welche die Grundlage zu allen Untersuchungen über die besondern Phänomene des Lichtes ausmachen, und giebt eine gedrängte Zusammenstellung der Methoden und Resultate, auf welche Cauchy in seinen Untersuchungen über die Theorie des Lichtes gekommen ist. Durch viele ganz zweckmässig gleich in den Text eingeschaltete Erläuterungen ist der Herr Uebersetzer den in der Analysis weniger Geübten sehr zu Hülfe gekommen, wozu auch insbesondere Abschnitt I. Ueber die Summen, welche durch Addition ähnlicher Functionen der Coordinaten der verschiedenen Punkte gebildet werden. Abschnitt II. Ueber die Flächen der zweiten Ordnung. Abschnitt III. Ueber die Bedingungen, welche sich auf die Gränzen eines Körpers oder eines Systems von Moleculen beziehen und der Anhang zum sechsten Abschnitte: Ueber den Gebrauch der symbolischen Formen in der Analysis, viel beitragen werden.



Digitized by Google

A Manual of Electro-Metallurgy. By George Shaw. 8. with Wood Engravings, 1842. 2 s. 6 d. cloth.

## Vermischte Schriften.

Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. T. XVIII. 4. 1842. 10 Thlr.

The Cambridge mathematical Journal.

Nr. XIII. November, 1841. Contents: I. Exposition of a general theory of linear transformations. Part. I. By George Boole. II. On the surd roots of equations. By R. Moon. III. Note on a passage in Fourier's heat. From a Correspondent. IV. Note on a solution of a cubic equation. By J. Cockle. V. On the integration of certain differential equations. By B. Bronwin. VI. On the motion of a sphere projected along a cylinder revolving uniformly in a vertical plane. VII. On the determination of the intensity of vibration of wavelets diverging from every point of a plane wave. VIII. Mathematical notes.

Nr. XIV. February, 1842. I. On the motion of a particle along variable and moveable tubes and surfaces. By W. Walton. II. Remarks on the binomial theorem. From a correspondent. III. On the properties of a certain symbolical expression. By Arthur Cayley. IV. On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity. From a correspondent. V. On the limits of Maclaurin's theorem. By A. Q. G. Craufurd. VI. Solution of a problem in analytical Geometry. By J. Booth. VII. Note on a class of factorials. By D. F. Gregory. VIII. Remarks on the distinction between algebraical and functional equations. By R. L. Ellis. IX. Mathematical notes.

### Berichtigungen.

Literarischer Bericht. Nr. VII. S. 113. Z. 2. Statt „dritten" s. m. „ersten."

S. 342. Z. 22. Statt „zweiten" s. m. „dritten."

S. 372. Z. 24. Hinter „Coefficienten" schalte man die Worte „der höchsten Glieder" ein.

Digitized by Google

Fig. 1. a.

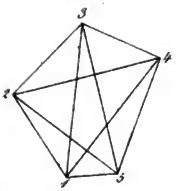



Fig. 1. b.

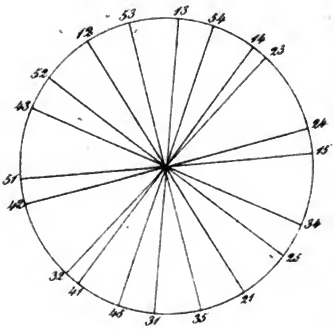



Fig. 2. a.

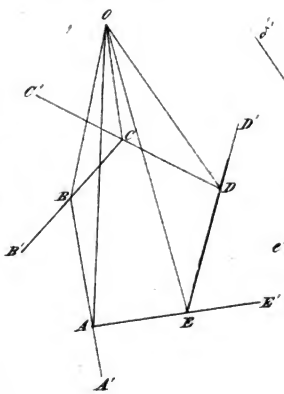
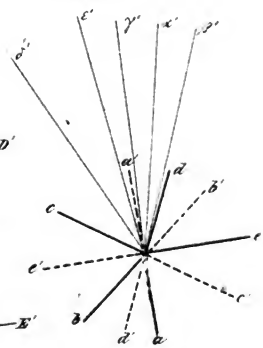



Fig. 2. b.




UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

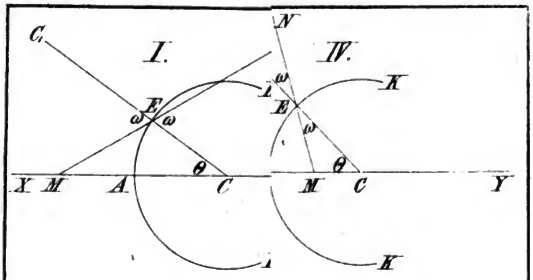
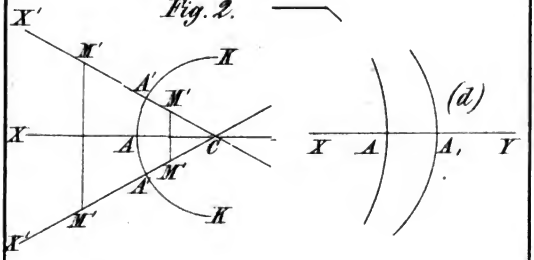
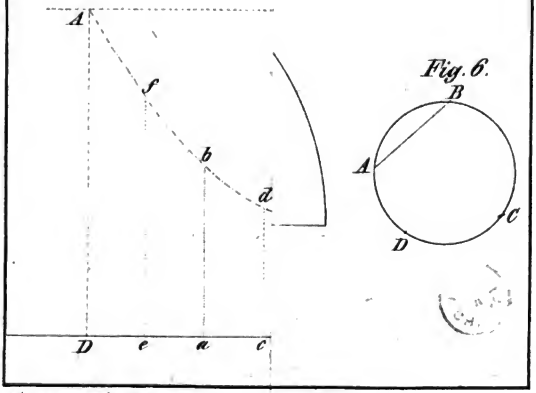



Fig. 2.




Gruneri Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

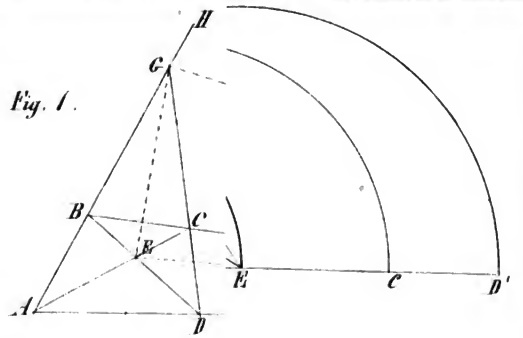



Fig. 3.

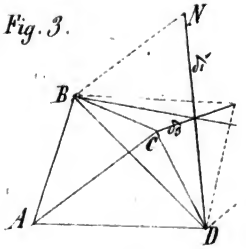



Fig. 6.

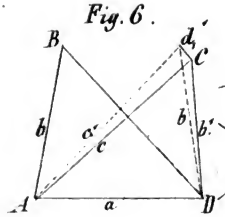
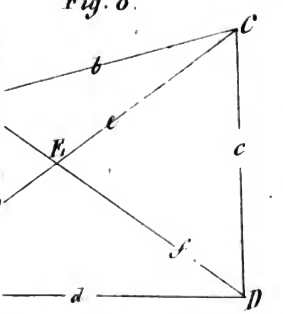


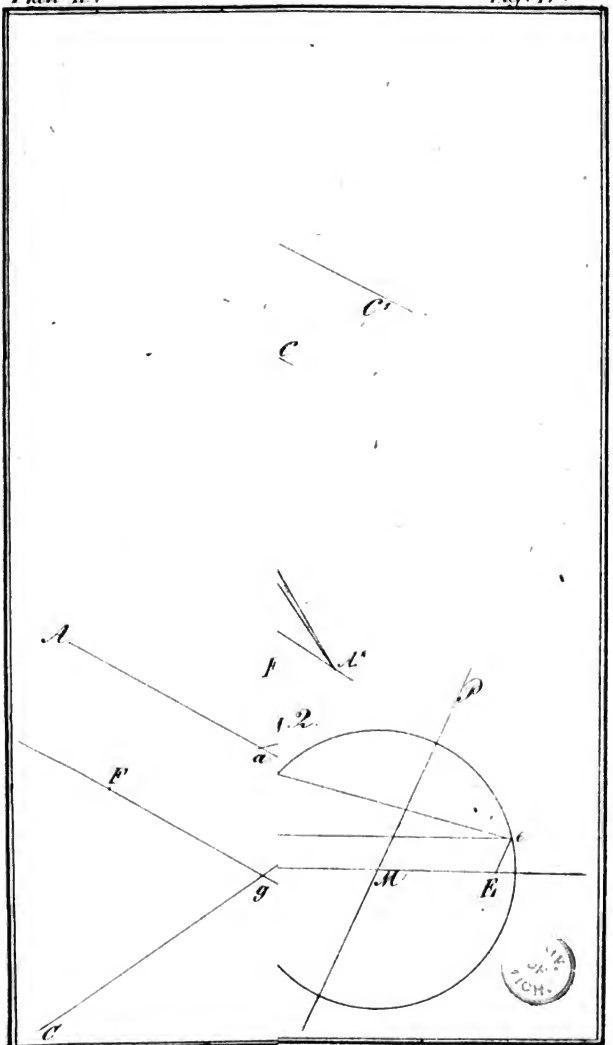

Fig. 8.






Digitized by Google

Digitized by Google




Grunert Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

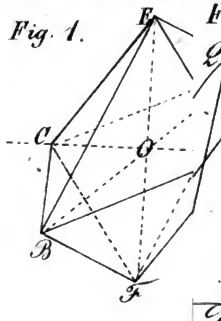



Fig. 3.

Fig. 4.

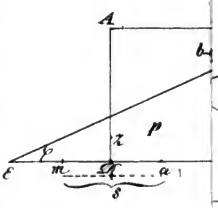



Fig. 6.

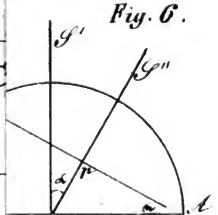



Fig.

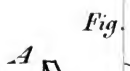
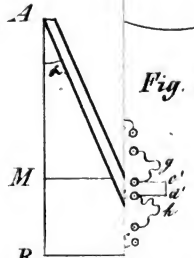


Fig. 8.




UNIV. OF MICH.

Grunert Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google